Université Bordeaux 1
Année 2009/2010
MHT411a
**Feuille de TD n°2 (Généralités sur les groupes)**

**Exercice 1.** Dans chacun des cas suivants, dire si l'ensemble considéré muni de la loi est un groupe.
(1) $\mathbb{C}$ muni de la multiplication usuelle $\times$;
(2) $]-1,1[$ muni de la multiplication usuelle $\times$;
(3) $\{f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax+b, \quad a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}\}$ muni de la loi de composition des application $\circ$;
(4) $\mathbb{R}$ muni de la loi $\star$ définie comme suit : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \star y := x + y + xy$;
(5) $\{-1, 1, -i, i\} \subset \mathbb{C}$ muni de la loi de multiplication usuelle $\times$.

**Exercice 2.** On définit sur $\mathbb{R}$ une nouvelle loi $\star$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad x \star y := \sqrt[5]{x^5 + y^5}.$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

**Exercice 3.** Montrer qu'il existe une seule table pour un groupe d'ordre 3. Qu'en est-il pour un groupe d'ordre 4 ?

**Exercice 4.** *(Groupe du cercle)*
Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la loi $\oplus$ par

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \oplus (x',y') := (xx' - yy', xy' + x'y).$$

(1) Montrer que $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \oplus)$ est un groupe.
(2) Soit $\mathcal{C} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \oplus)$.
(3) Soit $\phi :\ (x,y) \mapsto x + iy$. Montrer que $\phi$ est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$.

**Exercice 5.** Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments. On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des bijections de $E$ dans $E$.
(1) Montrer que $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est un groupe.
(2) On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des bijections de $\{1, ..., n\}$.
 (*i*) Montrer qu'on peut contruire $n!$ applications bijectives de $E$ dans $\{1, ..., n\}$.
 (*ii*)Soient $\phi$ une bijection de $E$ dans $\{1, ..., n\}$ et

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathfrak{S}(E) & \to & \mathfrak{S}_n \\ & f & \mapsto & \phi \circ f \circ \phi^{-1} \end{array}$$

Montrer que $\Phi$ est un isomorphisme de groupes.
(3) Expliciter les tables de $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$. Ces groupes sont-ils commutatifs ?

**Exercice 6.** Soit $E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. On introduit l'ensemble $\mathcal{H}$ formé des six fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = 1 - x, \qquad f_3(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad f_4(x) = \frac{x-1}{x},$$
$$f_5(x) = \frac{x}{x-1} \qquad \text{et} \qquad f_6(x) = \frac{1}{x}.$$

(1) Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{S}(E)$.
(2) Ecrire la table des éléments de $\mathcal{H}$.
(3) Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}(E)$.