Université Bordeaux 1
Année 2009/2010
MHT411a

TD 3 : EXERCICES TRAITÉS LORS DE LA SÉANCE DU 13 OCTOBRE

Exercice 2.
On considère l'ensemble des racines $n-$ièmes de l'unité $R_n := \{z \in \mathbb{C} : \quad z^n = 1\}$. On a déjà vu, et ceci de deux manières différentes, que $(R_n, \times)$ était un groupe commutatif. On veut voir qu'il est en plus cyclique et trouver un générateur. On commence par montrer qu'il est fini.

$$R_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} : \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On montre qu'en fait, on peut se limiter à $k \in \{0, .., n-1\}$. En effet, soit $k \in \mathbb{Z}$. On fait la division euclidienne de k par n :

$$k = nq + r, \qquad r \in \{0, .., n-1\}.$$

On a que

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2inq\pi}{n}} e^{\frac{2ir\pi}{n}} = e^{2iq\pi} e^{\frac{2ir\pi}{n}} = e^{\frac{2ir\pi}{n}}$$

et donc

$$R_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} : \quad k = 0, .., n-1 \right\}$$

on encore R_n est d'ordre fini n. Pour qu'il soit cyclique, il suffit de montrer qu'il contient un élément d'ordre n qui sera alors un générateur du groupe. (Attention, il s'agit d'un générateur, il n'y a pas d'unicité, il peut exister plusieurs générateurs dans un groupe cyclique). Soit $w := e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On voit alors que

$$w^n = 1 \qquad \text{et} \qquad w^j \neq 1, \quad j < n$$

donc w est d'ordre n et c'est un générateur de R_n qui est bien cyclique.

Exercice 3.
On considère l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels, noté $M_2(\mathbb{R})$. Il est trivial de montrer, sachant que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien, que c'est aussi le cas pour $(M_2(\mathbb{R}), +)$. Soit $J_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. J_2 est d'ordre fini dans $(M_2(\mathbb{R}), +)$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$nJ_2 = \underbrace{J_2 + J_2 + ... + J_2}_{n \text{ fois}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}_2.$$

Or, $nJ_2 = \mathbb{O}_2$ est équivalent à $n = 0$, donc J_2 n'est pas d'ordre fini dans $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

Remarque. On peut montrer par contre que J_2 est d'ordre 4 dans le groupe des matrices inversibles muni de la multiplication matricielle, noté $(Gl_2(\mathbb{R}), \cdot)$.

Exercice 4.
Si E est un ensemble, on a déjà vu à la feuille 2 que σ_E (l'ensemble des bijections de E dans E) muni de la loi de composition est un groupe (non abélien). Soit $f : E \to E$ une application (a priori quelconque et donc pas supposée bijective) telle que $f \circ f = id_E$. On veut montrer que f

est un élément de σ_E d'ordre fini. Commençons par montrer que c'est un élément de σ_E, à savoir que f est bijective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. En appliquant cette égalité à f et en utilisant la propriété vérifiée par f on a $x = f(f(x)) = f(f(y)) = y$ donc f est injective. Soit maintenant $y \in E$, alors $f(f(y)) = y$ et donc $f(y)$ est un antécédent de y par f ce qui implique que f est sujective et donc bijective. Maintenant, comme $f \circ f = id_E$, alors f est d'ordre au plus 2 : si $f = id_E$ alors f est d'ordre 1, sinon f est d'ordre 2.

On prend maintenant $E = \mathbb{R}$ et on considère $t_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t_1(x) = x + 1$. Calculons les itérés de t_1, c'est à dire les produits de t_1 avec lui-même. $t_1 \circ t_1(x) = t_1(x) + 1 = x + 1 + 1 = x + 2$. On va montrer par récurrence que $t_1^k(x) = x + k$.

$$t_1^{k+1}(x) = t_1 \circ t_1^k(x) = t_1^k(x) + 1 = x + k + 1$$

ce qui termine la récurrence. Si t_1 était d'ordre fini, il existerait un $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $t_1^n = id_{\mathbb{R}}$, c'est à dire avec ce qu'on vient de calculer qu'on aurait un $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$x + n = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cette égalité n'est bien sûr possible que pour $n = 0$ et donc t_1 n'est pas d'ordre fini. Montrons qu'on a que le groupe engendré par t_1, noté $\langle t_1 \rangle$, est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. On rappelle que le groupe engendré par un élement est le plus petit sous-groupe contenant cet élément. C'est aussi l'ensemble des puissances de cet élément

$$\langle t_1 \rangle = \left\{ t_1^k : \quad k \in \mathbb{Z} \right\},$$

où bien entendu t_1^0 désigne l'application identité $id_{\mathbb{R}}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & (\langle t_1 \rangle, \circ) & \to & (\mathbb{Z}, +) \\ & t_1^k & \mapsto & k \end{array}$$

Alors, il est clair que Φ est un morphisme de groupes : $\Phi(id_{\mathbb{R}}) = \Phi(t_1^0) = 0$ et

$$\Phi(t_1^k \circ t_1^j) = \Phi(t_1^{k+j}) = k + j = \Phi(t_1^k) + \Phi(t_1^j).$$

Concernant l'injectivité, on sait qu'il est nécessaire et suffisant de montrer que $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{id_{\mathbb{R}}\}$. Soit t_1^k tel que $\Phi(t_1^k) = k = 0$ on a directement que $t_1^k = t_1^0 = id_{\mathbb{R}}$.Pour la surjectivité, soit $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = \Phi(t_1^k)$ et Φ est trivialement surjectif. On a donc bien que

$$(\langle t_1 \rangle, \circ) \simeq (\mathbb{Z}, +).$$