Université Bordeaux 1
Année 2008/2009
TD de PNG201 - groupe KHI2-A3
`http://www.math.u-bordeaux1.fr/ fgaunard`

EXERCICES SUR LES COURBES PARAMÉTRÉES

Exercice 1. (Exercice 57 du polycopié jaune)
Soit Γ la courbe paramétrée définie par
$$\Gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$
(1) Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$.
(2) Calculer $\Gamma(-t)$ puis $\Gamma(\pi - t)$ et enfin $\Gamma(\frac{\pi}{2} - t)$. En déduire une réduction du domaine d'étude à l'aide de transformations géométriques.
(3) Après avoir étudié les fonctions coordonnées, tracer l'allure de la courbe.

Exercice 2. On considère la courbe paramétrée
$$\Gamma : t \mapsto (\cos t, \sin \frac{t}{3}), \qquad t \in \mathbb{R}.$$
(1) Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[-6\pi, 6\pi]$.
(2) Calculer $\Gamma(-t)$ puis $\Gamma(3\pi - t)$. En déduire une réduction du domaine d'étude à l'aide de transformations géométriques.
(3) Après avoir étudié les fonctions coordonnées, tracer l'allure de la courbe.

Exercice 3. On considère la courbe paramétrée
$$\Gamma : t \mapsto \left(\sin t, \frac{\sin t}{2 + \cos t}\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$
(1) Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude dans un premier temps à $[-\pi, \pi]$ puis à $[0, \pi]$.
(2) Montrer que Γ passe deux fois par le point $(0, 0)$ et donner les deux pentes.
(3) Etudier les fonctions coordonnées.
(4) Tracer l'allure de la courbe.

Exercice 4. Soit Γ la courbe paramétrée à étudier
$$\Gamma : t \mapsto (\sin^3 t, \cos 3t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$
(1) Réduire l'intervalle d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$.
(2) Etudier la tangente à la courbe en $t = 0$.
(3) Faire le tableau de variations des fonctions coordonnées et tracer l'allure de la courbe.

Exercice 5. (Courbes de Lissajous)
On considère les paramètres fixés $a, b \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{N}^\star$ et $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et la courbe paramétrée
$$\Gamma : t \mapsto (\sin(pt), \sin(qt + \phi)), \qquad t \in \mathbb{R},$$
appelée *courbe de Lissajous.*
(1) Etudier la courbe de Lissajous pour $a = b = 1$, $p = 3$, $q = 2$ et $\phi = 0$.
(2) Même question avec $q = 4$.

Exercice 6. Soit $\Gamma : t \mapsto (\cos^2 t + \ln|\sin t|, \sin t \cos t)$ pour $t \in \mathbb{R}^{\star}$.

(1) Montrer qu'on peut se restreindre à $]0, \frac{\pi}{2}]$.

(2) Montrer que $t = \frac{\pi}{4}$ est un point singulier et étudier le comportement local de Γ à l'aide développements limités.

(3) Tracer les tableaux de variations.

(4) Etudier la branche infinie de Γ lorsque $t \to 0$.

(5)Tracer l'allure de la courbe.

Exercice 7. Tracer l'allure de la courbe

$$\Gamma : t \mapsto \left(\sin t, \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t}\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

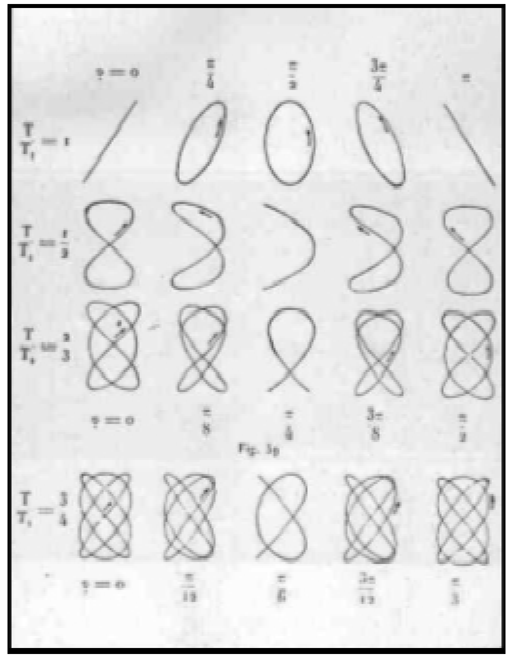
Exercice 8. Etudier les courbes suivantes (présence d'asymptotes)

(1) $\Gamma : t \mapsto (\tan \frac{t}{3}, \sin t), \qquad t \in [-3\pi, 3\pi] \setminus \left\{\pm\frac{3\pi}{2}\right\}$.

(2)$\Gamma : t \mapsto \left(\frac{1}{t(t-1)}, \frac{t^2}{1-t}\right), \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

JULES-ANTOINE LISSAJOUS

l'étude des mouvements vibratoires



Figures de Lissajous

Né en 1822 à Versailles, mort en 1880 à Plombières-les-Dijon.

On lui doit la mesure de fréquence de déphasage qui permet de comparer un signal de fréquence inconnu à un signal connu. Il a étudié les vibrations transversales des lames élastiques ainsi que la composition de tout mouvement vibratoire par un procédé optique (1873). Ses travaux sont complémentaires de ceux d'Etienne-Jules Marey.

Jules-Antoine Lissajous crée aussi un comparateur optique et un télégraphe optique utilisé en 1870 pendant le Siège de Paris.

La Courbe de Lissajous est décrite par un point dont le mouvement résulte de la composition de deux mouvements sinusoïdaux perpendiculaires l'un à l'autre. Ces courbes permettent l'étude visuelle directe sur un écran de mouvements vibratoires et notamment la comparaison des sons donnés par 2 instruments.