Université Bordeaux 1
Année 2009/2010
MHT 411a

Feuille de TD n°1 (Applications : injectivité, surjectivité, ...)

Exercice 1. (1) Rappeler les définitions d'application injective et surjective.
(2) Donner un exemple d'application injective $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d'application surjective $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(3) Donner un exemple d'application surjective mais pas injective de $[-1, 1] \to [0, 1]$.
(4) Donner un exemple d'application injective mais pas surjective de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications.
(1) Montrer que si f et g sont toutes deux surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
(2) Montrer que si f et g sont toutes deux injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante, c'est à dire telle que $x < y$ implique $f(x) < f(y)$.
(1) Montrer que f est injective.
(2) Donner un exemple d'une application strictement croissante qui n'est pas surjective.

Exercice 4. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{x+2} \end{array}$$

(1) Montrer que f n'est pas surjective.
(2) On définit l'application $\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
(i) Montrer que $\tilde{f}$ est bien définie et surjective.
(ii) Montrer que $\tilde{f}$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 5. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'application

$$f_{a,b} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{array}$$

(1) Montrer que $f_{a,b}$ est bijective si et seulement si $a \neq 0$. Déterminer alors sa bijection réciproque.
(2) Trouver toutes les valeurs de (a, b) telles que $f_{a,b}$ soit bijective et vérifie $f_{a,b}^{-1} = f_{a,b}$.
(3) On note $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ (a, b) & \mapsto & f_{a,b} \end{array}$$

Montrer que ϕ est une application injective.

Exercice 6. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(1 - x)$.
(1) Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation

$$x^2 - x - y = 0.$$

(2) Soit $y_0 = \frac{1}{4}$.
(i) Montrer que si $y > y_0$, alors y n'a pas d'antécédent par f.
(ii) Montrer que si $y = y_0$, alors y a exactement un antécédent par f.
(iii) Montrer que si $y < y_0$, alors y a exactement deux antécédents par f.
(iv) En déduire que f n'est ni injective ni surjective.
(3) Soit $f_1 : [\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $f_1(x) = f(x)$.f_1 est-elle injective ou surjective ?
(4) Trouver un intervalle I tel que l'application $f_2 : \mathbb{R} \to I$ définie par $f_2(x) = f(x)$ soit surjective.

Exercice 7. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\pi x) \end{array}$$

Calculer les images directes $f(\{0, 1\})$, $f([0, \frac{1}{2}])$, $f(\mathbb{Z})$ et $f(2\mathbb{Z})$, où on rappelle que $2\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers pairs.

Exercice 8. On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

(1) Calculer les images inverses $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(]-\infty,0])$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(]-1,1])$ et $f^{-1}(]4,+\infty[)$. L'application f est-elle injective ou surjective ?

(2) Calculer les images directes suivantes :

$$f(X_1) \text{ où } X_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\right\}$$
$$f(C) \text{ où } C = [0,1] \times [-2,3]$$
$$f(\Gamma_{\cos}) \text{ où } \Gamma_{\cos} = \{(x, \cos x) \ : \ x \in [0,\pi]\}$$

[Indication : Utiliser des interprétations géométriques et des dessins]

(3) Mêmes questions avec l'application

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & |x|+|y| \end{array}$$