TD 3

Exercice 1.
(1) Montrer que $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes Abéliens.
(2) $\exp(i\pi/4)$ est-il d'ordre fini dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
(3) $\exp(i\pi/4)$ est-il d'ordre fini dans $(\mathbb{C}, +)$.

Exercice 2. Soient n un entier naturel non-nul et $R_n \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.
(1) Montrer par deux méthodes que $(R_n, \times)$ est un groupe.
(2) Est-ce un groupe Abélien ?
(3) Est-ce un groupe fini ? Si oui, calculer son cardinal.
(4) Est-ce un groupe cyclique ? Si oui, déterminer un générateur.

Exercice 3. Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à 2 lignes et à coefficients réels :

$$M_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

On définit une loi binaire $+$ sur $M_2(\mathbb{R})$ par

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que $(M_2(\mathbb{R}), +)$ est un groupe Abélien.
(2) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle d'ordre fini dans $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

Exercice 4.
(1) Soient E un ensemble et σ_E l'ensemble des bijections de E dans lui-même. Montrer que $(\sigma_E, \circ)$ est un groupe.
(2) Soit $f \in \mathcal{F}(E, E)$ une application satisfaisant $f \circ f = id_E$. Montrer que f est un élément de σ_E d'ordre fini.
(3) soit $t_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $t_1(x) = x + 1$. Montrer que t_1 est un élément de $\sigma_{\mathbb{R}}$. Que pouvez-vous dire de son ordre ? Montrer que $(\langle t_1 \rangle, \circ)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 5. On se place dans le groupe $(\mathbb{Z}, +)$.
(1) Montrer que le sous-groupe engendré par $A = \{1, 2\}$ noté $\langle A \rangle$ est $\mathbb{Z}$.
(2) Montrer que $\langle \{2, 3\} \rangle = \mathbb{Z}$.
(3) Montrer que $\langle \{4, 6\} \rangle = 2\mathbb{Z}$.

Exercice 6. On se place dans $(\mathbb{R}, +)$. Soient $A := \left\{ \frac{1}{n!}, n \in \mathbb{N} \right\}$ et $H := \langle A \rangle$.
(1) Montrer que $\mathbb{Z} \subset H$.
(2) Montrer que $\mathbb{Q} \subset H$.
(3) Déterminer H.

Exercice 7. Soit R_0 l'ensemble des rotations complexes de centre 0. Les éléments de R_0 sont donc de la forme $r_u(z) = uz$ où u est un nombre complexe de module 1.
(1) Montrer que $(R_0, \circ)$ est un groupe.
(2) Montrer qu'il est isomorphe à $\left(\mathbb{S}^1, \times\right)$.

Exercice 8. Pour a dans $\mathbb{C}^*$ et b dans $\mathbb{C}$, on définit une bijection $f_{a,b}$ par

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad f_{a,b}(z) := az + b.$$

Soient $GA(\mathbb{C})$ l'ensemble de ces bijections, $T(\mathbb{C})$ l'ensemble des translations complexes et $T_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$ l'ensemble des translations entières. Montrer que $(GA(\mathbb{C}), \circ)$, $(T(\mathbb{C}), \circ)$ et $(T_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}), \circ)$ sont des groupes.