Problèmes de sous-espaces invariants

Frédéric Gaunard

sous la direction d'Andreas Hartmann

UNIVERSITÉ
BORDEAUX 1
Sciences Technologies

Table des matières

Préambule

L'un des problèmes toujours ouverts qui suscite le plus d'engouement au sein de l'analyse fonctionnelle est celui du sous-espace invariant. Il a pour but de répondre à la question suivante :

Si H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et si T est un opérateur (linéaire) continu sur H, $T \neq 0$, existe-t-il un sous-espace fermé $\mathcal{M}$ de H non trivial ($i.e$ différent de H et de l'espace nul) tel que

$$T\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \,?$$

On peut faire plusieurs remarques quant à la question posée. Tout d'abord, on s'intéresse à la dimension infinie car si H est un espace de Hilbert complexe de dimension finie supérieure ou égale à 2, et si x est un vecteur propre (non nul) de T associé à une valeur propre non nulle, $\mathbb{C}Tx$ est un sous-espace fermé invariant et non trivial, de dimension 1. Ensuite, on impose que le sous-espace $\mathcal{M}$ soit fermé car sinon $\mathrm{vect}\{T^n x;\, n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-espace invariant non trivial dès que x est non nul.

L'espace H est un espace de Hilbert ; si l'on allège cette condition en prenant uniquement H espace de Banach, la réponse est connue depuis 1975 [**4**] et est négative dans le cas général, Charles Read [**13**] a même contruit en 1984 un opérateur continu sur l^1 qui ne possédait pas de sous-espace invariant non trivial. Enfin, si H n'est pas supposé séparable, alors en prenant $x \neq 0$, le sous-espace $\overline{\mathrm{vect}\{T^n x;\, n \in \mathbb{N}\}}$ est bien invariant et ne peut être égal à H tout entier sinon la famille $\{(q+ir)T^n x :\ n \in \mathbb{N},\ (q,r) \in \mathbb{Q}^2\}$ serait (dénombrable et) dense dans H.

Nous verrons tout au long de ce mémoire que les espaces L^2 et H^2 jouent un rôle primordial dans l'étude de ce problème. En effet, E. Nordgren, P. Rosenthal & F.S. Winrobe ont montré en 1986 que le problème en question était équivalent au fait que les sous-espaces invariants (non-triviaux) minimaux des opérateurs de compositions hyperboliques sur $H^2(\mathbb{D})$ soient tous de dimension 1. Ce résultat sera, suivant la preuve de ses auteurs, démontré au chapitre 2. Il sera suivi de quelques conditions nécessaires et suffisantes, établies par V. Matache, concernant la minimalité des sous-espaces invariants de l'opérateur de composition hyperbolique.

L'objet de ce mémoire n'est pas de résoudre le problème du sous-espace invariant, mais il semble interessant de savoir si le treillis d'un opérateur, c'est à dire l'ensemble des sous-espaces invariants non triviaux, que l'on note Lat pour *lattice*, lorsqu'il est non vide, est structuré, ordonné, paramétré, etc.

Par exemple, on sait [**1**] que l'opérateur de Volterra

$$\begin{array}{rccc} V_a : & L^2(0,a) & \to & L^2(0,a) \\ & f & \mapsto & (x \mapsto \int_0^x f(t)dt) \end{array}$$

a un treillis ordonné $\mathrm{Lat}(V_a) = \{L^2_\alpha :\ 0 \leq \alpha \leq a\}$ où $L^2_\alpha := \{f \in L^2(0,a) :\ f = 0 \text{ p.p sur } (0,\alpha)\}$.

C'est dans cette optique, après avoir étudié les résultats classiques de Wiener, Beurling et Lax, que nous étudierons des articles de A. Katavolos & S.C. Power qui ont réussi à paramétrer les sous-espaces simultanément invariants sous l'action deux semi-groupes d'opérateurs et un article plus récent de E.A Gallardo-Gutièrrez & J.R. Partington qui ont établi un lien entre les sous-espaces invariants de certaines familles d'opérateurs et les opérateurs de composition.

Un grand merci à Sofiane Akkouche, Frédéric Bayart et Etienne Matheron pour leurs réponses toujours rapides, claires et précises à mes différentes questions. Merci également à Marjorie Ecotière pour son aide dans la chasse aux fautes de frappe. Enfin, je voudrais exprimer ma plus grande reconnaissance à Andreas Hartmann pour la patience, la disponibilité et la sympathie avec lesquelles il m'a encadré tout au long de ce mémoire.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Nous rappelons dans ce premier chapitre quelques définitions et résultats bien connus à propos des espaces de Hardy et des sous-espaces de L^2 invariants sous l'action du shift, qui vont jouer un rôle central tout au long de ce mémoire. Les notations utilisées ci-après seront constamment employées dans tous les chapitres qui suivront. Le demi-plan supérieur $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ sera noté $\mathbb{C}^+$, le disque unité (ouvert) $\mathbb{D}$ et son bord $\mathbb{T}$. On notera z l'application $z : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \xi \mapsto \xi$. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathcal{H}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Nous commençons par rappeler que $L^2(\mathbb{T})$, l'espace des fonctions de carré sommable par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$, notée m, est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}dm$. Une base orthonormale est donnée par la famille $\mathcal{B} := \{z^n;\ n \in \mathbb{Z}\}$, et chaque fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ peut se développer en série de Fourier sous la forme

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)z^n,$$

$$\hat{f}(n) := \langle f, z^n\rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, grâce à l'égalité de Parseval $||f||^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$, l'isomorphisme $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ permet d'identifier $L^2(\mathbb{T})$ à $l^2(\mathbb{Z})$.

Remarque 1.0.1. Comme $\widehat{zf}(n) = \hat{f}(n-1)$, l'opérateur $S := T_z$ de multiplication par z dans $L^2(\mathbb{T})$ est unitairement équivalent à un shift bilatéral agissant sur $l^2(\mathbb{Z})$

$$(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (\hat{f}(n-1))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

1. Espaces de Hardy

Remarque 1.1.1. La plupart des résultats sont énoncés dans le cadre de H^2 ou H^∞ mais ils restent vrais pour $0 < p \leq \infty$.

On appelle espace de Hardy du cercle H^2 l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{T})$ telles que $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et on désigne par H^∞ l'ensemble des fonctions $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ telles que $\hat{f}(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

L'espace de Hardy du disque $H^2(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions f holomorphes dans $\mathbb{D}$ telles que

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} := (\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi})^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

On note $H^\infty(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions f holomorphes sur $\mathbb{D}$ telles que $\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)| < \infty$.

1.1. Limites au bord.

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{D}$ et $0 \leq r < 1$, on note f_r l'application définie sur $\mathbb{T}$ par $f_r(e^{i\theta}) := f(re^{i\theta})$. Rappelons alors les identifications entre les différents espaces de Hardy :

Théorème 1.1.2. *(Limites au bord,* [**9**, p. 34]*)*
Soit $p \in \{2, \infty\}$.
(1) *Si* $f \in H^p(\mathbb{D})$, *alors* $bf := lim_{r\to 1} f_r$ *existe au sens de la norme* $L^p(\mathbb{T})$ *(si* $p = \infty$, *cette limite est prise dans le sens de la topologie faible-*$\star$*) et* $bf \in H^p$.
(2) *L'application* $f \mapsto bf$ *est une isométrie surjective de* $H^p(\mathbb{D})$ *dans* H^p.
La fonction bf *est appelée* ***limite au bord*** *de* f.

Définition 1.1.3. *Soit* $\xi \in \mathbb{T}$. *On appelle* ***angle de Stoltz*** *en* ξ, *et l'on note* S_ξ, *tout secteur angulaire de* $\mathbb{D}$ *centré en* ξ, *de bissectrice* $[0, \xi]$ *et d'angle* $\theta < \pi$.

Théorème 1.1.4. *(Fatou, 1906,* [**9**, p. 40]*)*
Soit $p \in \{2, \infty\}$. *Si* $f \in H^p(\mathbb{D})$, *alors la limite au bord non-tangentielle de* f *existe presque partout sur* $\mathbb{T}$ *et on a*

$$lim_{z\to\xi,\, z\in S_\xi} f(z) = bf(\xi), \qquad \textit{pour presque tout } \xi \in \mathbb{T}.$$

La fonction au bord $\xi \mapsto f(\xi)$ *est dans* $L^p(\mathbb{T})$ *et* $f(\xi) = bf(\xi)$ *presque partout sur* $\mathbb{T}$.

On peut donc **identifier** les fonctions $f \in H^p(\mathbb{D})$ avec leurs valeurs au bord et écrire

$$H^p(\mathbb{D}) = H^p.$$

2. Passage au demi-plan supérieur

2.1. Transformées de Fourier.

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ et son inverse $\mathcal{F}^{-1}$, définies par

$$\mathcal{F}f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixz}dx, \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ixz}dx,$$

sont des isométries de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même. Le sens des intégrales ci-dessus étant les limites dans $L^2(\mathbb{R})$ des transformées $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s}^{s} f(x)e^{-ixz}dx$, $s \to \infty$.

Le sous-espace $L^2_+ \subset L^2(\mathbb{R})$ est défini comme l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ nulles presque partout sur la demi-droite réelle négative.

2.2. L'espace H^2_+.

On introduit les applications conformes

$$\begin{array}{cccc} \gamma : & \mathbb{D} & \to & \mathbb{C}^+ \\ & z & \mapsto & i(\frac{1+z}{1-z}) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} \gamma^{-1} : & \mathbb{C}^+ & \to & \mathbb{D} \\ & s & \mapsto & \frac{s-i}{s+i} \end{array},$$

et on définit l'application

$$\begin{array}{cccc} U_2 : & L^2(\mathbb{T}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & (s \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}(s+i)} f \circ \gamma^{-1}(s)) \end{array}.$$

H^2 étant un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{T})$, on s'intéresse à l'image U_2H^2 qui est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$. On obtient le résultat suivant :

Proposition 1.2.1. [**9**, p. 144] $U_2H^2 = \mathcal{F}^{-1}L^2_+$.

Maintenant, on veut identifier U_2H^2 avec l'espace des valeurs au bord des fonctions d'un certain espace de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}_+$. En effet, on remarque que si $f \in H^2$, alors

$$U_2f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(z+i)} f(\frac{z-i}{z+i}), \qquad \mathrm{Im}(z) > 0,$$

définit bien une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}_+$. De plus, il est clair que γ^{-1} transforme (localement) un angle de Stolz dans $\mathbb{C}_+$, $\{x+iy : |x-r| < Cy\}$, en un angle de Stoltz de $\mathbb{D}$. Ainsi, le théorème de Fatou 1.1.4 implique que U_2f a une limite non-tangentielle presque partout sur $\mathbb{R}$ et $b(U_2f) = U_2(bf)$. Dans le but d'obtenir une autre caractérisation de U_2H^2, on s'intéresse à $U_2H^2(\mathbb{D})$ comme sous-ensemble de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$: c'est l'objectif du théorème suivant. Avant cela nous définissons l'espace de Hardy du demi-plan supérieur $H^2_+ = H^2(\mathbb{C}^+)$ comme l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}^+$ telles que

$$\|f\|_{H^2_+} := (\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

On définit également

$$H^\infty_+ = H^\infty(\mathbb{C}^+) := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+) : \ ||f|| := \sup|f(z)| < \infty\}.$$

Théorème 1.2.2. [**9**, p.146] *L'application U_2 est une isométrie surjective, H^2 sur H^2_+ , et son inverse est donnée par*

$$\begin{array}{cccc} U_2^{-1}: & H^2_+ & \to & H^2 \\ & f & \mapsto & (z \mapsto \frac{2i\sqrt{\pi}}{1-z} f \circ \gamma(z)) \end{array}.$$

On peut déduire des deux résultats précédents le

Théorème 1.2.3. *(Paley-Wiener, 1934,* [**9**, p.146]*)*

$$H^2_+ = \mathcal{F}^{-1}L^2_+.$$

D'autre part, on fait apparaître un résultat permettant de caractériser les fonctions harmoniques positives du demi-plan supérieur :

Proposition 1.2.4. *(Formule de Poisson dans le demi-plan supérieur,* [**6**, p.18]*)*
Soit u une fonction harmonique et positive dans $\mathbb{C}^+$. Alors, il existe une unique constante positive c et une unique mesure μ sur $\mathbb{R}$, positive et vérifiant $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t^2+1} < \infty$ telles que

$$u(s) = cIm(s) + \int_{\mathbb{R}} \frac{Im(s)}{(Re(s)-t)^2 + Im(s)^2} d\mu(t).$$

3. Factorisations

On va dans cette section définir et étudier quelques propriétés des fonctions dites intérieures qui jouent un rôle important dans l'étude des sous-espaces invariants, ainsi que plus généralement dans l'étude des fonctions de H^2 grâce aux diverses factorisations que nous allons présenter ci-après.

Définition 1.3.1. *Une fonction de H^∞ de module égal à 1 presque partout sur $\mathbb{T}$ est appelée* ***fonction intérieure****.*

Lemme 1.3.2. *(Condition de Blaschke,* [**9**, p.37]*)*
Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, non identiquement nulle et soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des zéros de f dans $\mathbb{D}$, comptés avec multiplicité. On suppose que $\underline{lim}_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|f_r(e^{i\theta})|^2\frac{d\theta}{2\pi}<\infty$. Alors,

$$\sum_{n\geq 1}(1-|\lambda_n|)<\infty.$$

Cette condition est appelée ***condition de Blaschke****, et elle est vérifiée en particulier pour toute fonction $f\in H^2$.*

Pour $\lambda\in\mathbb{D}$, définissons le **facteur de Blaschke** b_λ par

$$b_\lambda := \frac{|\lambda|}{\lambda}\frac{\lambda - z}{1-\bar{\lambda}z}.$$

Lemme 1.3.3. *(Produit de Blaschke,* [**9**, p.37]*)*
Si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathbb{D}$ vérifiant la condition de Blaschke, alors le produit infini

$$B := \prod_{n\geq 1} b_{\lambda_n} = lim_{r\to 1}\prod_{|\lambda_n|<r} b_{\lambda_n}$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$. De plus, $|B|\leq 1$ sur $\mathbb{D}$, $|B|=1$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et ses zéros sont exactement les λ_n, comptés avec multiplicités. B est appelé ***produit de Blaschke*** *associé à $(\lambda_n)_{n\geq 1}$. En particulier chaque produit de Blaschke est une fonction intérieure.*

Proposition 1.3.4. *Soient $f\in H^2$, $(\lambda_n)_n$ ses zéros et B le produit de Blaschke associé. Alors il existe $g\in H^2$ telle que $g(z)\neq 0$ pour tout $z\in\mathbb{D}$ et vérifiant*

$$f = B\cdot g \qquad et \qquad ||f||_2 = ||g||_2.$$

Définition 1.3.5. *Soit $f\in L^2(\mathbb{T})$ telle que $\log|f|\in L^1(\mathbb{T})$. On définit*

$$[f](z) := \exp\Big(\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log|f(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}\Big), \qquad |z|<1.$$

Remarque 1.3.6. Si $f\in H^2$, alors $\log|f|\in L^1(\mathbb{T})$ et donc $[f]$ est bien définie. De plus, $[f]\in H^2$ et $|[f]|=|f|$ presque partout sur $\mathbb{T}$ ce qui implique, d'apres la définition, que si $g\in H^2$ telle que $|g|\leq|f|$ p.p sur $\mathbb{T}$ alors, $|g|\leq|[f]|$sur $\mathbb{D}$.

Théorème 1.3.7. *(Fonctions intérieures singulieres,* [**9**, p.42]*)*
Soit S une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. Les conditions suivantes sont équivalentes.
(1) *$|S(z)|\leq 1$ et $|S(z)|\neq 0$ sur $\mathbb{D}$, $S(0)>0$ et $|S(\xi)|=1$ presque partout sur $\mathbb{T}$.*
(2) *Il existe une (unique) mesure borélienne $\mu\geq 0$ sur $\mathbb{T}$, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$, telle que*

$$S(z) = \exp\Big(\int_{\mathbb{T}}\frac{\xi+z}{\xi-z}d\mu(\xi)\Big), \qquad z\in\mathbb{D}.$$

Une fonction S vérifiant (1) ou (2) est appelée **fonction intérieure singulière**.

Proposition 1.3.8. *Toute fonction intérieure est produit d'une fonction intérieure singulière et d'un produit de Blaschke.*

Théorème 1.3.9. *(F. Riesz, V. Smirnov,* [**9**, p.37]*)*
Soit $f\in H^2$. Il existe une unique factorisation $f=\lambda BS[f]$, où $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|=1$, B produit de Blachke associé aux zéros de f, et S fonction intérieure singulière.

Regardons maintenant ce qu'il en est au niveau du demi-plan supérieur.

Définition 1.3.10. *Une fonction $\Theta \in H^\infty_+$ telle que $|\Theta| = 1$ presque partout sur $\mathbb{R}$ est (aussi) appelée* ***fonction intérieure****.*

Proposition 1.3.11. *(Condition et Produits de Blaschke pour le demi-plan supérieur,* [**9**, p.147]*)*
Soit $f \in H^2_+$, non identiquement nulle. Alors,

$$\sum_n \frac{Im(\lambda_n)}{1+|\lambda_n|^2} < \infty,$$

où les λ_n sont les zéros de f dans $\mathbb{C}^+$, comptés avec multiplicités. Le produit de Blaschke correspondant (ayant les mêmes propriétés que celui dans $\mathbb{D}$) est

$$B(s) = \prod_n \epsilon_n \frac{s-\lambda_n}{s-\overline{\lambda_n}}, \qquad s \in \mathbb{C}^+,$$

avec $\epsilon_n := \frac{|\lambda_n^2+1|}{\lambda_n^2+1}$ si $\lambda_n \neq i$ et $\epsilon_n = 1$ si $\lambda_n = i$.

Définition 1.3.12. *Dans le demi-plan supérieur, on appelle fonction intérieure singulière une fonction de H^∞_+, n'ayant aucun zéro dans $\mathbb{C}^+$, de limite au bord unimodulaire presque partout, de la forme*

$$V(s) = e^{i\beta s} \cdot \exp\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{ts+1}{t-s} d\mu(t)\right),$$

où $\beta \geq 0$ et μ est une mesure positive et finie sur $\mathbb{R}$, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

On a une factorisation semblable à celle dans $\mathbb{D}$:

Théorème 1.3.13. *(Factorisation canonique,* [**9**, p.147]*)*
Chaque fonction $f \in H^2_+$ possède une factorisation unique sous la forme

$$f = \lambda \cdot B \cdot V \cdot [f],$$

où $\lambda \in \mathbb{T}$, B est le produit de Blaschke associé aux zéros de f, V est une fonction intérieure singulière et $[f]$ est de la forme

$$[f](s) = \exp\left(\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+ts}{t-s} \log|f(t)| \frac{dt}{1+t^2}\right), \qquad s \in \mathbb{C}^+.$$

4. Arithmétique des fonctions intérieures

Définition 1.4.1. *Soient Θ_1 et Θ_2 deux fonctions intérieures. On dit que Θ_1* ***divise*** *Θ_2 si $\Theta_2/\Theta_1 \in H^2$. Clairement, le quotient est encore une fonction intérieure.*

Proposition 1.4.2. *On a l'équivalence*

$$\Theta_1 \textit{ divise } \Theta_2 \iff \Theta_2 H^2 \subset \Theta_1 H^2.$$

Démonstration. Si on suppose la divisibilité de Θ_1 par Θ_2, alors $\Theta_2 = \Theta\Theta_1$, où Θ intérieure. Il suit que $\Theta_2 H^2 = \Theta_1 \Theta H^2 \subset \Theta_1 H^2$. Réciproquement, comme $1 \in H^2$, on a $\Theta_1 = \Theta_2 h$. Il est alors clair que $|h| = 1$ p.p sur $\mathbb{T}$. □

Corollaire 1.4.3. *Soient Θ_1 et Θ_2 deux fonctions intérieures.*

(1) $\Theta_1 H^2 \vee \Theta_2 H^2 := \overline{vect(\Theta_1 H^2, \Theta_2 H^2)} = \Theta H^2$ *où Θ est le plus grand diviseur (intérieur) commun de Θ_1 et Θ_2, relativement à la définition précédente. On le note $\Theta = GCD(\Theta_1, \Theta_2)$.*

(2) $\Theta_1 H^2 \cap \Theta_2 H^2 = \theta H^2$ *où θ est le plus petit multiple commun de Θ_1 et Θ_2. On le note $\theta = LCM(\Theta_1, \Theta_2)$.*

Démonstration. (1) Par le théorème de Beurling, il existe une fonction Θ intérieure telle que $\Theta_1 H^2 \vee \Theta_2 H^2 = \Theta H^2$. De L'inclusion de $\Theta_k H^2$ dans ce dernier espace pour $k = 1, 2$, on déduit à l'aide de la proposition précédente que Θ divise Θ_k, $k = 1, 2$. Soit Θ' un autre diviseur de Θ_1 et Θ_2. Alors, $\Theta_k H^2 \subset \Theta' H^2$ pour $k = 1, 2$ et nécessairement $\Theta H^2 = \Theta_1 H^2 \vee \Theta_2 H^2 \subset \Theta' H^2$. Il suit que Θ' divise Θ qui est donc bien le plus grand diviseur commun de Θ_1 et Θ_2.

Le (2) se montre de la même manière. □

Définition 1.4.4. *Soit $\{\Theta_i : i \in I\}$ une famille de fonctions intérieures. Une fonction intérieure Θ est appelée plus grand diviseur commun de la famille si chaque Θ_i est divisible par Θ et si Θ est divisible par chaque autre diviseur de chaque Θ_i. De même, une fonction intérieure θ est appelée plus petit multiple commun de la famille si chaque Θ_i divise θ et si θ divise chaque fonction intérieure divisible par tous les Θ_i. On note $\Theta = GCD(\Theta_i : i \in I)$ et $\theta = LCM(\Theta_i : i \in I)$.*

Corollaire 1.4.5. $\bigvee_{i\in I} \Theta_i H^2 := \overline{vect(\Theta_i H^2 : i \in I)} = \Theta H^2$, *où $\Theta = GCD(\Theta_i : i \in I)$ et $\bigcap_{i \in I} \Theta_i H^2 = \theta H^2$, où $\theta = LCM(\Theta_i : i \in I)$.*

5. Fonctions extérieures ; classes de Nevanlinna et Smirnov

Définition 1.5.1. *Une fonction $f \in H^2$ est dite* ***extérieure*** *si $E_f := \overline{vect\{z^n f;\ n \geq 0\}} = H^2$.*

Théorème 1.5.2. *(Structure des fonctions extérieures,* [**9**, p.43]*)*
Soit $f \in H^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(1) *Il existe $\lambda \in \mathbb{T}$ tel que $f = \lambda[f]$.*
(2) *Pour tout $z \in \mathbb{D}$, l'inégalité de Jensen devient une égalité :*

$$\log|f(z)| = \int_0^{2\pi} P(ze^{-i\theta}) \log|f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

(3) *L'égalité (2) est vraie pour au moins un $z \in \mathbb{D}$.*
(4) *Si $g \in H^2$ et $g/f \in L^2(\mathbb{T})$, alors $g/f \in H^2$.*
(5) *f est extérieure.*

Remarque 1.5.3. Si $f = \lambda BS[f]$ est la factorisation canonique d'une fonction de H^2, la fonction $[f]$ est appelée la **partie extérieure** de f et la fonction λBS la **partie intérieure** de f. On note souvent $[f] =: f_{ext}$ et $\lambda BS =: f_{int}$.

Définition 1.5.4. *On appelle classe de Nevanlinna l'ensemble des fonctions :*

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log_+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty\},$$

et classe de Smirnov le sous-ensemble de $\mathcal{N}$ formé des fonctions suivantes :

$$\mathcal{N}_+ := \{f \in \mathcal{N} : \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log_+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \log_+ |f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}\}.$$

Proposition 1.5.5. *On a les égalités*

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) :\ \exists f_1, f_2 \in H^2 \ t.q.\ f = f_1/f_2\} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) :\ \exists f_1, f_2 \in H^\infty \ t.q.\ f = f_1/f_2\}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_+ &= \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) :\ \exists f_1, f_2 \in H^2 \ t.q.\ f = f_1/f_2 \text{ et } f_2 \text{ extérieure}\}\\ &= \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) :\ \exists f_1, f_2 \in H^\infty \ t.q.\ f = f_1/f_2 \text{ et } f_2 \text{ extérieure}\}.\end{aligned}$$

Définition 1.5.6. *Une fonction $f \in \mathcal{N}$ est dite extérieure si $f = f_1/f_2$ avec $f_1, f_2 \in H^2$ extérieures.*

Théorème 1.5.7. *(Principe du maximum généralisé,* [**9**, p.72]*)*
Soient $f \in \mathcal{N}_+$ et g une fonction extérieure de $\mathcal{N}$. On suppose que $|f| \leq |g|$ sur $\mathbb{T}$. Alors, $|f| \leq |g|$ sur $\mathbb{D}$.

Démonstration. On écrit $f = f_1/f_2$, $g = g_1/g_2$ où f_2, g_1, g_2 sont des fonctions extérieures de H^∞ et $f_1 \in H^\infty$. Par hypothèse, $|f_1 g_2| \leq |f_2 g_1|$ sur $\mathbb{T}$. Ainsi, par 1.3.6,

$$|f_1 g_2| \leq |[f_1 g_2]| \leq |[f_2 g_1]| = |f_2 g_1|$$

dans $\mathbb{D}$. □

On donne maintenant une application de ce principe nous sera utile à plusieurs reprises au cours des deux derniers chapitres.

Proposition 1.5.8. *Soient q_1 et q_2 deux fonctions unimodulaires sur $\mathbb{R}$ telles que $q_1 H^2_+ \subset q_2 H^2_+$. Alors, $s \mapsto q_1(s)\overline{q_2(s)}$ définit une fonction intérieure sur $\mathbb{C}^+$.*

Démonstration. $\frac{1}{z+i} \in H^2_+$, ainsi il existe $f_1 \in H^2_+$ telle que $g := (z+i) f_1 = q_1 \overline{q_2}$. $h := U_2^{-1} g = \frac{-2i}{1-z}(U_2^{-1} f_1)$. Or, $U_2^{-1} f_1 \in H^2$ et $\frac{-2i}{1-z} \in \mathcal{N}^+$ donc $h \in \mathcal{N}^+$ et vérifie $|h| = 1$ sur $\mathbb{T}$. Le principe du maximum généralisé implique donc que $|h| \leq 1$ sur $\mathbb{D}$. Il suit que $g = U_2 h = \frac{1}{\sqrt{\pi}(z+i)} h(\gamma^{-1})$ est bien bornée dans $\mathbb{C}^+$. □

6. Sous-espaces $z-$invariants

Nous allons dans cette section nous intéresser aux sous-espaces $z-$invariants de $L^2(\mathbb{T})$ et de $L^2(\mathbb{R})$.

6.1. Les théorèmes de Beurling et Wiener.

Définition 1.6.1. *Un sous-espace $\mathcal{M}$ de $L^2(\mathbb{T})$ sera dit $1-$**invariant** (resp. $2-$**invariant**) si $z\mathcal{M} \subsetneqq \mathcal{M}$ (resp. $z\mathcal{M} = \mathcal{M}$).*

Le cas des espaces $2-$invariants est traité par le théorème suivant :

Théorème 1.6.2. *(N. Wiener, 1933* [**9**, p. 8]*)*
Un sous-espace $\mathcal{M} \subset L^2(\mathbb{T})$ est $2-$invariant si et seulement si il existe un unique ensemble mesurable $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\mathcal{M} = \chi_E L^2(\mathbb{T})$.

Démonstration. La condition suffisante étant trivialement vérifiée, montrons la condition nécessaire. Soient P la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur $\mathcal{M}$ et $\psi := P1$. Alors, $1 - \psi \perp \mathcal{M}$, et $\mathcal{M}$ étant $2-$invariant, il est clair que $1 - \psi \perp z^n \psi$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ou encore

$$\int_0^{2\pi} z^n \psi (1 - \overline{\psi}) \frac{d\theta}{2\pi} = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La famille $\mathcal{B}$ étant une base orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$, on obtient que $\psi(1-\overline{\psi}) = 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et les seules valeurs possibles pour ψ sont 0 et 1. Notons $E := \{t : \psi(t) = 1\}$, ainsi $\chi_E = \psi \in \mathcal{M}$. En particulier, $\overline{\{z^n\chi_E : n \in \mathbb{Z}\}} \subset \mathcal{M}$ et on en déduit que $\chi_E L^2(\mathbb{T}) \subset \mathcal{M}$. Pour montrer l'autre inclusion, on montre que $\mathcal{M} \ominus \chi_E L^2(\mathbb{T}) = \{0\}$. Soit donc $f \in \mathcal{M}$ tel que $f \perp \chi_E z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, ce qui s'écrit encore (car $\overline{z} = z^{-1}$ sur $\mathbb{T}$)

$$\int_0^{2\pi} z^n f \chi_E \frac{d\theta}{2\pi} = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit comme précédemment que $f \equiv 0$ presque partout sur E. D'autre part, toujours grâce au fait que $\mathcal{M}$ soit 2−invariant, $z^n f \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{Z}$, et donc $1 - \chi_E \perp z^n f$, qu'on écrit bien sûr

$$\int_0^{2\pi} z^n f(1-\chi_E) \frac{d\theta}{2\pi} = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

On en tire cette fois que $f \equiv 0$ presque partout sur $\mathbb{T} \setminus E$ et on en conclut donc que $f \equiv 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$. □

Traitons maintenant le cas d'un sous-espace 1−invariant :

Théorème 1.6.3. *(A. Beurling-H. Helson, 1964* [**9**, p.9]*)*
Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace de $L^2(\mathbb{T})$ 1−invariant. Alors, il existe une fonction unimodulaire Θ, unique à une constante multiplicative près, telle que $\mathcal{M} = \Theta H^2$.

Démonstration. Commençons par montrer l'existence d'une telle fonction. Du fait que $z\mathcal{M} \subsetneqq \mathcal{M}$, il existe $\Theta \in \mathcal{M}$ telle que $\Theta \perp z\mathcal{M}$ et $||\Theta||_2 = 1$. Etant clair que $z^n\Theta \in \mathcal{M}$, $n \geq 1$, on obtient $\Theta \perp z^n\Theta$ ce qui s'écrit

$$\int_0^{2\pi} |\Theta|^2 z^n = 0, \qquad \forall n \geq 1.$$

Du fait que $\overline{z} = z^{-1}$ sur $\mathbb{T}$, le résultat reste vrai pour $n \leq -1$. On en déduit que $|\Theta|^2 =$ constante presque partout sur $\mathbb{T}$. Mais comme $\|\Theta\|_2 = 1$, cette constante ne peut être égale qu'à 1. Du fait que $\Theta \in \mathcal{M}$, on déduit que $\{\Theta z^n : n \geq 0\} \subset \mathcal{M}$, et comme $H^2 = \overline{\text{vect}\{z^n : n \geq 0\}}$, on obtient que $\Theta H^2 \subset \mathcal{M}$. Il reste à montrer que $\mathcal{M} \ominus \Theta H^2 = \{0\}$. Soit donc $f \in \mathcal{M}$ vérifiant $f \perp \Theta H^2$. On a tout d'abord que $z^n f \in z\mathcal{M}$ pour tout $n \geq 1$. Mais $\Theta \perp z\mathcal{M}$ et ainsi $z^n f \perp \Theta$ ou encore

$$\int_0^{2\pi} \overline{\Theta} z^n f \frac{d\theta}{2\pi} = 0, \qquad n \geq 1.$$

D'un autre côté, $f \perp \Theta z^n$ pour tout $n \geq 0$ et donc

$$\int_0^{2\pi} f\overline{\Theta} z^n \frac{d\theta}{2\pi} = 0, \qquad n \leq 0.$$

On en déduit que $f\overline{\Theta} = 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$, mais comme $|\Theta| = 1$ *p.p.*, on a $f \equiv 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$.

En ce qui concerne l'unicité, supposons que $\Theta_1 H^2 = \Theta_2 H^2$ avec $|\Theta_1| = |\Theta_2| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$. Ceci implique que $\Theta_1\overline{\Theta_2}$ et $\overline{\Theta_1}\Theta_2$ sont dans H^2. Or, $H^2 \cap \overline{H^2} = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f = \text{constante}\}$ et donc $\Theta_1\overline{\Theta_2} = \lambda$ ou encore $\Theta_1 = \lambda\Theta_2$ et $|\lambda| = 1$. □

Remarque 1.6.4. On observe en particulier que $\dim(\mathcal{M} \ominus z\mathcal{M}) = 1$.

Corollaire 1.6.5. *(Théorème de Beurling, 1949* [**9**, p.10]*)*
$\mathcal{M} \neq \{0\}$ est un sous-espace de H^2 vérifiant $z\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, si et seulement si il existe Θ intérieure telle que $\mathcal{M} = \Theta H^2$.

DÉMONSTRATION. Il est clair que pour toute fonction intérieure Θ, le sous-espace ΘH^2 est bien $z-$invariant. Pour la réciproque, on va en fait voir que $z\mathcal{M} \subsetneqq \mathcal{M}$, ou de manière équivalente que $\overline{z}\mathcal{M} \not\subset \mathcal{M}$, et appliquer le théorème précédent. Supposons donc le contraire. Soit $f \in \mathcal{M}$, $f \neq 0$, il existe donc $n \geq 0$ tel que $\hat{f}(n) \neq 0$. Mais alors $(\overline{z}^{n+1} f)\hat{}(-1) = \hat{f}(n) \neq 0$ et donc $\overline{z}^{n+1} f \notin H^2$ ce qui implique que $f \notin \mathcal{M}$. C'est une contradiction. Il existe donc Θ presque partout unimodulaire sur $\mathbb{T}$ telle que $\mathcal{M} = \Theta H^2$. Or, $\mathcal{M} \subset H^2$ et $1 \in H^2$, donc $\Theta^2 \in \mathcal{N}^+$ et par le principe du maximum généralisé 1.5.7, $\Theta \in H^\infty$ est bien intérieure. □

On a maintenant envie d'appliquer ce dernier résultat pour voir ce qu'il se passe dans l'espace de Hardy du demi-plan supérieur. Plus précisément, si S désigne l'opérateur de multiplication par z sur H^2, alors la restriction de $U_2 S U_2^{-1}$ à H^2_+ est l'opérateur de multiplication par $\frac{s-i}{s+i}$ sur H^2_+, noté $\tilde{T}_{\frac{s-i}{s+i}}$. Ainsi, si $\mathcal{M}$ est un sous-espace de H^2_+ tel que $\tilde{T}_{\frac{s-i}{s+i}}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, alors $\mathcal{N} := U_2^{-1}\mathcal{M}$ est un sous-espace de H^2 vérifiant $z\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$, et donc, par le théorème de Beurling, il existe Θ fonction intérieure telle que $\mathcal{M} = U_2(\Theta H^2)$. En posant, $q := \Theta \circ \gamma^{-1}$, on obtient une fonction q intérieure telle que $\mathcal{M} = qH^2_+$. De plus, comme $\frac{s-i}{s+i} = 1 - \frac{2i}{s+i}$, si l'on note $\tilde{T}$ l'opérateur de multiplication par $\frac{1}{s+i}$ sur H^2_+, $\tilde{T}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ est équivalent à $\tilde{T}_{\frac{s-i}{s+i}}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Il en découle la proposition suivante.

Proposition 1.6.6. *(Reformulation du théorème de Beurling pour le demi-plan supérieur)*
$\mathcal{M}$ est un sous-espace de H^2_+ tel que $\frac{1}{s+i}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ si et seulement si il existe Θ une fonction intérieure telle que $\mathcal{M} = \Theta H^2_+$.

Exemple 1.6.7. (Un opérateur de convolution sur L^2_+)
Soit T l'opérateur de L^2_+ défini par

$$Tf(x) := -i\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt.$$

Alors, $\mathrm{Lat}(T) = \mathcal{F}\{qH^2_+ :\ q\,\text{intérieure}\}$. En effet, il est facile de vérifier que $\mathcal{F}^{-1}T = \tilde{T}\mathcal{F}^{-1}$:
Soit $f \in H^2_+$.

$$(\mathcal{F}^{-1}T)(f)(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixs}(Tf)(x)dx = -i\int_{\mathbb{R}}\int_0^x f(x-t)e^{-t}dte^{ixs}dx.$$

Par le théorème de Fubini,

$$(\mathcal{F}^{-1}T)(f)(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^t\int_t^{-\infty}(-i)e^{x(-1+is)}dxdt = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-t}\frac{(-i)}{-1+is}e^{-t}e^{its}dt.$$

Mais $-\frac{i}{is-1} = \frac{1}{s+i}$ et donc

$$(\mathcal{F}^{-1}T)(f)(s) = (\tilde{T}\mathcal{F}^{-1})(f)(s).$$

Il s'en suit que $\mathrm{Lat}(T) = \mathcal{F}(\mathrm{Lat}(\tilde{T}))$.

6.2. Espaces modèles $\mathcal{K}_\Theta$.

On introduit une certaine classe d'espaces $\mathcal{K}_\Theta$, où Θ est une fonction intérieure, dont les propriétés seront utilisées dans le chapitre suivant et qui s'avèrent être les sous-espaces invariants de $S^\star$ sur H^2, où $S^\star$ est l'adjoint de la multplication par z :

$$\langle zf, g\rangle = \langle f, S^\star g\rangle \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{T}).$$

On a même la formule explicite de $S^\star$ sur H^2 :

$$S^\star f = \frac{f - f(0)}{z}, \quad \forall f \in H^2.$$

Définition 1.6.8. *Soit $\Theta \in H^\infty$ une fonction intérieure. On appelle* ***espace modèle***

$$\mathcal{K}_\Theta := H^2 \ominus \Theta H^2.$$

Il découle directement de la définition que $S^\star \mathcal{K}_\Theta \subset \mathcal{K}_\Theta$ et à l'aide du théorème de Beurling, on voit que si $\mathcal{M}$ est un sous-espace de H^2 qui est $S^\star$−invariant, alors il existe une fonction intérieure Θ telle que $\mathcal{M} = \mathcal{K}_\Theta$.

On a également les propositions suivantes :

Proposition 1.6.9. *Soient Θ_1 et Θ_2 deux fonctions intérieures telles que Θ_1 divise Θ_2 dans H^2. Alors, $\mathcal{K}_{\Theta_1} \subset \mathcal{K}_{\Theta_2}$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{K}_{\Theta_1}$. Alors, $f \perp \Theta_1 h$ pour toute fonction $h \in H^2$. Par hypothèse, $\Theta_2 = \Theta_1 g$, où $g \in H^2$. Si $h \in H^2$, alors $\langle f, \Theta_2 h\rangle = \langle f, \Theta_1 gh\rangle = 0$ car $gh \in H^2$, et donc $f \in \mathcal{K}_{\Theta_2}$. ☐

Remarque 1.6.10. La proposition précédente implique que si $\Theta = GCD(\Theta_1, \Theta_2)$ et $\theta = LCM(\Theta_1, \Theta_2)$ alors, $\mathcal{K}_\Theta = \mathcal{K}_{\Theta_1} \cap \mathcal{K}_{\Theta_2}$ et $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{K}_{\Theta_1} \cap \oplus \mathcal{K}_{\Theta_2}$.

Corollaire 1.6.11. *Soit Θ une fonction intérieure divisible dans H^2 par z. Alors, $\mathcal{K}_\Theta$ contient les constantes.*

Démonstration. Il suit de la proposition précédente que $\mathcal{K}_z \subset \mathcal{K}_\Theta$, mais $\mathcal{K}_z$ est exactement l'ensemble des applications constantes car si $f \in \mathcal{K}_z$ alors, $\langle f, z^n\rangle = 0$ pour tout $n \geq 1$. ☐

Définition 1.6.12. *Pour $\lambda \in \mathbb{D}$, on appelle* ***noyau reproduisant*** *en λ la fonction $k_\lambda \in H^2$ définie par*

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}.$$

On vérifie aisément que pour toute fonction $f \in H^2$, $\langle f, k_\lambda\rangle = f(\lambda)$. De plus,

$$\|k_\lambda\|^2 = \langle k_\lambda, k_\lambda\rangle = k_\lambda(\lambda) = \frac{1}{1 - |\lambda|^2}.$$

Soit Θ une fonction intérieure dont l'ensemble des zéros est noté Λ. Il est clair d'après la définition que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $k_\lambda \in \mathcal{K}_\Theta$. De plus, on constate que k_λ est un vecteur propre pour $S^\star$ associé à $\overline{\lambda}$:

$$\langle f, \overline{\lambda} k_\lambda\rangle = \lambda \langle f, k_\lambda\rangle = \lambda f(\lambda) = \langle zf, k_\lambda\rangle = \langle f, S^\star k_\lambda\rangle, \qquad f \in H^2.$$

On note P_Θ la projection orthogonale de H^2 sur $\mathcal{K}_\Theta$. Si $\lambda \notin \Lambda$, il parait naturel de considérer

$$P_\Theta k_\lambda =: k_\lambda^\Theta \in \mathcal{K}_\Theta$$

appelé noyau reproduisant de l'espace modèle, qui vérifie

$$k_\lambda^\Theta(z) = \frac{1 - \overline{\Theta(\lambda)}\Theta(z)}{1 - \overline{\lambda} z}, \qquad \left\|k_\lambda^\Theta\right\|^2 = \frac{1 - |\Theta(\lambda)|^2}{1 - |\lambda|^2}.$$

On a de plus le résultat suivant :

Proposition 1.6.13. *Soit* $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$.

(1) *Les normes* $\|k^{\Theta}_{\lambda_n}\|$ *et* $\|k_{\lambda_n}\|$ *sont équivalentes,* $\|k^{\Theta}_{\lambda_n}\| \asymp \|k_{\lambda_n}\|$, $n \geq 1$, *si et seulement si* $\sup_{n\geq 1}|\Theta(\lambda_n)| < 1$.

(2) *Si* $(\lambda_n)_n$ *vérifie la condition de Blaschke et que* B *est le produit de Blaschke associé, alors*

$$\overline{vect(k_{\lambda_n}:\ n\geq 1)} = \mathcal{K}_B.$$

Sinon, $\overline{vect(k_{\lambda_n}:\ n\geq 1)} = H^2$.

Définition 1.6.14. *On dit qu'une famille* $\{x_n\}_n$ *d'un espace de Hilbert* H *est une* ***base de Riesz*** *si la famille est totale et si il existe deux constantes* $0 < c \leq C < \infty$ *telles que pour toute suite* $(a_n)_n \in l^2$, *on a*

$$c\sum_n |a_n|^2 \leq \left\|\sum_n a_n x_n\right\|^2 \leq C\sum_n |a_n|^2.$$

Théorème 1.6.15. [**10**, p.177] *Soient* $\Lambda = (\lambda_n)_n \subset \mathbb{D}$, *de produit de Blaschke associé* B, *et* $\mathcal{X} = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (\frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|})_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille de noyaux reproduisants normalisée sur* H^2. *Alors,* $\mathcal{X}$ *est une base de Riesz dans* $\mathcal{K}_B$ *si et seulement si* Λ *satisfait la condition de Carleson :*

$$\exists\delta > 0,\ \forall k,\ \prod_{n\neq k}\frac{|\lambda_n - \lambda_k|}{|1-\overline{\lambda}_k\lambda_n|} > \delta.$$

6.3. Opérateurs de translation.

On définit pour $\tau \in \mathbb{R}$, les opérateurs de translation sur $L^2(\mathbb{R})$ par

$$\begin{array}{cccc} S_\tau : & L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & (x\mapsto f(x-\tau)) \end{array}.$$

$\{S_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ est un groupe d'opérateurs unitaires sur $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 1.6.16. *On dit qu'un sous-espace* $\mathcal{M} \subset L^2(\mathbb{R})$ *est* ***(translation)*** $2-$***invariant*** *(resp.* $1-$***invariant****) si* $S_\tau\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ *pour tout* $\tau \in \mathbb{R}$ *(resp. pour tout* $\tau \geq 0$, *mais pas pour tout* $\tau < 0$*).*

On remarque que l'image de l'opérateur de translation S_τ par transformation de Fourier est l'opérateur de multiplication par le caractère correspondant $e^{i\tau x}$:

$$S_\tau\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i(x-\tau)t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\tau t}f(t)e^{-ixt}dt = \mathcal{F}(e^{i\tau\cdot}f)(x)$$

pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$. Ainsi les groupes $\{S_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ et $\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ sont conjugués via transformée de Fourier. Cela nous permet d'introduir la définition suivante :

Définition 1.6.17. *On dit qu'un sous-espace* $\mathcal{M} \subset L^2(\mathbb{R})$ *est* ***(caractère)*** $2-$***invariant*** *(resp.* $1-$***invariant****) si* $e^{i\tau\cdot}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ *pour tout* $\tau \in \mathbb{R}$ *(resp. pour tout* $\tau \geq 0$, *mais pas pour tout* $\tau < 0$*).*

Lemme 1.6.18. *Soient* $u_\tau := exp(\tau\frac{z+1}{z-1})$, $\tau \in \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{M}$ *un sous-espace (fermé) de* $L^2(\mathbb{T})$. *Alors,* $\mathcal{M}$ *est* $2-$*invariant (resp.* $1-$*invariant) si et seulement si* $u_\tau\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ *pour tout* $\tau \in \mathbb{R}$ *(resp. pour tout* $\tau \geq 0$, *mais pas pour tout* $\tau < 0$*).*

Démonstration. Commençons par remarquer que si $b \in H^\infty$ et que si $\mathcal{M} \subset L^2(\mathbb{T})$ vérifie $z\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ alors $b\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. En effet, soit $f \in \mathcal{M}$. Par le théorème de convergence dominée et le théorème de Fatou, on a $\|bf - b_rf\|_2 \to 0$, $r \to 1$. Mais, la série de Taylor de b_r converge absolument sur $\mathbb{T}$ et par hypothèse, pour tout $n \geq 0$, $z^nf \in \mathcal{M}$ donc $b_rf \in \mathcal{M}$ et on en déduit (car $\mathcal{M}$ est fermé) que $bf \in \mathcal{M}$. De la même manière, si $\overline{z}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, alors $\overline{b}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. On utilise ce résultat pour montrer la condition nécessaire du lemme : il est clair que $u_\tau \in H^\infty$ pour $\tau \geq 0$ et comme $\overline{u}_\tau = u_{-\tau}$ sur $\mathbb{T}$, on a que $\overline{u}_\tau \in H^\infty$ pour $\tau < 0$. Par conséquent, si $\mathcal{M}$ est $1-$invariant alors nécessairement $u_\tau\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ pour $\tau \geq 0$, et si $\mathcal{M}$ est $2-$invariant, on a en plus que $u_\tau\mathcal{M} = \overline{\overline{u}}_\tau\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ pour $\tau < 0$.

Montrons maintenant la condition suffisante, pour cela posons $\phi_\tau := \frac{u_\tau-(1-\tau)}{u_\tau-(1+\tau)}$.

$$\phi_\tau = 1 + \frac{2\tau}{1+\tau}\cdot\frac{1}{\frac{u\tau}{1+\tau}-1} = 1 - \frac{2\tau}{1+\tau}\sum_{n\geq 0}(\frac{u_\tau}{1+\tau})^n,$$

la série convergeant uniformément pour $\tau > 0$ car $|u_\tau(z)| = 1$ sur $\mathbb{T}$. Il suit que $\phi_\tau\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Du développement limité $e^{\tau\omega} = 1 + \tau\omega + o(\tau),\ \tau \to 0^+$, on déduit que $\phi_\tau(\xi) \to \xi$, $\forall \xi \in \mathbb{T}\setminus\{1\}$. De plus,

$$|\phi_\tau(\xi)|^2 = \frac{(\mathrm{Re}(1-u_\tau(\xi)) - s)^2 + \mathrm{Im}(1-u_\tau(\xi))^2}{(\mathrm{Re}(1-u_\tau(\xi)) + s)^2 + \mathrm{Im}(1-u_\tau(\xi))^2} \leq 1$$

car $\mathrm{Re}(1-u_\tau(\xi)) \geq 0$. Par convergence dominée, on conclut que $z\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. En ce qui concerne le cas où $u_\tau\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ pour $\tau < 0$, on a que $\overline{u}_\tau\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ pour $\tau > 0$ et par le même argument que précédemment, on a $\overline{\phi}_\tau\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ ce qui permet de conclure que $\overline{z}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ et qui termine la démonstration. □

Théorème 1.6.19. *(P. Lax, 1959,* [**9**, p. 149]*)*
Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$.
(1) *$\mathcal{M}$ est (caractère) $2-$invariant si et seulement si il existe un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{M} = \chi_E L^2(\mathbb{R})$.*
(2) *$\mathcal{M}$ est (caractère) $1-$invariant si et seulement si il existe une fonction mesurable q, $|q| = 1$ telle que $\mathcal{M} = qH^2_+$.*

Démonstration. On vérifie facilement que $U_2^{-1}e^{i\tau\cdot}U_2 = u_\tau$. En effet,

$$U_2^{-1}e^{i\tau\cdot}U_2 f = U_2^{-1}(\frac{e^{i\tau z}}{\sqrt{\pi}(z+i)}f\circ\gamma^{-1}) = e^{i\tau\gamma(s)}f = u_\tau f.$$

Ainsi le lemme précédent affirme que $\mathcal{M}$ est (caractère) $2-$invariant ou $1-$invariant si et seulement si $U_2^{-1}\mathcal{M}$ est $2-$invariant ou $1-$invariant. Le résultat découle donc des théorèmes 1.6.2, 1.6.3 et 1.2.3. □

On en déduit immédiatement le

Corollaire 1.6.20. *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$.*
(1) *$\mathcal{M}$ est (translation) $2-$invariant si et seulement si il existe un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{M} = \mathcal{F}\chi_E L^2(\mathbb{R})$.*
(2) *$\mathcal{M}$ est (translation) $1-$invariant si et seulement si il existe une fonction mesurable q, $|q| = 1$ telle que $\mathcal{M} = \mathcal{F}qH^2_+$.*

6.4. Espaces de fonctions à valeurs vectorielles.

On rappelle que si F est un espace de Banach, alors $L^2(F) = L^2(\mathbb{T}, F)$ est l'espace des applications mesurables $f : \mathbb{T} \to F$ telles que

$$\int_{\mathbb{T}} \|f(\xi)\|_F^2\, dm(\xi) < \infty.$$

Commençons par introduire deux lemmes utiles pour la suite.

Lemme 1.6.21. *(*[**10**, p.19]*)*
Soient F un espace de Hilbert séparable et $A : L^2(F) \to L^2(F)$ un opérateur linéaire continu tel que $Az = zA$. Alors, il existe une unique fonction $a \in L^\infty(F \to F)$ telle que

$$Af(\xi) = a(\xi)f(\xi), \quad f \in L^2(F).$$

Lemme 1.6.22. *(Décomposition de Wold-Kolmogorov,* [**9**, p.11]*)*
Soient F un espace de Hilbert séparable, $V : F \to F$ une isométrie et E un sous-espace de F tel que $VE \subset E$. On note $D := E \ominus VE$. Alors, $V^nD \perp V^mD$, pour $m \neq n$, et on a la décomposition

$$E = \left(\sum_{n\geq 0} \oplus V^n D\right) \oplus \left(\bigcap_{n\geq 0} V^n E\right) = E_0 \oplus E_\infty.$$

Un cas particulier de cette décomposition est utilisé et démontré lors de la preuve de l'universalité des opérateurs de composition hyperboliques, c'est le lemme 2.3.7. Donnons maintenant l'énoncé analogue du théorème de Beurling, à valeurs vectorielles.

Théorème 1.6.23. *(Beurling-Lax à valeurs vectorielles,* [**9**, p.14]*)*
Soient F un espace de Hilbert séparable, $L^2(\mathbb{T}, F) = L^2(F)$ l'espace correspondant des fonctions de L^2 à valeurs dans F, et $\mathcal{M} \subset L^2(F)$ un sous-espace tel que $z\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Alors,

$$\mathcal{M} = \Theta H^2(\mathcal{D}) \oplus PL^2(F),$$

où $\mathcal{D}$ est un sous-espace $z-$invariant de $L^2(F)$, $\Theta \in L^\infty(\mathbb{T}, \mathcal{L}(\mathcal{D}, F))$ est une isométrie presque partout sur $\mathbb{T}$, $P(\xi) : F \to F$ mesurable sur $\mathbb{T}$ dont les valeurs sont des projections orthogonales et $H^2(\mathcal{D}) := \{f \in L^2(\mathcal{D}) : \hat{f}(k) = 0 \text{ pour } k < 0\}$.

Démonstration. Notons $\mathcal{M}_0 := \overline{\mathrm{vect}\{\mathcal{M}' \subset \mathcal{M} : z\mathcal{M}' = \mathcal{M}'\}}$. Il est alors clair que $\mathcal{M}_0$ est un sous-espace $2-$invariant maximal de $\mathcal{M}$, et en posant $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M} \ominus \mathcal{M}_0$, on obtient un sous-espace $\mathcal{M}_1$ qui est bien $z-$invariant (car $\mathcal{M}_1 \perp \mathcal{M}_0$ implique $z\mathcal{M}_1 \perp z\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0$) mais qui ne possède aucun sous-espace $2-$invariant. Notons P la projection orthogonale de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}_0$. En particulier, $\mathcal{M}_1 = \ker P$, et comme $\mathcal{M}_1$ est $z-$invariant, on a alors que $Pz = zP$: soit $f \in \mathcal{M}$ dont on écrit la décomposition orthogonale $f = f_0 + f_1$. On a alors $zPf = zf_0$ mais $Pzf = P(zf_0 + zf_1) = zf_0$ car $zf_1 \in \mathcal{M}_1$. Il suit que le lemme 1.6.21 nous donne l'existence d'une fonction $P(\cdot) \in L^\infty(F \to F)$ telle que $Pf(\xi) = P(\xi)f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{T}$. Mais alors, comme P est une projection, on a

$$P^2(\xi) = P(\xi) \text{ p.p } \xi \in \mathbb{T}$$

et de plus, comme P est une projection orthogonale, on a $\|P\| = 1$ et donc

$$\|P(\xi)\| \leq 1 \text{ p.p. } \xi \in \mathbb{T}.$$

On a bien le premier morceau de la décomposition souhaitée $\mathcal{M}_0 = PL^2(F)$.
Ecrivons maintenant la décomposition de Wold-Kolmogorov de $\mathcal{M}_1$, notant $\mathcal{D} = \mathcal{M}_1 \ominus z\mathcal{M}_1$:

$$\mathcal{M}_1 = \left(\sum_{n\geq 0} \oplus z^n \mathcal{D}\right) \oplus \left(\bigcap_{n\geq 0} z^n \mathcal{M}_1\right) = \mathcal{M}_{1,0} \oplus \mathcal{M}_{1,\infty}.$$

On remarque alors que $\mathcal{M}_{1,\infty}$ est $2-$invariant, ce qui implique donc que $\mathcal{M}_{1,\infty} = \{0\}$ et que $\mathcal{M}_1 = \sum_{n\geq 0} \oplus z^n\mathcal{D}$. Soit $f \in \mathcal{D}$. On a $f \perp z^n f$ pour tout $n \geq 1$, ce qui s'écrit

$$\int_{\mathbb{T}} \xi^n \langle f(\xi), f(\xi)\rangle_F dm(\xi) = 0, \qquad n \geq 1.$$

Par conjugaison, on a la même égalité pour $n < 0$. Ainsi $h(z) := \langle f(z), f(z)\rangle_F$ (qui vérifie $h(z) = \|f(z)\|_F^2 \in L^1(\mathbb{T})$) est constante presque partout sur $\mathbb{T}$ et $\|f(z)\|_F^2 = \|f\|_{L^2(F)}^2$. Par la formule de polarisation, on a

$$\forall f, g \in \mathcal{D}, \qquad \langle f(\xi), g(\xi)\rangle_F = \text{constante presque partout sur } \mathbb{T}.$$

Soit $(f_n)_n$ une base orthonormale de $\mathcal{D}$. Pour $f \in \mathcal{D}$, on note $\sigma_f \subset \mathbb{T}$ l'ensemble des points où f n'est pas défini ($m(\sigma_f) = 0$). On pose $\sigma_1 := \bigcup_{n\geq 1} \sigma_{f_n}$. Par ce qu'on a vu précédemment, on sait que $\langle f_m(\xi), f_n(\xi)\rangle_F = \delta_{mn}$ p.p.sur $\mathbb{T}$. On note donc, pour $m \neq n$, $\sigma_{m,n} \subset \mathbb{T}$ l'ensemble des points où cette égalité n'a pas lieu et on pose $\sigma_2 := \bigcup_{m\neq n} \sigma_{m,n}$. Enfin, on définit

$$\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2, \text{ et bien sûr } m(\sigma) = 0.$$

On peut alors définir, pour tout $\xi \in \mathbb{T} \setminus \sigma$, $\Theta(\xi) : \mathcal{D} \to F$ par

$$\Theta(\xi) f = f(\xi), \qquad f \in \mathcal{D}.$$

On va voir que Θ est définie presque partout sur $\mathbb{T}$, et c'est une isométrie presque partout. Soit $(a_k)_k \subset \mathbb{C}$ à support fini, et soit $\xi \in \mathbb{T} \setminus \sigma$. Alors,

$$\Theta(\xi) \sum_k a_k f_k = \sum_k a_k f_k(\xi)$$

et donc, comme $(f_k(\xi))_k$ est orthonormale dans F,

$$\begin{aligned}\left\|\Theta(\xi) \sum_k a_k f_k\right\|_F^2 &= \sum_k |a_k|^2 \|f_k(\xi)\|_F^2 = \sum_k |a_k|^2 \|f_k\|_{L^2(F)}^2 \\ &= \left\|\sum_k a_k f_k\right\|_{L^2(F)}^2 = \left\|\sum_k a_k f_k\right\|_{\mathcal{D}}^2\end{aligned}$$

Ainsi, $\Theta(\xi)$ est une isométrie de $\mathcal{D}$ dans F p.p. sur $\mathbb{T}$. On peut donc identifier $\Theta H^2(\mathcal{D})$ à $\mathcal{M}_1$, où pour $g = \sum g_n z^n \in H^2(\mathcal{D})$, $g(\xi) = \sum g_n \xi^n$ on a $(\Theta g)(\xi) = \Theta(\xi) g(\xi) = \sum g_n(\xi)\xi^n$, ce qui termine la démonstration. $\square$

CHAPITRE 2

Opérateurs de composition et sous-espace invariant

Dans ce second chapitre, nous allons établir quelques résultats à propos d'un certain type d'opérateurs agissant sur l'espace de Hardy H^2 appelés opérateurs de composition. Si $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est une application holomorphe du disque dans lui-même, l'opérateur de composition induit par ϕ est l'opérateur C_ϕ défini par $C_\phi(f) = f \circ \phi$. Il est bien connu que C_ϕ envoie continûment H^2 dans lui-même. Ce que nous allons montrer est que si ϕ est ce que l'on appelle un automorphisme hyperbolique, alors C_ϕ est universel, c'est à dire que tout opérateur continu sur un espace de Hilbert séparable est semblable à la restriction de C_ϕ à un certain sous-espace de H^2 (stable sous l'action de C_ϕ) . Nous verrons alors que ce résultat, établi en 1986 par E. Nordgren, P. Rosenthal & F.S Winrobe [**12**], permet de reformuler le problème du sous-espace invariant. En effet, tout opérateur sur n'importe quel espace de Hilbert séparable possède un sous-espace invariant si et seulement si il existe un opérateur de composition hyperbolique dont tous les sous-espaces invariants non triviaux minimaux sont de dimension 1. Ces opérateurs sont donc liés au problème du sous-espace invariant. De plus, ils sont également liés aux opérateurs de translation et de mutliplication sur $L^2(\mathbb{R})$ par leur treillis comme nous pourrons le constater au cours du chapitre suivant.

1. Généralités sur les opérateurs de composition

On note $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ et $\mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{D}$.

Définition 2.1.1. *Soit $\phi \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Alors,*

$$\begin{array}{rccc} C_\phi : & \mathcal{H}(\mathbb{D}) & \to & \mathcal{H}(\mathbb{D}) \\ & f & \mapsto & f \circ \phi \end{array}$$

est appelé ***opérateur de composition*** *associé à ϕ.*

On rappelle quelques résultats d'analyse complexe et harmonique, utilisés à plusieurs reprises dans la suite.

Lemme 2.1.2. *(Schwarz, [**2**, p. 156])*
Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ vérifiant $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ dans $\mathbb{D}$. Alors,
(1) *On a $|f(z)| \leq |z|$ pour tout point $z \in \mathbb{D}$ et de plus $|f'(0)| \leq 1$.*
(2) *Si $|f(a)| = |a|$ pour un certain $a \neq 0$, ou si $|f'(0)| = 1$, alors $f(z) \equiv \lambda z$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{T}$.*

Définition 2.1.3. *Soit $\Delta := D(z_0, r)$, $r > 0$, un disque (ouvert) de $\mathbb{C}$.*
(1) *On appelle* ***noyau de Poisson*** *du disque l'application*

$$\begin{array}{rccc} P : & \mathbb{D} \times \mathbb{T} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & (z, \xi) & \mapsto & \frac{1-|z|^2}{|z-\xi|^2} \end{array}$$

Le noyau de Poisson de Δ est alors défini par

$$\begin{array}{rccc} P_\Delta : & \Delta \times \partial\Delta & \to & \mathbb{R}^+ \\ & (z,\xi) & \mapsto & P(\frac{z-z_0}{r}, \frac{\xi-z_0}{r}) \end{array}$$

(2) *Soit $\phi \in L^1(\partial\Delta)$. L'**intégrale de Poisson** de ϕ est la fonction $P_\Delta\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par*

$$P_\Delta\phi(z) := \int_{\partial\Delta} P_\Delta(z,\xi)\phi(\xi)dm(\xi),$$

où, par abus de notation, m désigne encore la mesure de Lebesgue normalisée sur $\partial\Delta$.

(3) *Soit $\phi : \partial\Delta \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle **problème de Dirichlet** pour ϕ la recherche d'une fonction $u : \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ qui soit continue sur $\overline{\Delta}$, harmonique dans Δ et telle que $u_{|\partial\Delta} = \phi$.*

Proposition 2.1.4. *(Formule de Poisson)*
Avec les notations de la définition précédente,
(1) *Si $u : \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\overline{\Delta}$ et harmonique dans Δ, alors*

$$\forall z \in \Delta, \qquad u(z) = \int_{\partial\Delta} P_\Delta(z,\xi)u(\xi)dm(\xi).$$

(2) $h(z) := \begin{cases} \phi(z), & z \in \partial\Delta \\ P_\Delta\phi(z), & z \in \Delta \end{cases}$ *est solution du problème de Dirichlet pour ϕ.*

On peut alors, à l'aide des deux derniers résultats, montrer que tout opérateur de composition envoie H^2 continûment dans lui-même :

Théorème 2.1.5. *(Principe de subordination de Littlewood,* [**2**, p. 410]*)*
Soit $\phi \in \mathcal{H}(\mathbb{D},\mathbb{D})$. Alors, C_ϕ envoie continûment H^2 dans lui-même et on a $||C_\phi|| \leq \left(\frac{1+|\phi(0)|}{1-|\phi(0)|}\right)^{1/2}$.

Démonstration. On différencie plusieurs cas.
On commence par supposer que $\phi(0) = 0$. Soit $f \in H^2$. On définit $u := |f|^2$ et $v := |f \circ \phi|^2$. Soit $r < 1$ fixé. On note $h_r : \overline{D}(0,r) \to \mathbb{R}$ la solution du problème de Dirichlet pour $\overline{D}(0,r)$ et $u_{|\partial D(0,r)}$. Par le lemme de Schwarz, $|\phi(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, donc $\phi(\overline{D}(0,r)) \subset \overline{D}(0,r)$ et on peut donc définir $h_r \circ \phi$ qui est bien continue sur $\overline{D}(0,r)$. De plus, $h_r \circ \phi$ est harmonique (car $\Delta(h_r \circ \phi) = |\phi'|^2 \times ((\Delta u) \circ \phi) = 0)$, on peut donc écrire la propriété de la moyenne pour h_r et $h_r \circ \phi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} = h_r(0) = h_r \circ \phi(0) = \int_{-\pi}^{\pi} h_r \circ \phi(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}.$$

D'autre part, comme u est sous-harmonique, on a $u \leq h_r$ dans $\overline{D}(0,r)$, par la propriété du majorant harmonique. Par conséquent, $v = u \circ \phi \leq h_r \circ \phi$ sur $\partial D(0,r)$ ou encore

$$\int_{-\pi}^{\pi} h_r \circ \phi(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} \geq \int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}.$$

On en déduit donc que $\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} \geq \int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$, autrement dit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2\frac{d\theta}{2\pi} \geq \int_{-\pi}^{\pi} |f \circ \phi(re^{i\theta})|^2\frac{d\theta}{2\pi},$$

ceci étant vrai pour tout $r < 1$. En passant au sup, on a le résultat voulu.

Dans le deuxième cas, $\phi = \phi_a$ où $\phi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$. Un changement de variable permet de voir que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f \circ \phi_a|^2\frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}e^{i\theta}|^2}\frac{d\theta}{2\pi} \leq \frac{1+|a|}{1-|a|}||f||^2.$$

Enfin, si ϕ est quelconque, on peut écrire $\phi = \psi \circ \phi_a$, où $a = \phi(0)$ et $\psi(0) = 0$. □

Remarque 2.1.6. Si l'on suppose de plus que ϕ inversible, alors il est clair que C_ϕ l'est aussi et qu'on a $(C_\phi)^{-1} = C_{\phi^{-1}}$.

2. Opérateurs de composition hyperboliques

Définition 2.2.1. *Soit ϕ un automorphisme du disque, i.e $\phi(z) := \frac{az+\overline{c}}{cz+\overline{a}}$, avec $Re(a) > 0$ et $|a|^2 - |c|^2 = 1$. On dit que ϕ est **hyperbolique** si $|c| > |Im(a)|$.*

Dans ce cas, on vérifie que ϕ possède deux **points fixes** z_+ et z_- sur $\mathbb{T}$ tels que

$$z_\pm = \frac{1}{c}(\pm\sqrt{|c|^2 - |\mathrm{Im}(a)|^2} + i\mathrm{Im}(a)).$$

Naturellement, ϕ est inversible et

$$\phi^{-1}(z) = \frac{\overline{a}z - \overline{c}}{-cz + a}.$$

On définit alors

$$\begin{array}{rccc} \beta : & \overline{\mathbb{D}} & \to & \mathbb{C}^+ \\ & z & \mapsto & e^{i\theta}(\frac{z-z_-}{z-z_+}) \end{array}$$

où θ est choisi de sorte que $\beta(\mathbb{T}) = \mathbb{R}$. Posant

$$K := \frac{a - cz_-}{a - cz_+} = \frac{\mathrm{Re}(a) + \sqrt{|c|^2 - |\mathrm{Im}(a)|^2}}{\mathrm{Re}(a) - \sqrt{|c|^2 - |\mathrm{Im}(a)|^2}} \qquad (K > 1),$$

on constate que

$$\frac{\phi(z) - z_-}{\phi(z) - z_+} = \frac{(a - cz_-)z - (\overline{a}z_- - \overline{c})}{(a - cz_+)z - (\overline{a}z_+ - \overline{c})} = K\frac{z - \phi^{-1}(z_-)}{z - \phi^{-1}(z^+)} = K\frac{z - z_-}{z - z_+},$$

ce qui s'écrit encore

$$\beta \circ \phi = K\beta.$$

C'est alors qu'en intoduisant

$$\omega := \gamma^{-1} \circ \beta,$$

où γ a été défini au chapitre 1, section 2.2, et en posant

$$\psi := \omega \circ \phi \circ \omega^{-1} = \gamma^{-1} \circ KId \circ \gamma,$$

on trouve que

$$\psi(z) = \gamma^{-1}(Ki \cdot \frac{1+z}{1-z}) = \frac{K + Kz - 1 + z}{K + Kz + 1 - z} = \frac{z(K+1) + K - 1}{K + 1 + (K-1)z} = \frac{z + r}{1 + rz},$$

où

$$r := \frac{K-1}{K+1}.$$

Ainsi, $C_\psi = C_\omega \circ C_\phi \circ C_\omega^{-1}$ et donc C_ψ et C_ϕ sont **semblables**. On va donc montrer tous les résultats souhaités pour C_ψ. On remarque que les deux points fixes de ψ sont -1 et 1.

Théorème 2.2.2. *Dans le cas d'un automorphisme hyperbolique ϕ, avec les notations précédentes, on a $\sigma(C_\phi) = \{K^{-\frac{1}{2}} \leq |z| \leq K^{\frac{1}{2}}\}$. De plus, $\{K^{-\frac{1}{2}} < |z| < K^{\frac{1}{2}}\} \subset \sigma_p(C_\phi)$.*

DÉMONSTRATION. Notons $V := \{K^{-\frac{1}{2}} \leq |z| \leq K^{\frac{1}{2}}\}$. Comme $||C_\psi|| \leq (\frac{1+r}{1-r})^{\frac{1}{2}} = K^{\frac{1}{2}}$, on en déduit $\sigma(C_\phi) \subset \{|z| \leq K^{\frac{1}{2}}\}$. Mais, $\psi^{-1}(z) = \frac{z-r}{1-rz}$ et donc $||C_\psi^{-1}|| \leq K^{\frac{1}{2}}$, ce qui nous donne, par le théorème de l'image spectrale (C_ψ étant inversible, $0 \notin \sigma(C_\psi)$ et ainsi $z \mapsto \frac{1}{z}$ est bien holomorphe au voisinage de $\sigma(C_\psi)$ qui est compact), que $\sigma(C_\phi) \subset V$. Réciproquement, soit $\lambda \in \overset{\circ}{V}$. Alors on peut écrire $\lambda = K^{\alpha+i\Theta}$, où

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} \\ 0 \leq \Theta < \frac{2\pi}{\log K} \end{cases} .$$

Prenons une détermination du log holomorphe dans $\mathbb{C}^+$ et posons

$$f := \exp((\alpha + i\Theta)\log\gamma).$$

Le théorème 1.2.2 implique que f ainsi définie est dans H^2, en effet $f = U_2^{-1}g$ où $g = \frac{z^{\alpha+i\Theta}}{\sqrt{\pi}(z+i)} \in H^2_+$ car $|g(x+iy)|^2 \leq cx^{2(\alpha-1)}$ et $2(\alpha-1) < -1$. De plus, sachant que $\frac{r+1}{r-1} = -K$, on trouve que

$$\gamma \circ \psi(z) = i(\frac{1+rz+z+r}{1+rz-z-r}) = i(\frac{r+1}{r-1} \cdot \frac{1+z}{z-1}) = K\gamma(z).$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned} C_\psi f &= \exp((\alpha+i\Theta)\log(\gamma\circ\psi)) = \exp((\alpha+i\Theta)\log K\gamma) \\ &= \exp((\alpha+i\Theta)(\log K + \log\gamma)) = K^{\alpha+i\Theta}\exp((\alpha+i\Theta)\log\gamma) \\ &= \lambda f \end{aligned}$$

et donc λ est valeur propre de C_ψ, ce qui implique que

$$\overset{\circ}{V} \subset \sigma_p(C_\psi) \subset \sigma(C_\psi) \subset V,$$

et termine la démonstration, car $\sigma(C_\psi)$ est compact.

□

3. Universalité et conséquence

Nous gardons toutes les notations de la section précédente et utilisons à plusieurs reprises les résultats obtenus au chapitre 1, section 6.2, à propos des espaces modèles $\mathcal{K}_\Theta$. Introduisons quelques objets dont l'utilisation sera nécessaire pour la suite.

On définit

$$\psi^{(n)} := \begin{cases} Id \text{ si } n = 0, \\ \psi \circ \psi^{(n-1)} \text{ si } n \geq 1 \\ \psi^{-1} \circ \psi^{(n+1)} \text{ si } n \leq -1 \end{cases} ,$$

et on pose $z_n := \psi^{(n)}(0)$. Ainsi, $z_0 = 0$ et, si $n \neq 0$, une récurrence immédiate aboutit à

$$z_n = \frac{K^n - 1}{K^n + 1}.$$

On remarque alors que $z_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et que $z_{-n} = -z_n$. On en déduit les deux formules suivantes, valables pour $n \neq 0$,

$$\psi^{(n)}(z) = \frac{z+z_n}{1+z_n z} = \frac{z - z_{-n}}{1 - z_{-n}z} = \text{signe}(-n) b_{z_{-n}} \tag{1}$$

(2)
$$\psi^{(n)}(z) - z_n = (1-|z_n|^2)\frac{z}{1-z_{-n}z}$$

En effet, comme $z_1 = r$, la formule (1) est vraie pour $n = 1$. Soit $n \geq 1$,

$$\psi^{(n+1)} = \psi \circ \psi^{(n)} = \frac{\psi^{(n)} + r}{1 + r\psi^{(n)}} = \frac{z + z_n + r + rz_n z}{1 + z_n z + rz + z_n r} = \frac{(1+rz_n)z + (z_n + r)}{(1+rz_n) + (z_n + r)z} = \frac{z + z_{n+1}}{1 + z_{n+1}z}.$$

On fait la même chose avec ψ^{-1} pour les $n < 0$. La formule (2) s'obtient trivialement à partir de la (1).

Soient maintenant B le produit de Blaschke associé à $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et $T : H^2 \to H^2$ l'opérateur de multiplication par B^2. Comme $|B| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$, T est une isométrie.

Lemme 2.3.1. *$B \circ \psi = -B$.*

Démonstration. D'après la formule (1), on peut écrire $B = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n \psi^{(n)}$ où $\lambda_n = \text{signe}(n)$.
Il suit que $B \circ \psi = \prod \lambda_n \psi^{(n+1)} = (\prod \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}) \prod \lambda_{n+1}\psi^{(n+1)} = (\prod \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}})B$.
Or, $\prod \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = \frac{\lim_{n\to-\infty}\lambda_n}{\lim_{n\to\infty}\lambda_n} = -1$. □

Définition 2.3.2. *Soient X un espace de Hilbert (séparable) et $U \in \mathcal{L}(X)$. On dit que U est **universel** si pour tout opérateur linéaire continu R sur un espace de Hilbert (séparable) H, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{M}$ sous-espace fermé de X, stable par U, tels que λR est semblable à la restriction de U à $\mathcal{M}$.*

Un critère d'universalité est le théorème suivant, dû à Caradus :

Théorème 2.3.3. *(Caradus, [**3**])*
Soit X un espace de Hilbert séparable et $S \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que
(i) $\dim$ *$Ker(S) = \infty$,*
(ii) $Im(S) = X$.
Alors, S est universel.

On va utiliser ce résultat pour montrer le théorème suivant :

Théorème 2.3.4. *Soient ϕ un automorphisme hyperbolique et $\lambda \in \sigma(\overset{\circ}{C_\phi})$. Alors, $C_\phi - \lambda$ est universel.*

Démonstration. On prouve évidemment le théorème pour C_ψ. Il est facile de montrer que le noyau de $C_\psi - \lambda$ est de dimension infinie. En effet, nous avons déjà vu que si λ est à l'intérieur du spectre de C_ψ, alors λ est valeur propre. Soit $f \in H^2$, vecteur propre non nul associé à λ. D'après le lemme 2.3.1, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_\psi(B^{2n}f) = (-1)^{2n}B^{2n}C_\psi(f) = \lambda B^{2n}f$, ce qui s'écrit encore $B^{2n}f \in \text{Ker}(C_\psi - \lambda)$, $n \in \mathbb{N}$. Or, la famille $\{B^{2n}f\}_{n\geq 0}$ est libre : supposons qu'il existe une partie finie $J = \{j_1, .., j_p\} \subset \mathbb{N}$ (on peut supposer $p \geq 2$) et des scalaires non nuls $(\alpha_j)_{j\in J}$ tels que $\sum_{j\in J} \alpha_j B^{2j} f = 0$. Alors, $B^{j_1}(\alpha_{j_1} f + \sum_{n=2}^p \alpha_{j_n} B^{2(j_n - j_1)} f) = 0$. Ceci implique, par le principe des zéros isolés, que $f = \sum_{n=2}^p \frac{\alpha_{j_n}}{\alpha_{j_1}} B^{2(j_n - j_1)} f$. En particulier, cette égalité affirme que f a un zéro de mutiplicité infinie en 0. C'est une contradiction avec le fait que $f \neq 0$. La famille est donc bien libre et le noyau de dimension infinie.

La partie importante de la preuve concerne la surjectivité de $C_\psi - \lambda$. Elle s'obtient à partir de plusieurs lemmes.

Lemme 2.3.5. *Soit* $V := \overline{Vect\{\psi^{(n)};\ n \in \mathbb{Z}\}}$. *Alors,* $V = \mathcal{K}_{zB}$ *(ce qui impliquera en particulier la stabilité de* $\mathcal{K}_{zB}$ *sous l'action de* C_ψ*).*

DÉMONSTRATION. Par la formule du noyau reproduisant, si $w \in \mathbb{D}$ et si $f \in H^2$, on a que $\langle f, \frac{1}{1-\overline{\omega} z}\rangle = f(\omega)$. De plus, la multiplication par z étant une isométrie de H^2, on trouve que $\langle zf, \frac{z}{1-z_{-n}z}\rangle = f(z_{-n})$. Il suit que, si $f = Bg$, où $g \in H^2$, alors $\langle zf, \frac{z}{1-z_{-n}z}\rangle = 0$, ou encore $\frac{z}{1-z_{-n}z} \in \mathcal{K}_{zB}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Mais alors, du fait que $\mathcal{K}_{zB}$ contient les constantes (car z divise zB) et de la formule (2), on en déduit que $\psi^{(n)} \in \mathcal{K}_{zB}$ et donc $V \subset \mathcal{K}_{zB}$. Réciproquement, toujours grâce à (2), on constate que $\lim_{n\to\infty} \left\|\psi^{(n)} - z_n\right\| = 0$ et donc que $\psi^{(n)}$ converge vers 1 dans H^2. Autrement dit, V contient les constantes. Soit alors $f \in H^2$, $f \perp \psi^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$. En particulier, $f \perp \psi^{(0)} = z$. Le fait que f soit orthogonale à la fois aux constantes et à z implique que z^2 divise f dans H^2. De plus, en utilisant la formule (2) et le fait que f soit orthogonale aux constantes, on obtient, pour $n \neq 0$,

$$\frac{f(z_{-n})}{z_{-n}} = \langle f, zk_{z_{-n}}\rangle = \langle f, \frac{z}{1-z_{-n}z}\rangle = 0.$$

Par conséquent, f est également multiple de zB, *i.e* $f \perp \mathcal{K}_{zB}$. Donc $\mathcal{K}_{zB} = V$. □

Lemme 2.3.6. $(C_\psi \pm \lambda)\mathcal{K}_{zB} = \mathcal{K}_{zB}$.

DÉMONSTRATION. L'idée de la preuve est de décomposer $\mathcal{K}_{zB}$ en $\mathcal{K}_{zB} = \mathbb{C} \oplus L$, sachant que C_ψ est l'identité sur les constantes, et de voir qu'en notant P la projection orthogonale de $\mathcal{K}_{zB}$ sur L, on a que $P \circ C_{\psi|L}$ est semblable à un shift bilatéral avec un certain poids et d'utiliser des résultats connus sur les shifts.

On commence pour cela à montrer que la famille $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, où $g_n := \frac{(1-|z_{-n}|^2)^{\frac{1}{2}}}{1-z_{-n}z}$, est une base de Riesz grâce au théorème 1.6.15.

Par la formule (1), $\frac{|z_n - z_k|}{|1-\overline{z}_k z_n|} = |\psi^{(-k)}(z_n)| = |z_{n-k}|$ il suffit donc de montrer que $\prod_{n\geq 1}|z_n| > 0$, ou encore de manière équivalente que $\sum(1-|z_n|) < \infty$. On trouve $1 - |z_n| = \frac{2}{K^{|n|}+1} \leq \frac{2}{K^{|n|}}$, qui est bien le terme général d'une série convergente car $K > 1$. Ainsi, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de Riesz, c'est à dire est semblable à une famille orthonormale.

Montrons maintenant ce que l'on a annoncé précédemment, c'est à dire que $C_{\psi|\mathcal{K}_{zB}} = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & W \end{pmatrix}$, où W est semblable à un shift bilatéral de poids $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par $w_n := K^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{K^n+1}{K^{n+1}+1}$.

$W = PC_{\psi|\mathcal{K}_{zB}}$ et $C_{\psi|\mathbb{C}} = Id$ ce qui implique en particulier que $C_\psi(Id - P) = Id - P$. Il s'en suit que

$$W(P\psi^{(n)}) = PC_\psi P\psi^{(n)} = PC_\psi\psi^{(n)} = P\psi^{(n+1)}.$$

En posant alors

$$\begin{cases} f_n := \frac{1}{||P\psi^{(n)}||}P\psi^{(n)} \\ \\ w_n := \frac{||P\psi^{(n+1)}||}{||P\psi^{(n)}||} \end{cases},$$

on obtient clairement que $Wf_n = w_n f_{n+1}$. Par (2), on constate d'abord que $\psi^{(n)} - z_n \perp \mathbb{C} = \ker P$ ce qui entraîne $P\psi^{(n)} = \psi^{(n)} - z_n$ et ensuite que

$$||P\psi^{(n)}|| = (1-|z_{-n}|^2)\left\|\frac{z}{1-z_{-n}z}\right\| = (1-|z_{-n}|^2)(1-|z_{-n}|^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-|z_{-n}|)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalement, on obtient $f_n = (1-|z_{-n}|^2)^{\frac{1}{2}} \frac{z}{1-z_{-n}z}$. De ce qu'on a vu précédemment concernant la famille $\{g_n\}$, et du fait que la mutiplication par z soit une isométrie, $\{f_n\}$ est bien semblable à une famille orthonormale. Il reste à vérifier que w_n est égal à la formule annoncée. On rappelle que $z_n = \frac{K^n-1}{K^n+1}$, et donc $1-|z_n|^2 = 4\frac{K^n}{(K^n+1)^2}$.

$$\begin{aligned} w_n = & \left(\frac{K^{-n-1}}{(K^{-n-1}+1)^2} \cdot \frac{(K^{-n}+1)^2}{K^{-n}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ = & \left(K^{-1} \cdot \frac{K^{-2n}(1+K^n)^2}{K^{-2(n+1)}(1+K^{n+1})^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ = & K^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{K^n+1}{K^{n+1}+1}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser des résultats sur les shifts bilatéraux :

Proposition. **[14, 15]** *Soit S un shift bilatéral (à gauche) de poids $\{d_n\}$ avec $lim_{n\to\pm\infty} = d^{\pm}$.*
On désigne par $\pi(S)$ l'ensemble des valeurs propres approximatives de S, i.e $\mu \in \pi(S)$ si $\forall \epsilon > 0$, il existe x de norme 1 tel que $||Sx-\mu x|| < \epsilon$. On suppose que S est injectif. Alors, on est dans l'un des deux cas suivants.
(1) *Si $d^- < d^+$ on est dans le cas où*
(1*i*) $\sigma_p(S) = \emptyset$,
(1*ii*) $\pi(S) = \{|z| = d^-\} \cup \{|z| = d^+\}$.
(2) *Sinon, on a*
(2*i*) $\{d^+ < |z| < d^-\} \subset \sigma_p(S) \subset \{d^+ \leq |z| \leq d^-\}$,
(2*ii*) $\pi(S) = \{d^+ \leq |z| \leq d^+\}$.

W est semblable à un shift bilatéral (à gauche) de poids $\{w_n\}$, que l'on note encore W pour ne pas alourdir la démonstration. Comme tous les poids w_n sont non nuls, W est bien injectif et $\lim_{n\to\pm\infty} = K^{\mp\frac{1}{2}}$. On est dans le cas (2). En particulier, $\lambda \in \sigma_p(W)$, ce qu'on utilisera ci-après. On veut montrer que $\overline{\lambda} \notin \pi(W^\star)$. On a

$$We_n = w_n e_{n+1} \text{ et } W^\star e_n = w_{n-1}e_{n-1}$$

donc si l'on pose $\tilde{e}_n := e_{-n}$, on obtient une nouvelle base orthonormée $\{\tilde{e}_n\}$ telle que $W^\star\tilde{e}_n = \tilde{w}_n\tilde{e}_{n+1}$ où $\tilde{w}_n = w_{-(n+1)}$. Ainsi, $W^\star$ est un shift bilatéral (à gauche) de poids $\{\tilde{w}_n\}$. Or, $\lim_{n\to\pm\infty}\tilde{w}_n = K^{\pm\frac{1}{2}}$ et on est donc dans le cas (1). Par conséquent,

$$\pi(W^\star) = \{|z| = K^{\frac{1}{2}}\} \cup \{|z| = K^{-\frac{1}{2}}\} = \partial\sigma(C_\psi),$$

en particulier $\overline{\lambda} \notin \pi(W^\star)$, ce qui nous donne $\epsilon > 0$ tel que $\forall x$

$$||(W^\star - \overline{\lambda})x|| \geq \epsilon ||x||.$$

C'est un critère de surjectivité pour $W-\lambda$. Ainsi, $(W-\lambda)L = L$. Il reste à montrer que les constantes sont dans $(C_\psi - \lambda)\mathcal{K}_{zB}$. En effet, si c'est le cas,

$$\mathcal{K}_{zB} = \mathbb{C} \oplus L = \mathbb{C} \oplus (W-\lambda)L \subset (C_\psi - \lambda)K_0,$$

et la démonstration est terminée. Distinguons alors deux cas :

– $\lambda \neq 1$. C'est trivial dans ce cas, puisque $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = (C_\psi - \lambda)(\frac{\alpha}{1-\lambda})$.

– $\lambda = 1$. Il suffit de montrer que si $h \in L \setminus \{0\}$ est tel que $Wh = h$, alors $Xh \neq 0$. En effet, le $(2i)$ de la proposition précédente, appliqué cette fois à W, implique que $\lambda = 1$ est valeur propre de W et en prenant h un vecteur propre non nul associé à 1, comme par hypothèse $Wh \neq 0$, quelque soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $\alpha = (C_\psi - 1)(\frac{\alpha}{Xh}h)$.

Supposons donc qu'il existe $h \in L$, $h \neq 0$ tel que $Wh = h$ et $Wh = 0$. Alors, $h \circ \psi = h$ et donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $h(z_n) = h(0) = 0$ car $h \in L$. Il s'en suit que B divise h dans H^2 et donc $zh \perp \mathcal{K}_{zB}$. D'autre part, la multiplication par zB étant une isométrie, on a

$$H^2 = \mathcal{K}_{zB} \oplus zB(\mathbb{C} \oplus zH^2) = \mathbb{C} \oplus L \oplus zB\mathbb{C} \oplus z^2BH^2$$

car $H^2 = \mathbb{C} \oplus zH^2$ et $\mathcal{K}_{zB} = \mathbb{C} \oplus L$. Etant clair que $\mathbb{C}^\perp \cap \mathcal{K}_{z^2B} = z\mathcal{K}_{zB}$, on déduit de cette décomposition que $z\mathcal{K}_{zB} = L \oplus zB\mathbb{C}$. Ainsi

$$zh \in z\mathcal{K}_{zB} \cap \mathcal{K}_{zB}^\perp = (L \oplus zB\mathbb{C}) \cap (zBH^2) = zB\mathbb{C}.$$

Donc $zh = \alpha zB$ ou encore $h = \alpha B$. Mais alors $B \circ \psi = -B$ implique que $\alpha = 0$ et on a bien $h = 0$.

Dans les deux cas possibles les constantes sont dans $(C_\psi - \lambda)\mathcal{K}_{zB}$ et on peut alors conclure que $(C_\psi - \lambda)\mathcal{K}_{zB} = \mathcal{K}_{zB}$. □

Lemme 2.3.7. $H^2 = \bigoplus_{n\geq 0} B^{2n}\mathcal{K}_{B^2}$.

Démonstration. On rappelle que T désigne l'opérateur de multiplication par B^2. Comme $TB^2H^2 \subset B^2H^2$, on a clairement $T^n\mathcal{K}_{B^2} \perp T^m\mathcal{K}_{B^2}$ si $n \neq m$. Prenons alors $f \perp T^n\mathcal{K}_{B^2}$, $\forall n \geq 0$. Cette dernière hypothèse appliquée pour $n = 0$ nous donne que $f \perp \mathcal{K}_{B^2}$, ou encore $f \in TH^2$. On écrit donc $f = Tf_1$. Réappliquons encore l'hypothèse avec $n = 1$, on a $Tf_1 \perp T\mathcal{K}_{B^2}$, mais T étant une isométrie, on a $f_1 \perp \mathcal{K}_{B^2}$, donc $f = T^2f_2$. Par une récurrence immédiate, on trouve que

$$\forall n \geq 0,\ \exists f_n \in H^2,\ f = T^nf_n.$$

f a donc un zéro d'ordre infini en 0, ce qui implique que $f = 0$ et termine la démonstration. □

Lemme 2.3.8. *On introduit maintenant $K := \mathcal{K}_{zB} + B\mathcal{K}_{zB}$. Alors,*
(i) $\mathcal{K}_{B^2} \subset K$,
(ii) $T^{2n}K \perp T^{2m}K$ si $|n - m| \geq 2$.

Démonstration. Afin de prouver (i), on commence par remarquer que $K = \mathcal{K}_{zB^2}$.
En effet, comme $H^2 = \mathcal{K}_{zB} \oplus zBH^2$ et que B est une isométrie, on a que $BH^2 = B\mathcal{K}_{zB} \oplus zB^2H^2$, et ainsi $H^2 = \mathcal{K}_B \oplus B\mathcal{K}_{zB} \oplus zB^2H^2$. Mais, $zBH^2 \subset BH^2$ et donc $\mathcal{K}_B \subset \mathcal{K}_{zB}$ ce qui implique que $\mathcal{K}_{zB^2} = \mathcal{K}_B \oplus B\mathcal{K}_{zB} \subset \mathcal{K}_{zB} + B\mathcal{K}_{zB} = K$. D'autre part,

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{K}_{zB} \perp zB^2H^2 \\ B\mathcal{K}_{zB} \perp zB^2H^2 \end{array}\right\} \Rightarrow K \perp zB^2H^2 \text{ et donc } K \subset \mathcal{K}_{zB^2},$$

ce qui montre $K = \mathcal{K}_{zB^2}$. Etant clair que $\mathcal{K}_{B^2} \subset \mathcal{K}_{zB^2}$, on a bien $\mathcal{K}_{B^2} \subset K$.
Comme z divise B dans H^2, il suit que si $k \geq 3$, alors $B^kK \subset zB^2H^2$. Ainsi, si $|n - m| \geq 2$ et $f, g \in K$, (en supposant par exemple que $n \geq m$), on a $\langle B^{2n}f, B^{2m}g\rangle = \langle B^{2(n-m)}f, g\rangle = 0$ car $2(n - m) \geq 4$. □

On est maintenant en mesure de conclure à la surjectivité de $C_\psi - \lambda$ sur H^2. Posons $M := \bigoplus_{n\geq 0} B^{4n}K$ et $N := \bigoplus_{n\geq 0} B^{4n+2}K$. Les deux précedents lemmes affirment que $H^2 = M + N$. Mais nous allons voir que $(C_\psi - \lambda)M = M$ et $(C_\psi - \lambda)N = N$, ce qui permet de conclure. Montrons alors la première égalité, la preuve de la seconde étant exactement la même. On sait que $(C_\psi \pm \lambda)\mathcal{K}_{zB} = \mathcal{K}_{zB}$, donc par le lemme 2.3.1, $(C_\psi \pm \lambda)B\mathcal{K}_{zB} = -B(C_\psi \mp \lambda)\mathcal{K}_{zB} = -B\mathcal{K}_{zB} = B\mathcal{K}_{zB}$. Par une récurrence immédiate, on a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (C_\psi \pm \lambda)B^k K = B^k K.$$

Soit alors $f = \sum_{n\geq 0} B^{4n}k_n \in M$. Comme $B^{4n}h_n \perp B^{4m}h_m$ pour $n \neq m$ (par le (ii) du lemme 2.3.8), l'égalité de Parseval donne $\sum_{n\geq 0} ||k_n||^2 = ||f||^2 < \infty$, mais $\forall n \geq 0,\ \exists h_n \in K,\ (C_\psi - \lambda)B^{4n}h_n = B^{4n}k_n$, et donc $\sum_{n\geq 0} ||h_n||^2 \leq C\sum_{n\geq 0} ||k_n||^2 < \infty$, $g := \sum_{n\geq 0} B^{4n}h_n$ est bien définie et vérifie $f = (C_\psi - \lambda)g$. □

Du théorème 2.3.4 découle le corollaire suivant, reformulation du problème du sous-espace invariant.

Corollaire 2.3.9. *Tout opérateur continu sur un espace de Hilbert séparable possède un sous-espace invariant non trivial si et seulement si il existe un opérateur de composition hyperbolique dont tous les sous-espaces invariants non nuls minimaux sont de dimension* 1.

Démonstration. Supposons pour commencer que tout opérateur possède un sous-espace invariant. Soient C_ϕ un opérateur de compostion hyperbolique et M un sous-espace fermé non nul, invariant et minimal. Si $\dim(M) > 1$, $C_{\phi|M}$ étant un opérateur continu sur un espace de Hilbert séparable de dimension strictement supérieure à 1, il possède un sous-espace invariant non trivial $N \subset M$. C'est une contradiction.

Réciproquement, supposons que tout sous-espace non nul invariant minimal de C_ϕ soit de dimension 1. Soit T est un opérateur continu sur un espace de Hilbert séparable quelconque et soit λ à l'intérieur du spectre de C_ϕ. Par le théorème précédent, il existe M un sous-espace invariant sous C_ϕ tel que αT est semblable à $(C_\phi - \lambda)_{|M}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}$. Mais alors M ne peut pas être de dimension 1 et n'est donc pas minimal donc il existe $N \subsetneq M$ sous-espace, invariant sous $C_\phi - \lambda$. Par conséquent, T possède un sous-espace invariant. □

Ce résultat motive alors l'étude des sous-espaces (non nuls) invariants minimaux de C_ϕ et plus généralement du treillis de C_ϕ. On se rend tout de suite compte que tout sous-espace (non nul) invariant minimal sous C_ϕ doit être cyclique, c'est à dire de la forme

$$\overline{\mathrm{vect}\{C_\psi^{(n)}f :\ n \in \mathbb{Z}\}}$$

pour $f \in H^2$. La section suivante présente des conditions nécessaires et suffisantes qu'une fonction f intérieure doit vérifier pour que ce dernier espace soit minimal.

D'autre part, nous allons voir au chapitre suivant que l'on a une inclusion d'une famille de sous-espaces paramétrisable dans le treillis de C_ϕ. Cependant, cette inclusion étant stricte, cela ne nous permettra pas a priori de résoudre plus facilement le problème du sous-espace invariant.

4. Sous-espaces invariants minimaux pour opérateurs de composition hyperboliques

Les résulats que nous présentons dans cette section sont dûs à V. Matache [**11**]. On considère dans toute la suite un automorphisme hyperbolique ϕ et C_ϕ l'opérateur de composition associé.

Définition 2.4.1. *Si $f \in H^2$, on appelle* ***espace cyclique*** *engendré par f le sous-espace fermé*

$$V_f := \overline{vect\{C_\psi^{(n)} f : \ n \in \mathbb{Z}\}}.$$

Proposition 2.4.2. *Soit $\alpha \in \mathbb{T}$ l'un des points fixes de ϕ. On suppose que $f(e^{i\theta})$ se prolonge par continuité en α et que $f(\alpha) \neq 0$. Alors, V_f est minimal si et seulement si f est constante.*

Pour démontrer cette proposition, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4.3. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f \circ \phi)(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) P_{\phi(0)}(\theta) \frac{d\theta}{2\pi},$$

où $P_z(\theta) = P(z, e^{i\theta})$.

Démonstration. On commence par prouver que $m\phi^{-1}$ et $P_{\phi(0)}$ ont les mêmes coefficients de Fourier. En effet, pour $n \geq 0$

$$(m\phi^{-1})\hat{}(-n) = \int_{\mathbb{T}} z^n dm\phi^{-1}(z) = \int_{\mathbb{T}} \phi^n dm = \lim_{r \to 1} \int_{\partial D(0,r)} \phi^n dm = \lim_{r \to 1} \phi(0)^n = \phi(0)^n.$$

D'autre part,

$$\hat{P}_{\phi(0)}(-n) = \int_{\mathbb{T}} z^n P_{\phi(0)} dm = \phi(0)^n$$

par la formule de Poisson appliquée à z^n. Donc $m\phi^{-1}$ et $P_{\phi(0)}$ ont les mêmes coefficients de Fourier négatifs, mais en passant au conjugué, on a les égalités pour $n \in \mathbb{Z}$ d'où le résultat annoncé. Un changement de variables permet alors d'obtenir l'égalité souhaitée. □

Montrons maintenant la proposition. Comme on l'a fait tout au long de ce chapitre, on montre les résultats en considérant

$$\psi(z) = \frac{z + r}{1 + rz}, \quad r < 1$$

dont les points fixes sont 1 et -1. Les notations sont gardées, en particulier $z_n = \psi^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et on rappelle que $z_n \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

Démonstration. On commence par le cas où $\alpha = 1$. On désigne par $\mathcal{C}$ le sous-espace de $L^2(\mathbb{T})$ formé des fonctions constantes. On a

$$\begin{aligned} \left\| C_\psi^{(n)} f - f(1) \right\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(\psi^{(n)}(e^{i\theta})) - f(1)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |(f - f(1)) \circ \psi^{(n)}(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) - f(1)|^2 P_{z_n}(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue à partir du lemme précédent. Soit alors $\epsilon > 0$ fixé. Par hypothèse de continuité de f en 1, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\theta| \leq \delta \Rightarrow |f(e^{i\theta}) - f(1)|^2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

D'autre part, $P_{z_n}(\theta) \leq P_{z_n}(\delta)$ si $|\theta| > \delta$ et $P_{z_n}(\delta) \to 0$. En particulier, il existe N tel que

$$n \geq N \Rightarrow P_{z_n}(\delta) \, \|f - f(1)\|^2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Comme, par la formule de Poisson, $\int_{-\pi}^{\pi} P_{z_n}(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} = 1$, on en déduit que $C_\psi^{(n)}f$ tend vers $f(1)$ dans H^2 et ainsi $\mathcal{C} \subset V_f$. Il suit que si $f \notin \mathcal{C}$ alors V_f n'est pas minimal.

Dans le cas où $\alpha = -1$, on introduit la transformation $\omega(z) = -z$ pour $z \in \mathbb{D}$. Alors, $\omega = \omega^{-1}$ et $\omega \circ \psi^{-1} \circ \omega = \psi$. Par conséquent, $\psi^{(n)} = \omega \circ \psi^{(-n)} \circ \omega$. Si $g = f \circ \omega$, alors $f \circ \psi^{(n)} = C_\omega(g \circ \psi^{(-n)})$ et par hypothèse g est prolongeable par continuité en 1. En remplaçant ψ par ψ^{-1} dans le cas précédent, on trouve que $g \circ \psi^{(-n)}$ tend vers $g(1) = f(-1) \neq 0$ dans H^2. Il suit que $f \circ \psi^{(n)}$ tend vers $C_\omega f(-1) = f(-1)$. Encore une fois, on a $\mathcal{C} \subset V_f$ et le résultat. □

On utilise maintenant des résultats liés à l'arithmétique des fonctions intérieures, énoncés au chapitre 1, section 4.

Proposition 2.4.4. *Si Θ est intérieure et si $q := GCD(\Theta \circ \phi^{(n)} :\ n \in \mathbb{Z})$ alors q est un vecteur propre de C_ϕ.*

DÉMONSTRATION. On peut écrire $\Theta = qu_0$ pour une certaine fonction intérieure u_0. Ceci implique que $\Theta \circ \phi = (q \circ \phi)(u_0 \circ \phi)$ et donc que $\Theta \circ \phi \in (q \circ \phi)H^2$. De la même manière, $\Theta \circ \phi = qu_1$ pour une autre fonction intérieure u_1 et comme précédemment on trouve que $\Theta \circ \phi^{(2)} \in (q \circ \phi)H^2$. En réitérant le processus, on obtient que $V_\Theta \subset (q \circ \phi)H^2$. De façon analogue, on trouve que pour tout entier n, $V_\Theta \subset (q \circ \phi^{(n)})H^2$ ou encore

$$V_\Theta \subset \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} (q \circ \phi^{(n)})H^2.$$

Ce dernier espace étant non réduit à zéro et invariant par multiplication par z, le théorème de Beurling affirme que $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty}(q \circ \phi^{(n)})H^2 = q'H^2$, où q' est une fonction intérieure. De cette égalité, on déduit que $q'H^2 \subset qH^2$ et donc que q divise q'. Mais on a aussi que q' divise q : pour tout n, $\Theta \circ \phi^{(n)} \in q'H^2$ il en découle donc les inclusions suivantes

$$\Theta \circ \phi^{(n)}H^\infty \subset q'H^2 \Rightarrow \Theta \circ \phi^{(n)}H^2 = \overline{\Theta \circ \phi^{(n)}H^\infty} \subset q'H^2 \Rightarrow qH^2 = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \Theta \circ \phi^{(n)}H^2 \subset q'H^2.$$

Par conséquent,

$$qH^2 = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} (q \circ \phi^{(n)})H^2.$$

En particulier, on a l'existence de deux fonctions intérieures v et v' telles que $q = (q\circ\phi)v = (q\circ\phi^{-1})v'$ et donc $q \circ \phi = q(v' \circ \phi)$ ce qui signifie que q divise $q \circ \phi$ et $q \circ \phi$ divise q. Il suit que q est bien un vecteur propre pour C_ϕ. □

On avait déjà vu, dans la section précédente, que le produit de Blaschke associé aux z_n, qui est bien le plus grand diviseur intérieur commun de la famille considerée dans la proposition précédente, était vecteur propre de C_ψ associé à la valeur propre -1. Cela ne nous donne pas d'information a priori sur la minimalité de V_B, cependant, on va voir tout de suite qu'on peut restreindre la famille étudiée en cas de minimalité.

Proposition 2.4.5. *Pour $n \in \mathbb{Z}$, notons $q_n := GCD(\Theta \circ \phi^{(k)} :\ k \geq n)$. Si V_Θ est minimal, alors q_n est vecteur propre de C_ϕ.*

DÉMONSTRATION. Il est d'abbord clair que q divise q_n dans H^2. De plus, par hypothèse de minimalité, on a

$$V_\Theta = \overline{\text{vect}\{\Theta \circ \phi^{(k)} :\ k \in \mathbb{Z}\}} = \overline{\text{vect}\{\Theta \circ \phi^{(k)} :\ k \geq n\}}.$$

Ceci implique que q_n divise q dans H^2, par conséquent $q_n = \lambda_n q$ où $\lambda_n \in \mathbb{T}$, d'où le résultat. □

Lemme 2.4.6. *Si b_λ est un facteur de Blaschke, pour $\lambda \in \mathbb{D}$, alors $b_\lambda \circ \phi = c_\lambda b_{\phi^{-1}(\lambda)}$, où $c_\lambda \in \mathbb{T}$.*

DÉMONSTRATION. Ecrivons $\phi(z) = \frac{az+\overline{c}}{cz+\overline{a}}$, où $|a|^2 - |c|^2 = 1$. On a $\phi^{-1}(z) = \frac{\overline{a}z-\overline{c}}{a-cz}$. Ainsi,

$$b_\lambda \circ \phi(z) = \frac{|\lambda|}{\lambda} \cdot \frac{az + \overline{c} - \lambda cz - \lambda \overline{a}}{cz + \overline{a} - \overline{\lambda} az - \overline{\lambda c}} = \frac{a - \lambda c}{\overline{a} - \overline{\lambda c}} \cdot b_{\phi^{-1}(\lambda)}.$$

□

Remarque 2.4.7. Ce lemme va nous servir dans la preuve d'un futur corollaire, mais il sert aussi à montrer, à l'aide de la proposition qui le précède, que si B est le produit de Blaschke susnommé, alors V_B n'est pas minimal. En effet, dans ce cas $q_n = \prod_{k \geq n} b_{z_k}$ et donc, grâce au lemme précédent, $C_\psi q_n = q_{n-1}$. En particulier, q_n n'est pas vecteur propre et donc V_B n'est pas minimal.

Proposition 2.4.8. *Si Θ est intérieure, que $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{T}$ est telle que $\prod_{n \geq 0}(\lambda_n \Theta \circ \phi^{(n)}) =: v$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$ et que $v(0) \neq 0$, alors V_Θ est minimal si et seulement si Θ est constante.*

DÉMONSTRATION. On note $v_n = \prod_{k \geq n}(\lambda_n \Theta \circ \phi^{(k)})$. Alors, $\|v_n\|_\infty \leq 1$. Par conséquent,

$$\|v_n - 1\|^2 = \langle v_n, v_n\rangle + \langle 1, 1\rangle - 2\mathrm{Re}\langle v_n, 1\rangle \leq 2\left(1 - \mathrm{Re}\prod_{k \geq n} \lambda_k \Theta(z_k)\right)$$

car $\mathrm{Re}(v_n(0)) \leq \mathrm{Re}(\langle v_n, 1\rangle)$ puisque $\mathrm{Re}(v_n)$ est harmonique comme partie réelle d'une fonction holomorphe. Le fait que $v(0) \neq 0$ implique alors que $\prod_{k \geq n} \lambda_k \Theta(z_k) \to 1$ et donc que v_n tend vers 1 dans H^2. Soient $h \in H^2$ et $k \geq n$.

$$\langle z v_n h, \lambda_k \Theta \circ \phi^{(k)}\rangle = \langle z v_{n,k} h, 1\rangle = 0$$

où $v_{n,k} = \prod_{j \geq n, j \neq k}(\lambda_n \Theta \circ \phi^{(j)}) \in H^2$. Supposons que V_Θ soit minimal. Alors,

$$V_\Theta = \overline{\mathrm{vect}\{\Theta \circ \phi^{(j)} :\ j \geq n\}}.$$

On en déduit que $z v_n H^2 \subset H^2 \ominus V_\Theta$, et ceci pour tout n. En passant à la limite, on obtient que $zH^2 \subset H^2 \ominus V_\Theta$ ou encore $V_\Theta \subset \mathcal{C}$. □

Corollaire 2.4.9. *Soit B un produit de Blaschke avec une infinité de zéros $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ satisfaisant les conditions*

$$\sum_{n,k \geq 0} (1 - |\phi^{(-k)}(\alpha_n)|^2) < \infty \tag{3}$$

et

$$\prod_{n,k \geq 0} |\phi^{(-k)}(\alpha_n)| \neq 0. \tag{4}$$

Alors, V_B n'est pas minimal.

DÉMONSTRATION. On appelle B_k le produit de Blasche formé des facteurs de Blaschke $\{b_{\phi^{(-k)}(\alpha_n)} : n \geq 0\}$. D'apres un lemme précédent sur les facteurs de Blaschke, on voit que $B \circ \phi^{(k)} = \lambda_k^{-1} B_k$ pour un certain $\lambda_k \in \mathbb{T}$. On peut donc appliquer le théorème précédent en prenant $\Theta = B$ et (λ_k), les hypothèses (3) et (4) sur B affirmant qu'on est bien dans les conditions d'application de celui-ci. □

CHAPITRE 3

Sous-espaces simultanément invariants sous l'action d'un semi-groupe discret et d'un semi-groupe continu

Les théorèmes rappelés au premier chapitre nous donnent une description exacte de l'ensemble des sous-espaces invariants sous l'action du semi-groupe $\{S_\tau\}_{\tau\geq 0}$ ou encore de $\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}$. L'objet de ce chapitre est de voir sous quelles conditions ces espaces sont encore invariants sous l'action d'un semi-groupe "discret", c'est à dire d'un seul opérateur. On commencera par étudier le cas où cet opérateur est un opérateur de dilatation en observant une application au problème du sous-espace invariant. Ensuite, nous remplacerons l'opérateur de dilatation par un opérateur de multiplication. Ce chapitre est basé sur un article de E. Gallardo-Gutièrrez& J.R. Partington [**5**].

1. Translation et dilatation

Pour $\tau \geq 0$ et $\lambda > 0$, on redéfinit

$$S_\tau : \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(x-\tau)) \end{array}, \qquad e^{i\tau\cdot} : \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & (x \mapsto e^{i\tau x} f(x)) \end{array}$$

et

$$C_{\frac{1}{\lambda}} : \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(\frac{x}{\lambda})) \end{array}.$$

On rappelle également que

$$\mathcal{F}^{-1} S_\tau \mathcal{F} = e^{i\tau\cdot}$$

et on remarque que si $\tilde{C}_\lambda f(x) := f(\lambda x)$, alors

$$\frac{1}{\lambda}\mathcal{F}^{-1} C_{\frac{1}{\lambda}} \mathcal{F} f(x) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\frac{x}{\lambda}t} dt) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}^{-1}(\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(\lambda t) e^{-itx} dt) = f(\lambda x) = \tilde{C}_\lambda f(x).$$

Ainsi, cela revient au même, modulo transformée de Fourier, d'étudier le treillis commun de l'un ou l'autre des deux semi-groupes. Si $\{T_i\}_{i\in I}$ est une famille d'opérateurs, on entend par treillis commun l'intersection des treillis

$$\mathrm{Lat}(\{T_i\}_{i\in I}) := \bigcap_{i\in I} \mathrm{Lat}(T_i).$$

Le théorème1.6.19 et le corollaire 1.6.20 nous donnent une description exacte :

$$\mathrm{Lat}(\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}) = \{qH^2_+ :\ q \text{ unimodulaire}\} \cup \{\chi_E L^2(\mathbb{R}) :\ E \subset \mathbb{R} \text{ ensemble mesurable}\},$$

$$\mathrm{Lat}(\{S_\tau\}_{\tau\geq 0}) = \mathcal{F}\{qH^2_+ :\ q \text{ unimodulaire}\} \cup \mathcal{F}\{\chi_E L^2(\mathbb{R}) :\ E \subset \mathbb{R} \text{ ensemble mesurable}\}.$$

1.1. Des conditions sur E et q.

On se demande ici quelles conditions doivent vérifier les ensembles E ou les fonctions unimodulaires q pour que $\chi_E L^2(\mathbb{R})$ ou qH^2_+ soient également dans le treillis de $\tilde{C}_\lambda$. C'est l'objet des deux propositions suivantes.

Proposition 3.1.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable. Alors, $\chi_E L^2(\mathbb{R}) \in Lat(\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}, \tilde{C}_\lambda)$ si et seulement si $\lambda^{-1}E \subset E$. De plus, la classe formée de tels ensemble peut être paramétrée en prenant une famille $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ croissante de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ arbitraire et en posant $E := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\lambda^{-n}F_n)$.*

Démonstration. Supposons $\lambda^{-1}E \subset E$. Alors, $s \notin E$ implique $\lambda s \notin E$ et donc, si $f \in \chi_E L^2(\mathbb{R})$ et si $s \notin E$ alors $\tilde{C}_\lambda f(s) = f(\lambda s) = 0$ et $\tilde{C}_\lambda \in \chi_E L^2(\mathbb{R})$. Réciproquement, si ce dernier sous-espace est dans le treillis de $\tilde{C}_\lambda$, alors $\chi_{\lambda^{-1}E} = \tilde{C}_\lambda \chi_E = \chi_E g$ où $g \in L^2(\mathbb{R})$ et on a forcément $\lambda^{-1}E \subset E$.

En ce qui concerne la paramétrisation, soit E tel que $\lambda^{-1}E \subset E$.On suppose $\lambda > 1$ pour alléger la preuve. On pose $F_n := \lambda^n E \cap ((-\lambda, -1) \cup (1, \lambda))$. La suite est bien croissante car

$$F_n \ni \lambda^n e = \lambda^{n+1}(\lambda^{-1}e) \in F_{n+1}.$$

De plus, $\lambda^{-n}F_n = E \cap ((-\lambda^n, -\lambda^{n-1}) \cup (\lambda^{n-1}, \lambda^n))$ et donc $E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^{-n}F_n$. ☐

Proposition 3.1.2. *Soit q une fonction unimodulaire sur $\mathbb{R}$. Alors, $qH^2_+ \in Lat_+(\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}, \tilde{C}_\lambda)$ si et seulement si l'application $s \mapsto \frac{q(\lambda s)}{q(s)}$ définit une fonction intérieure. De plus, l'ensemble de ces fonctions peut être paramétrisé en prenant arbitrairement q unimodulaire sur*

$$(-1, -\lambda) \cup (\lambda, 1) \qquad (resp.\ (-\lambda, -1) \cup (1, \lambda))$$

si $0 < \lambda < 1$ (resp. $\lambda > 1$), en choisissant une fonction intérieure $\Theta \in H^\infty_+$ et en définissant par récurrence

$$q(\lambda s) = q(s)\Theta(s) \text{ et } q(\frac{s}{\lambda}) = q(s)\Theta(\frac{s}{\lambda}).$$

Démonstration. Notons $\mathcal{M} := qH^2_+$.On a $\tilde{C}_\lambda \mathcal{M} = q(\lambda\cdot)H^2_+ \subset qH^2_+$. Par la proposition 1.5.8, il suit que $s \mapsto q(\lambda s)/q(s)$ définit une fonction intérieure, la paramétrisation est alors claire. ☐

On connait la forme des fonctions intérieures de H^2_+, la proposition suivante donne des conditions sur une fonction intérieure Θ pour que $\Theta H^2_+ \subset H^2_+$ soit dans le treillis commun étudié.

Proposition 3.1.3. *Soit $\Theta(s) = B(s)e^{i\beta s}exp(i\int_\mathbb{R} \frac{1+ts}{t-s}d\nu(t))$ une fonction intérieure de H^2_+ On note Λ l'ensemble des zéros de B. Le sous-espace $\mathcal{M} = \Theta H^2_+ \in Lat(\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}, \tilde{C}_\lambda)$ si et seulement si Θ divise dans H^∞_+ la fonction $s \mapsto \Theta(\lambda s)$. Ceci est équivalent aux conditions suivantes :*
(i) $\lambda\Lambda \subset \Lambda$,
(ii) Si $0 < \lambda < 1$, alors $\beta = 0$,
(iii) $\frac{\lambda^2 t^2+1}{\lambda(t^2+1)}d\nu(\lambda t) \geq d\nu(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned}
\Theta(\lambda s) &= B(\lambda s)e^{i\lambda\beta s}\exp(i\textstyle\int_\mathbb{R} \frac{1+\lambda ts}{\lambda t-s}d\nu(t)) \\
&= B(\lambda s)e^{i\lambda\beta s}\exp(i\textstyle\int_\mathbb{R}[\frac{t(1-\lambda^2)}{t^2+\lambda^2} + \frac{(t^2+1)\lambda}{t^2+\lambda^2}\cdot\frac{st+\lambda}{t-\lambda s}]d\nu(t)) \\
&= B(\lambda s)e^{i\lambda\beta s}\exp(i\textstyle\int_\mathbb{R} \frac{t(1-\lambda^2)}{t^2+\lambda^2}d\nu(t))\exp(i\int_\mathbb{R} \frac{(\lambda^2t^2+1)}{\lambda(t^2+1)}\cdot\frac{st+1}{t-s}d\nu(\lambda t))
\end{aligned}$$

Ainsi, si l'on veut que Θ divise Θ_λ, on doit avoir :
(1) Si s_0 est un zéro de B, il suit clairement que $\Theta(\lambda s_0) = 0$, ce qui donne (i).

(2) Si $0 < \lambda < 1$, alors nécessairement $\beta = 0$, sinon Θ_λ/Θ n'est pas borné.

(3) Le calcul et le lemme 1.2.4 montrent que ν doit vérifier (iii). Un raisonnement semblable et plus détaillé est fait lors de la preuve du théorème 4.2.1. $\square$

1.2. Une application au problème du sous-espace invariant : une inclusion stricte.

Il apparaît, comme le montre la proposition suivante, que le treillis commun précédent est lié au treillis d'un opérateur de composition hyperbolique, et donc au problème du sous-espace invariant comme nous l'avons vu au chapitre 2.

On notera, si T est un opérateur de $L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Lat}_+(T) := \mathrm{Lat}(T_{|L^2_+}).$$

Remarque 3.1.4. On voit que $\mathrm{Lat}_+(\{S_\tau\}_{\tau\geq 0}) = \mathcal{F}\{qH^2_+ :\ q \text{ unimodulaire}\}$. En effet, si $\mathcal{M} \subset L^2_+$ est 2−invariant, alors $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $S_\tau \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Soit $f \in \mathcal{M}$ telle que $f \neq 0$. Il existe alors $0 \leq x_1 < x_2$ tels que $f(x) \neq 0$ pour tout x dans (x_1, x_2). Mais alors pour tout $y \in (x_1 - x_2, 0)$ on a $(S_{-x_2} f)(y) = f(y + x_2) \neq 0$ et donc $S_{-x_2} f \notin L^2_+$, c'est absurde.

Proposition 3.1.5. *Soit C_ϕ un opérateur de composition hyperbolique sur H^2. Il existe $\lambda > 0$ tel que $U_2^{-1}\mathcal{F}^{-1}(Lat_+(\{S_\tau\}_{\tau\geq 0},\ C_{\frac{1}{\lambda}})) \subset Lat(C_\phi)$. De plus, l'inclusion est stricte.*

Démonstration. Une fois de plus, on traite le cas de C_ψ où $\psi(z) = \frac{z+r}{1+rz}$ et $K = \frac{1+r}{1-r}$ où $0 < r < 1$. On va prendre $\lambda = K$. Posons $W_\psi := U_2 C_\psi U_2^{-1}$. Alors, pour $f \in H^2_+$, on a

$$W_\psi f = U_2 C_\psi U_2^{-1} f = U_2 C_\psi(\frac{2i\sqrt{\pi}}{1-z} f \circ \gamma) = U_2(\frac{2i\sqrt{\pi}}{1-\psi} f \circ \gamma \circ \psi) = \frac{2i}{z+i} \cdot \frac{1}{1-\psi\circ\gamma^{-1}} f \circ \gamma \circ \psi \circ \gamma^{-1}.$$

Or, on a déjà vu au chapitre précédent que $\gamma \circ \psi = K\gamma$ ce qui donne $\psi \circ \gamma^{-1} = \frac{Kz+i}{2i}$ et on obtient

$$W_\psi f = \frac{Kz+i}{z+i} f(Kz).$$

Si l'on note $\tilde{B} := KId - i(K-1)\tilde{T}$ (où on rappelle que $\tilde{T} : f \mapsto (s \mapsto \frac{1}{s+i} f(s))$) et $\tilde{C}_K : f \mapsto (s \mapsto f(Ks))$, on observe que

$$\tilde{B}\tilde{C}_K f(s) = Kf(Ks) - i(K-1)\frac{1}{s+i} f(Ks) = \frac{Ks+i}{s+i} f(Ks) = W_\psi f(s).$$

Par la remarque 3.1.4 et le théorème de Beurling pour le demi-plan supérieur, on se rend compte que $\mathrm{Lat}_+(\{S_\tau\}_{\tau\geq 0}) = \mathcal{F}\mathrm{Lat}(\tilde{T})$. Ainsi, si $\mathcal{M} \in \mathrm{Lat}_+(\{S_\tau\}_{\tau\geq 0},\ C_{\frac{1}{K}})$, alors $\tilde{B}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{M} \subset \mathcal{F}^{-1}\mathcal{M}$. D'autre part, comme $\tilde{C}_K = \frac{1}{K}\mathcal{F}^{-1} C_{\frac{1}{K}} \mathcal{F}$, on a clairement $\tilde{C}_K \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M})$. On en déduit, d'après l'expression de W_ψ explicitée auparavant, que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}) \in \mathrm{Lat}(W_\psi)$ ou encore $U_2^{-1}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}) \in \mathrm{Lat}(C_\psi)$.

Montrons maintenant que cette inclusion est stricte. Soient f et f_n des fonctions de L^2_+ définies par

$$f(t) = te^{-t}\chi_{\mathbb{R}^+}(t) \text{ et } f_n(t) = \frac{1}{K^n} e^{-\frac{t}{K^n}} \chi_{\mathbb{R}^+}(t),\ n \geq 0.$$

On définit le sous-espace $\mathcal{M} \subset L^2_+$ par $\mathcal{M} := \overline{\mathrm{Vect}\{f,\ f_n;\ n \geq 0\}}$. On va voir que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M})$ est stable sous l'action de W_ψ, et donc que $U_2^{-1}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}) \in \mathrm{Lat}(C_\psi)$, mais que $S_\tau C_{\frac{1}{K}}\mathcal{M} \not\subset \mathcal{M}$. En posant $g := \mathcal{F}^{-1}f$ et $g_n := \mathcal{F}^{-1}f_n$, un calcul immédiat nous donne

$$g(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1-is)^2} \text{ et } g_n(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-iK^ns}.$$

On applique alors W_ψ. De l'égalié $\frac{Ks+i}{s+i} = \frac{1-iKs}{1-is}$, on obtient

$$W_\psi g(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{Ks+i}{(s+i)(1-iKs)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-is)(1-iKs)}$$

et

$$W_\psi g_n(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{Ks+i}{(s+i)(1-iK^{n+1}s)} = \frac{1-iKs}{\sqrt{2\pi}(1-is)(1-iK^{n+1}s)}.$$

C'est alors qu'on constate que

$$W_\psi g = (\frac{1}{K-1})g_0 + (1-\frac{1}{K-1})g_1 \in \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}),$$

$$W_\psi g_n = (\frac{K-1}{K^{n+1}-1})g_0 + (1-\frac{K-1}{K^{n+1}-1})g_{n+1} \in \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}),$$

et donc que $W_\psi\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M})$. Remarquons maintenant que si $h \in L^2_+$ alors

$$\langle h, f\rangle = \int_0^\infty h(x)xe^{-x}dx = (-i\sqrt{2\pi})(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} h(x)e^{ix\cdot}dx)'(i) = -i\sqrt{2\pi}(\mathcal{F}^{-1}h)'(i)$$

et

$$\langle h, f_n\rangle = \frac{1}{K^n}\int_0^\infty h(x)e^{-tK^{-n}}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{K^n}\mathcal{F}^{-1}h(iK^{-n}).$$

Ainsi, si

$$B(s) := (\frac{s-i}{s+i})^2\prod_{n\geq 1}\frac{s-iK^{-n}}{s+iK^{-n}}$$

est le produit de Blasche associé à la suite $\{iK^{-n}\}_{n\geq 1}$ avec un zero de multiplicité 2 en i (ce produit converge car $\sum_{n\geq 1}\frac{K^{-n}}{1+K^{-2n}} < \infty$, du fait que $K > 1$), alors la fonction $h := \mathcal{F}(B) \in L^2_+$ vérifie clairement $h \perp \mathcal{M}$. Soit $\tau \geq 0$. $S_\tau C_{\frac{1}{K}}f(t) = e^{\frac{\tau}{K}}(\frac{t}{K}e^{-\frac{t}{K}} - \frac{\tau}{K}f_1(t))$. On en déduit que

$$\langle h, S_\tau C_{\frac{1}{K}}f\rangle = e^{\frac{\tau}{K}}\langle h, \frac{t}{K}e^{-\frac{t}{K}}\rangle = -\sqrt{2\pi}\frac{ie^{\frac{\tau}{K}}}{K}(\mathcal{F}^{-1}h)'(iK^{-1}) = -\sqrt{2\pi}\frac{ie^{\frac{\tau}{K}}}{K}B'(iK^{-1}) \neq 0,$$

ce qui implique forcément que $S_\tau C_{\frac{1}{K}}f \notin \mathcal{M}$ et termine la démonstration □

Remarque 3.1.6. En regardant de plus près la preuve, on se rend compte que $\mathcal{M}$ n'est pas invariant sous l'action de $C_{\frac{1}{K}}$. Cette remarque motive alors l'étude qui suit du treillis de ce dernier opérateur.

1.3. Sous-espaces invariants des opérateurs de dilatation.

Fixons un certain $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ et considérons l'opérateur $C_{\frac{1}{\lambda}}$ sur L^2_+. On va décrire $\mathrm{Lat}_+(C_{\frac{1}{\lambda}})$.

Proposition 3.1.7. *$Lat_+(C_{\frac{1}{\lambda}})$ est isomorphe au treillis d'un certain opérateur de translation agissant sur $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Introduisons l'opérateur unitaire V défini par :

$$V: \begin{array}{ccc} L^2_+ & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & (u \mapsto e^{\frac{u}{2}} f(e^u)) \end{array} \quad \text{et} \quad V^{-1}: \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2_+ \\ f & \mapsto & (t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} f(\mathrm{log} t)) \end{array}.$$

En posant $a := \mathrm{log}\lambda$, on remarque que

$$(VC_{\frac{1}{\lambda}}V^{-1}f)(u) = V(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{t}} f(\log\frac{t}{\lambda})) = \sqrt{\lambda}\frac{e^{\frac{u}{2}}}{\sqrt{e^u}} f(t-a) = \sqrt{\lambda} f(u-a).$$

Et donc, $C_{\frac{1}{\lambda}}$ est semblable à $\sqrt{\lambda}S_a$ et en particulier $\mathrm{Lat}_+(C_{\frac{1}{\lambda}}) = V^{-1}\mathrm{Lat}(S_a)$. □

Proposition 3.1.8. *Soit $a \in \mathbb{R}^\star$. Il y a une correspondance biunivoque entre les sous-espaces invariants de l'opérateur de translation S_a et ceux du shift bilatéral de l'espace $l^2(\mathbb{Z}, F)$, où $F = L^2(0,a)$ ou bien $L^2(a,0)$ en fonction du signe de a. Ils peuvent donc être identifiés à $\Theta H^2(\mathcal{D}) \oplus PL^2(F)$ où les notations sont celles du théorème 1.6.23.*

Démonstration. On traite le cas $a > 0$. Il suffit de voir que

$$L^2(\mathbb{R}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L^2(-na, -(n-1)a) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} L^2(0,a) = l^2(\mathbb{Z}, F)$$

où l'isomphisme est donné par

$$\Phi: \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \to & l^2(\mathbb{Z}, F) \\ f & \mapsto & (\chi_{(0,a)} S^n_{-a} f)_n \end{array}.$$

On peut ensuite identifier $l^2(\mathbb{Z}, F)$ à $L^2(\mathbb{T}, F)$ à l'aide des séries de Fourier, on associe ainsi à $f \in L^2(\mathbb{R})$ la fonction $\tilde{f}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \chi_{(0,a)}(S^n_{-a}f)z^n \in L^2(\mathbb{T}, F)$ et il paraît alors clair que $S_a = S^{-1}_{-a}$ devient le shift bilatéral : $\Phi S_a f = (\chi_{(0,a)} S^{n-1}_{-a} f)_n$ qui avec l'identification par les séries de Fourier devient la multiplication par z. Il suffit ensuite d'appliquer 1.6.23. □

2. Translation et multiplication

On remplace dans cette section l'opérateur de dilatation par un opérateur de multiplication $e^{ia\cdot} : f \mapsto e^{ia\cdot}f$. Soit $a > 0$. Une fois de plus, on sait que les sous-espaces invariants du semi-groupes de multiplication sont soit de la forme $\chi_E L^2(\mathbb{R}) = L^2(E)$ pour un certain ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}$ ou bien de la forme qH^2_+ pour une fonction q unimodulaire. On commence par une proposition simple, permettant de caractériser les sous-espaces "2−invariants".

Proposition 3.2.1. *Le sous-espace $L^2(E)$ est dans le treillis de S_a si et seulement si $E + a \subset E$. La classe formée de tels ensembles peut être paramétrée en prenant une famille croissante $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ arbitraire et en définissant $E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(F_n + na)$.*

Démonstration. Il est absolument clair que $S_a \chi_E L^2(\mathbb{R}) \subset \chi_E L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si $E+a \subset E$. Pour s'en convaincre, on peut reprendre la preuve de la proposition 3.1.1. Soit E tel que $E+a \subset E$. En posant $F_n := (E - na) \cap (0, a)$, on définit bien une suite croissante :

$$F_n \ni e - na = (e + a) - (n + 1)a \in F_{n+1}.$$

De plus, $F_n + na = E \cap (na, (n + 1)a)$ et donc $E = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (F_n + na)$. □

En ce qui concerne les sous-espaces "1−invariants", on a deux résultats analogues à ceux de la section précédente, à commencer par cette proposition, reformulation de la proposition 3.1.2 :

Proposition 3.2.2. *Le sous-espace $\mathcal{M} = qH^2_+$, où q est unimodulaire, est un sous-espace invariant commun pour $\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau \geq 0}$ et S_a si et seulement si l'application $s \mapsto \frac{q(s-a)}{q(s)}$ définit une fonction intérieure. De plus, l'ensemble de ces fonctions peut être paramétré en prenant arbitrairement q unimodulaire sur $(0, a)$, en choisissant une fonction intérieure arbitraire $\Theta \in H^\infty_+$ et en définissant par récurrence*

$$q(s - a) = q(s)\Theta(s) \text{ et } q(s + a) = q(s)/\Theta(s + a).$$

Démonstration. Comme lors de la preuve de la proposition 3.1.2, on utilise la proposition 1.5.8. □

En considérant les sous-espaces de H^2_+, on retrouve encore une proposition semblable à la proposition 3.1.3 :

Proposition 3.2.3. *Soit $\Theta(s) = B(s)e^{i\beta s} exp(i \int_{\mathbb{R}} \frac{1+ts}{t-s} d\nu(t))$ une fonction intérieure de H^2_+. On note Λ l'ensemble des zéros de B. Le sous-espace $\mathcal{M} = \Theta H^2_+ \in Lat(\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau \geq 0}, S_a)$ si et seulement si Θ divise dans H^∞_+ la fonction $s \mapsto \Theta(s - a)$. Ceci est équivalent aux deux conditions suivantes :*
(i) $\Lambda - a \subset \Lambda$,
(ii) $\frac{(t-a)^2+1}{t^2+1} d\nu(t - a) \geq d\nu(t)$.

Démonstration. On va écrire explicitement $\Theta(s - a)$, puis la divisibilité de cette dernière fonction par Θ va d'abord entraîner clairement que $\Lambda - a \subset \Lambda$ puis que le quotient des deux fonctions intérieures, qui est encore une fonction intérieure, va s'écrire $\exp(\phi)$ où ϕ fonction holomorphe. En considérant le module, et donc la partie réelle de ϕ, et en appliquant le la caractérisation des fonctions harmoniques positives 1.2.4, on pourra conclure au résultat voulu. Lors de la preuve du théorème 4.2.1, on utilise le même raisonnement que l'on détaille complètement.

$$\Theta(s - a) = B(s - a)e^{i\beta(s-a)}\exp(i \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + t(s - a)}{t - (s - a)} d\nu(t)).$$

Calculons alors le terme à l'intérieur de l'intégrale, en posant $t = t' - a$:

$$\frac{1 + t(s - a)}{t - (s - a)} = \frac{1 + (t' - a)(s - a)}{t' - s} = a\frac{1 - t'(t' + a)}{1 + t'^2} + \frac{(t' - a)^2 + 1}{t^2 + 1} \cdot \frac{t's + 1}{t' - s},$$

ce qui donne

$$\Theta(s - a) = B(s - a)e^{i\beta(s-a)}e^{i\eta}\exp(i \int_{\mathbb{R}} \frac{(t - a)^2 + 1}{t^2 + 1} \cdot \frac{st + 1}{t - s} d\nu(t - a)),$$

où

$$\eta = \int_{\mathbb{R}} a\frac{1 - t'(t' + a)}{1 + t'^2} d\nu(t - a) \in \mathbb{R}.$$

En utilisant comme annoncé le lemme 1.2.4, on obtient

$$\frac{(t-a)^2+1}{t^2+1}d\nu(t-a) \geq d\nu(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Remarque 3.2.4. Les conditions sur les mesures singulières obtenues aux propositions 3.1.3 et 3.2.3 ne permettent pas a priori de caractériser les mesures qui conviennent. On voit en particulier que toute mesure du type $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha_n}{1+t_n^2}\delta_{t_n}$ où $t_n = t_0 + na$, $\alpha_n \geq 0$, $\alpha_{n-1} - \alpha_n \geq 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha_n}{1+t_n^2} < \infty$, avec $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé, satisfait la condition (ii) de la proposition précédente, et ce ne sont pas les seules mesures (discrètes) dans ce cas.

CHAPITRE 4

Sous-espaces simultanément invariants sous l'action de deux semi-groupes continus

Dans ce dernier chapitre, nous remplaçons le semi-groupe discret par un semi-groupe continu. Suivant deux articles de A. Katavolos & S.C. Power, dont les méthodes sont similaires, nous donnons une paramétrisation des espaces simultanément invariants tout d'abord sous l'action de $\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}$ et $\{S_t\}_{t\geq 0}$ et ensuite sous celle de $\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}$ et $\{V_t\}_{t\geq 0}$, où $V_t f(x) = e^{\frac{t}{2}} f(e^t x)$. Comme les sous-espaces sont au moins invariants sous le semi-groupe de mutilplication, on sait déjà qu'ils sont de la forme $L^2(E)$ ou qH^2_+. On peut dans chacun des deux cas déterminer facilement les ensembles E qui conviennent. La partie principale de chacun des deux articles consiste à regarder la forme des fonctions unimodulaires q et de paramétriser celles qui conviennent.

1. Résultats préliminaires

Au cours des deux sections qui vont suivre, on aura besoin de résultats de théorie des fonctions, que l'on fait apparaître ici sous forme de lemmes :

Lemme 4.1.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Alors, il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \rho x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Le résultat est bien connu si la fonction est supposée continue. On va montrer qu'en fait les deux hypothèses sur f entraînent sa continuité et donc le resultat. Il suffit pour cela de montrer que f est bornée au voisinage de 0. Si c'est le cas, f sera localement intégrable, et en intégrant l'équation d'additivité de f par rapport à x ou y, on aura que f est continue. Il existe N tel que $A := \{x : \ |f(x)| < N\}$ est de mesure non nulle, mais alors $A - A$ est un voisinage de 0, ce qui donne le résultat par l'additivité de f. □

Corollaire 4.1.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ une fonction mesurable telle que $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Alors, il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{i\sigma x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. On écrit $f(x) = e^{ig(x)}$ où g est additive et mesurable et on applique le lemme précédent. □

Lemme 4.1.3. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f(x+y) = f(x)e^{\pm y} + f(y)$. Alors, il existe $\lambda \geq 0$ tel que $f(x) = \pm\lambda(e^{\pm x} - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que f est dérivable sur $[0, \infty)$. Si c'est le cas, en dérivant la relation vérifiée par f par rapport à y puis en faisant $y = 0$, on trouve que $f'(x) = \pm f(x) + f'(0)$. On pose $\lambda = f'(0) \geq 0$. La solution unique de cette équation différentielle est $f(x) = \pm\lambda(e^{\pm x} - 1)$. Montrons donc la dérivabilité de f sur $[0, \infty)$.

f est croissante, elle est donc localement intégrable. En intégrant l'égalité par rapport à y, puis en appliquant le théorème de dérivation de Lebesgue, on voit que f est dérivable presque partout sur $(0,\infty)$. Soit s un point où f est dérivable. La relation vérifiée par f montre que pour tout $t\geq 0$, f est dérivable en $s+t$ et donc f dérivable partout sur $(0,\infty)$. Soit $x_0>0$. On a, pour tous $x,h>0$,

$$f'(x+h)\mp e^{\pm h}f(x)=f'(h). \tag{5}$$

Suivant le signe à l'intérieur de l'exponentielle, on remarque que f' est croissante ou décroissante sur $(0,\infty)$ donc localement intégrable sur $[x_0,\infty)$ et en intégrant (5) par rapport à x, on trouve que f' est continue sur $[x_0,\infty)$. On fait tendre $h\to 0$ dans (5) et on a

$$f'(0):=\lim_{h\to 0}f'(h)=f'(x_0)\mp f(x_0)<\infty.$$

Cette formule est en fait vraie pour tout $x>0$. De plus, f étant croissante, $f'\geq 0$ et étant continue, $f'(0)\geq 0$. $\square$

2. Les sous-espaces invariants sous $\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}$ et $\{S_\tau\}_{\tau\geq 0}$

On donne ici, suivant [**7**], la structure exacte de l'ensemble des sous-espaces invariants à la fois sous l'action de chacun des deux semi-groupes $\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}$ et $\{S_\tau\}_{\tau\geq 0}$. La dernière partie du chapitre précédent affirme que pour que $L^2(E)$ soit dans $\mathrm{Lat}(\{S_\tau\}_{\tau\geq 0})$, où $E\subset\mathbb{R}$ est un ensemble mesurable, on doit avoir que $E+t\subset E$ pour tout $t\geq 0$. Ainsi, les éléments de $\mathrm{Lat}(\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0},\{S_\tau\}_{\tau\geq 0})$ $2-$invariants seront de la forme $L^2((a,\infty))$ pour un certain $a\in\mathbb{R}$. Le théorème suivant nous donne une description exacte des élements $1-$invariants.

Théorème 4.2.1. *On a une paramétrisation de l'ensemble des sous-espaces $1-$invariants sous l'action des deux semi-groupes $\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}$ et $\{S_\tau\}_{\tau\geq 0}$.*

$$\mathcal{M}\in Lat(\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0},\{S_\tau\}_{\tau\geq 0})\Longleftrightarrow\mathcal{M}=e^{-is\frac{x^2}{2}}e^{i\lambda x}H^2_+,\ (s,\lambda)\in\mathbb{R}^\star_+\times\mathbb{R}.$$

Démonstration. Afin d'alléger les notations, on note $\phi_s(x)=e^{-is\frac{x^2}{2}}$ et M_{ϕ_s} l'opérateur de multiplication par ϕ_s sur $L^2(\mathbb{R})$. On remarque tout d'abord qu'on a la relation

$$e^{i\tau\cdot}S_t=e^{i\tau t}S_te^{i\tau\cdot} \tag{6}$$

Commençons par montrer que pour $(s,\lambda)\in\mathbb{R}^\star_+\times\mathbb{R}$, le sous-espace $\mathcal{M}=M_{\phi_s}e^{i\lambda\cdot}H^2_+$ est bien dans le treillis sus-nommé. Du fait que $e^{i\tau\cdot}H^2_+\subsetneq H^2_+$, il est clair que $\mathcal{M}$ est $1-$invariant sous l'action du semi-groupe de multiplication. D'autre part, pour $t>0$, on a

$$S_tM_{\phi_s}f(x)=S_t(e^{-is\frac{x^2}{2}}f(x))=e^{-is\frac{x^2}{2}}e^{itsx}e^{-is\frac{t^2}{2}}f(x-t)=\phi_s(t)M_{\phi_s}e^{its\cdot}S_tf(x)$$

et donc, en utilisant également (6)

$$\begin{aligned}S_t\mathcal{M}&=S_tM_{\phi_s}e^{i\lambda\cdot}H^2_+=M_{\phi_s}e^{its\cdot}S_te^{i\lambda\cdot}H^2_+\\&=M_{\phi_s}e^{its\cdot}e^{i\lambda\cdot}S_tH^2_+\\&=M_{\phi_s}e^{its\cdot}e^{i\lambda\cdot}H^2_+\\&=M_{\phi_s}e^{i\lambda\cdot}e^{its\cdot}H^2_+\\&\subsetneq M_{\phi_s}e^{i\lambda\cdot}H^2_+=\mathcal{M}.\end{aligned}$$

Réciproquement, si $\mathcal{M}$ est $1-$invariant sous l'action de chacun des deux semi-groupes, il l'est en particulier sous celle de $\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}$, et donc par le théorème 1.6.19, $\mathcal{M}=qH^2_+$, où q est unimodulaire. On va montrer que $q(x)=ce^{-i(\rho\frac{x^2}{2}+\lambda x)}$pour certains $\rho>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{T}$.

Pour chaque $t>0$, qH^2_+ est dans le treillis commun de $\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}$ et de S_t. Par la proposition 3.2.2 il existe une fonction intérieure Θ_t telle que

$$q(x-t) = q(x)\Theta_t(x) \tag{7}$$

On remarque que si $0 \leq t < s$, alors Θ_t divise Θ_s : en effet, $s = t + t'$ donc

$$\Theta_s H^2_+ = S_s\mathcal{M} = S_t S_{t'}\mathcal{M} \subset S_t\mathcal{M} = \Theta_t H^2_+,$$

ce qui entraîne, comme on l'a vu à plusieurs reprises que $\Theta_t/\Theta_s = \tilde{\Theta}$ pour une certaine fonction intérieure $\tilde{\Theta}$. D'autre part, on a, pour $s, t \geq 0$, l'égalité de cocyclicité

$$\Theta_{s+t}(x) = \frac{q(x-s-t)}{q(x)} = \frac{q(x-s-t)}{q(x-s)} \cdot \frac{q(x-s)}{q(x)} = \Theta_t(x-s)\Theta_s(x) \tag{8}$$

qui implique en particulier que la fonction intérieure $\Theta_t(\cdot - s)$ divise Θ_{s+t}. En combinant ceci la relation de divisibilité précédente, on a que si $0 \leq r < s-t$, alors $\Theta_t(\cdot - r)$ divise Θ_{r+t} qui divise Θ_s et divise donc elle-même Θ_s.

Fixons s et $0 < t < s$. Si Θ_t s'annule en $s_0 \in \mathbb{C}^+$, alors pour tout r tel que $0 < r < s-t$, on a $\Theta_s(s_0 + r) = 0$, ce qui contredit le principe des zéros isolés. Il suit que Θ_t est une fonction intérieure singulière que l'on peut écrire sous la forme

$$\Theta_t(z) = \alpha(t)e^{i\beta(t)z}\exp(i\int_{\mathbb{R}} \frac{uz+1}{u-z}d\mu_t(u)), \qquad (\mathrm{Im}(z) > 0),$$

où $\alpha(t) \in \mathbb{T}$, $\beta(t) \in \mathbb{R}$ et μ_t mesure finie singulière positive sur $\mathbb{R}$. Montrons que $\mu_t \equiv 0$. Le même calcul qu'à la proposition 3.2.3 donne

$$\Theta_t(z-r) = \alpha(t)e^{i\beta(t)(z-r)}e^{i\eta(t,r)}\exp(i\int_{\mathbb{R}} \frac{uz+1}{u-z} \cdot \frac{(u-r)^2+1}{u^2+1}d\mu_t(u-r)),$$

où $\eta(t,r) = \exp(i\int_{\mathbb{R}} r\frac{1-u^2+ur}{tu^2+1}d\mu_t(u-r))$.

On peut donc écrire

$$\frac{\Theta_s(z)}{\Theta_t(z-r)} = \frac{\alpha(s)}{\alpha(t)}e^{-\phi_r(z)} = \Theta$$

où ϕ_r est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^+$ et Θ une fonction intérieure. En particulier, $|\frac{\alpha(s)}{\alpha(t)}|e^{-\psi_r} = |\frac{\Theta_s(z)}{\Theta_t(z-r)}|$ où on a posé

$$\psi_r(z) := \mathrm{Re}(\phi_r)(z) = (\beta(s)-\beta(t))\mathrm{Im}(z) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z-u|^2}(d\nu_s(u) - d\nu_t(u-r))$$

avec $d\nu(u) := (1+u^2)d\mu(u)$. Du fait que le quotient est unimodulaire sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $|\alpha(s)/\alpha(t)| = 1$. D'autre part, ψ_r étant harmonique, comme partie réelle d'une fonction holomorphe, et positive (car $e^{-\psi_r} \leq 1$), en appliquant le lemme 1.2.4, on en déduit alors que $\beta(s) \geq \beta(t)$ et que pour tout A borélien de $\mathbb{R}$, $\nu_s(A) \geq \nu_t(A-r)$. Ceci étant vrai pour tout $0 < r < s-t$ on définit une nouvelle mesure sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\sigma(A) := \int_0^{s-t} \nu_t(A-r)dr.$$

Cette mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. En effet, supposons que A soit un borélien tel que $m(A) = 0$. Alors,

$$\sigma(A) = \int_0^{s-t}\int_{\mathbb{R}} \chi_{A-r}(u)d\nu_t(u)dr = \int_{\mathbb{R}}\int_0^{s-t} \chi_{A+u}(r)drd\nu_t(u) = 0.$$

L'hypothèse de majoration donne $\sigma(A) \leq (s-t)\nu_s(A)$ ce qui implique, car $\nu_s \perp m$, que $\sigma \equiv 0$. Mais alors ν_t, et donc μ_t sont également nulles. Autrement dit,

$$\Theta_t(x) = \alpha(t)e^{i\beta(t)x}. \tag{9}$$

L'identité (8) s'exprime alors

$$\alpha(s+t)e^{i\beta(s+t)x} = \alpha(t)e^{i\beta(t)(x-s)}\alpha(s)e^{i\beta(s)x}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \alpha(s+t) = \alpha(s)\alpha(t)e^{-i\beta(t)s} \\ \beta(s+t) = \beta(s) + \beta(t) \end{cases} \tag{10}$$

la première équation ayant été obtenue en faisant $x = 0$ et la seconde à partir de la première. Du fait que β est croissante, on déduit qu'elle est presque partout continue, en particulier mesurable. On applique le lemme 4.1.1, on trouve donc un $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $\beta(x) = \rho x$. La croissance de β entraîne $\rho \geq 0$.

D'autre part, les égalités (7) et (9) et le fait que le quotient $q(x-t)/q(x)$ soit mesurable en (x,t) et continue en x pour chaque t fixé entraînent que α est mesurable. Posons alors

$$\gamma(t) := \alpha(t)e^{i\rho\frac{t^2}{2}},$$

ce qui définit une fonction également mesurable. La première égalité de (10) nous donne la nouvelle équation

$$\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t).$$

Sachant que $\gamma(t) \in \mathbb{T}$, 4.1.2 nous donne l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma(t) = e^{i\lambda t}$, ce qui s'écrit encore

$$\alpha(t) = e^{-i(\rho\frac{t^2}{2}-\lambda t)}.$$

Or,

$$q(x-t) = q(x)\Theta_t(x) = q(x)e^{i(-\rho\frac{t^2}{2}+\lambda t+\rho t x)}.$$

Ainsi, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $t > 0$,

$$q(x_0-t) = q(x_0)e^{i(-\rho\frac{t^2}{2}+\lambda t+\rho t x_0)}$$

ou encore, pour $y < x_0$,

$$q(y) = c_{x_0}e^{i(-\rho\frac{y^2}{2}-\lambda y)}.$$

Cette dernière égalité étant vraie pour tout x_0 et tout $y < x_0$, en prenant $x_0 \neq x_1$ et $y < \min(x_0, x_1)$ on trouve que $c_{x_0} = c_{x_1} = c$, et l'égalité a donc lieu pour tout $y \in \mathbb{R}$, ce qui termine la démonstration. □

3. Sous-espaces invariants hyperboliques

On remplace dans cette derniere section, toujours en suivant un article de Katavolos & Power, le semi-groupe de translation par le semi-groupe de dilatation $\{V_t\}_{t\geq 0}$ où, si $t \in \mathbb{R}$,

$$V_t : \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto (& x \mapsto e^{\frac{t}{2}} f(e^t x)) \end{array}$$

On voit tout de suite que

$$\|V_t f\|^2 = e^t \int_{\mathbb{R}} |f(e^t x)|^2 dx = \|f\|^2 ,$$

V_t est donc unitaire pour tout $t \geq 0$ et de plus, $V_t^{-1} = V_{-t}$. On va voir que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $V_t H^2_+ \subset H^2_+$ ce qui entraine en particulier que $V_t H^2_+ = H^2_+$ pour tout $t \geq 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} e^t |f(e^t x + ie^t y)|^2 dx = \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x + ie^t y)|^2 dx = \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx < \infty.$$

Le but de cette section est de caractériser les sous-espaces simultanément invariants sous l'action de $\{V_t\}_{t\geq 0}$ et du semi-groupe de multiplication. Dans le cas d'un sous-espace de la forme $L^2(E)$, il n'est pas très difficile de répondre à la question.

Proposition 4.3.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable tel que $L^2(E)$ est invariant sous l'action de V_t pour tout $t \geq 0$. Alors, $E = (-a, b)$ pour certains $0 \leq a, b \leq \infty$.*

Démonstration. V_t étant un opérateur de dilatation, on voit de la même manière qu'à la proposition 3.1.1 qu'on doit avoir $e^{-t}E \subset E$ pour tout $t \geq 0$. Si $a < 0$ est dans E, alors $e^{-t}a \in E$ pour tout $t \geq 0$, ainsi $[a, 0) \subset E$. Si $b \geq 0$ tel que $b \in E$ alors de la même manière, $(0, b] \in E$. Le résultat suit. □

On veut maintenant, comme on l'a fait dans la section précédente pour le semi-groupe de translation, déterminer les fonctions unimodulaires q telles que qH^2_+ soit dans le treillis de $\{V_t\}_{t\geq 0}$. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 4.3.2. *On a une paramétrisation de l'ensemble des sous-espaces $1-$invariants sous l'action des deux semi-groupes $\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}$ et $\{V_t\}_{t\geq 0}$.*

$$\mathcal{M} \in Lat(\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}, \{V_t\}_{t\geq 0}) \Longleftrightarrow \mathcal{M} = e_{\lambda,\mu} u_{s,\theta} H^2_+,\ (\lambda, \mu, s, \theta) \in (\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{T},$$

où $e_{\lambda,\mu}(x) = e^{i(\lambda x + \mu x^{-1})}$ et

$$u_{s,\theta}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \theta e^{s\pi}, & x \leq 0 \end{cases}$$

Démonstration. On commence par montrer qu'un tel sous-espace est bien simultanément invariant sous l'action de ces deux semi-groupes. Fixons donc $(\lambda, \mu, s, \theta) \in (\mathbb{R}_+)^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Notons tout d'abord que $e_{\alpha,\beta}$ est une fonction intérieure si $\alpha \geq 0$ et $\beta \leq 0$:

$$|e_{\alpha,\beta}(z)| = e^{-\lambda \mathrm{Im}(z)\lambda} e^{-|\mu| \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}}.$$

Cette dernière fonction tend vers 0 lorsque $\mathrm{Im}(z) \to 0$ et est bornée par 1 sur $\mathbb{C}^+$, elle est donc dans H^∞_+. Il est clair que $|e_{\alpha,\beta}(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, d'où le résultat annoncé. Pour $f \in H^2_+$, on a

$$V_t e_{\lambda,\mu} f(x) = e_{\lambda,\mu}(x)(e^{i\lambda(e^t-1)x}e^{i\mu(e^{-t}-1)x^{-1}})V_t f(x).$$

Or, pour $t \geq 0$, $\lambda(e^t - 1) \geq 0$ et $\mu(e^{-t} - 1) \leq 0$. Ainsi, $\Theta_{\lambda,\mu,t} := e^{i\lambda(e^t-1)x}e^{i\mu(e^{-t}-1)x^{-1}}$ est intérieure donc $V_t e_{\lambda,\mu} f = e_{\lambda,\mu}\Theta_{\lambda,\mu,t}V_t f$. D'autre part, en notant $g_s(z) = e^{is\log z} = z^{is}$, où le logarithme est défini sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$ avec valeur principale de l'argument, on a $g_{s,\theta}(x) = u_{s,\theta}(x)g_s(x)$ en ayant posé

$$g_{s,\theta}(x) = \begin{cases} e^{is\log|x|}, & x > 0, \\ \theta e^{is\log|x|}, & x \leq 0. \end{cases}$$

Mais, $g_{s,\theta}$ est une fonction unimodulaire qui vérifie

$$V_t g_{s,\theta}(x)f(x) = e^{\frac{t}{2}}(\chi_{\mathbb{R}_{>0}}(e^t x) + \theta\chi_{\mathbb{R}_{\leq 0}}(e^t x))e^{is\log e^t|x|}f(e^t x) = e^{ist}g_{s,\theta}(x)V_t f(x).$$

Du fait que $V_t H^2_+ = H^2_+$, on en déduit que $V_t g_{s,\theta}H^2_+ = g_{s,\theta}V_t H^2_+ = g_{s,\theta}H^2_+$. Cependant,

$$0 < \min(e^{s\pi}, 1) \leq |g_s| \leq \max(e^{s\pi}, 1) < \infty,$$

et il suit que que $V_t u_{s,\theta}H^2_+ = u_{s,\theta}H^2_+$. En résumé,

$$\begin{aligned} V_t e_{\lambda,\mu}u_{s,\theta}H^2_+ &= e_{\lambda,\mu}\Theta_{\lambda,\mu,t}V_t u_{s,\theta}H^2_+ \\ &= e_{\lambda,\mu}\Theta_{\lambda,\mu,t}u_{s,\theta}H^2_+ \\ &\subsetneq e_{\lambda,\mu}u_{s,\theta}H^2_+ \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $\mathcal{M}$ un sous-espace $1-$invariant sous $\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}$ et invariant sous l'action de $\{V_t\}_{t\geq 0}$. En particulier, $\mathcal{M} = qH^2_+$ pour une certaine fonction unimodulaire q. Par ailleurs, $V_t\mathcal{M}$ est également $1-$invariant sous $\{e^{i\tau\cdot}\}_{\tau\geq 0}$:

$$e^{i\tau\cdot}V_t\mathcal{M} = V_t e^{i\tau e^{-t}\cdot}\mathcal{M} \subset V_t\mathcal{M}.$$

Ainsi, pour chaque $t \geq 0$, il existe une fonction unimodulaire q_t telle que $V_t\mathcal{M} = q_t H^2_+$. Or par hypothèse, $V_t\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ ou encore $q_t H^2_+ \subset qH^2_+$, et en appliquant la proposition 1.5.8 on a que $q_t\overline{q}$ s'étend en une fonction intérieure Θ_t ce qu'on écrit $V_t\mathcal{M} = \Theta_t qH^2_+$. Mais

$$V_t\mathcal{M} = V_t qH^2_+ = q(e^t\cdot)H^2_+,$$

il suit que, en multipliant éventuellement Θ_t par une constante unimodulaire,

$$\Theta_t(x)q(x) = q(e^t x) \quad \text{p.p } x.$$

Pour $s, t \geq 0$, on a la relation

$$\Theta_{s+t}(x) = \frac{q(e^{s+t}x)}{q(x)} = \frac{q(e^{s+t}x)}{q(e^s x)} \cdot \frac{q(e^s x)}{q(x)} = \Theta_t(e^s x)\Theta_s(x) \tag{11}$$

valable pour presque tout x. Cette relation de cocyclicité nous apprend que $\Theta_t(e^s\cdot)$ divise Θ_{s+t}. Comme dans la section précédente, si $0 \leq t < s$, alors Θ_t divise Θ_s. En regroupant ces deux informations, on voit que si $0 \leq r < s - t$, alors la fonction $\Theta_t(e^r\cdot)$ divise Θ_s. Il suit que si Θ_t s'annule dans le demi-plan supérieur en un point z_0, alors Θ_s s'annule en $e^{-r}z_0$ pour tout $r < s - t$, ce qui contredit le principe des zéros isolés, ainsi Θ_t ne s'annule pas et a donc la forme

$$\Theta_t(z) = \alpha(t)e^{i\beta(t)z}\exp(i\int_{\mathbb{R}}\frac{uz+1}{u-z}d\mu_t(u)), \qquad (\mathrm{Im}(z) > 0),$$

où $\alpha(t) \in \mathbb{T}$, $\beta(t) \geq 0$ et μ_t est une mesure positive finie singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. En écrivant explicitement le fait que $\Theta_t(e^r\cdot)$ divise Θ_s on arrive, comme dans la section précédente à l'aide de la caractérisation des fonctions harmoniques positives, à la conclusion que si l'on définit deux mesures ν_t et ν_s en posant $d\nu(u) = (1+u^2)d\mu(u)$, on a $d\nu_t(e^r u) \leq d\nu_s(u)$ et que $\beta(s) - e^r\beta(t) \geq 0$. Cette dernière inégalité nous donne la croissante de β.

En ce qui concerne la mesure μ_t, on montre que son support est contenu dans $\{0\}$: on définit alors sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ une nouvelle mesure σ en posant, pour A borélien,

$$\sigma(A) := \int_0^{s-t} \nu_t(e^r A)dr.$$

Cette nouvelle mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ce qui se montre comme dans la section précédente. Pour tout borélien A, elle vérifie $\sigma(A) \leq (s-t)\nu_s(A)$. Ainsi, comme $\nu_t \perp m$, on a $\sigma \equiv 0$ ce qui entraine que pour tout borélien A de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a $\nu_t(e^r A)$ presque partout sur $(0, s-t)$. Ainsi, $\nu_t \equiv 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, il en est de même pour μ_t. Notant, $\gamma(t) := \mu_t(\{0\}) \geq 0$, on a que

$$\Theta_t(x) = \alpha(t)e^{i\beta(t)x}e^{-i\gamma(t)x^{-1}}.$$

L'inégalité sur les mesures, utilisée pour $\{0\}$, nous donne également la croissante de γ. On applique maintenant l'équation (11) pour trouver :

$$\alpha(s+t)e^{i\beta(s+t)x}e^{-i\gamma(s+t)x^{-1}} = \alpha(t)e^{i\beta(t)e^s x}e^{-i\gamma(t)e^{-s}x^{-1}}\alpha(s)e^{i\beta(s)x}e^{-i\gamma(s)x^{-1}}$$

ce qui se réécrit

$$\alpha(s+t) = \alpha(s)\alpha(t)e^{ix(\beta(t)e^s+\beta(s)-\beta(s+t))}e^{ix^{-1}(\gamma(t)e^{-s}+\gamma(s)-\gamma(s+t))}$$

le terme de gauche étant réel, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(s+t) = \alpha(s)\alpha(t) \\ \beta(s+t) = \beta(t)e^s + \beta(s) \\ \gamma(s+t) = \gamma(t)e^{-s} + \gamma(s) \end{array}\right. \tag{12}$$

Les fonctions β et γ étant croissantes, on peut appliquer le lemme 4.1.3 pour trouver que

$$\beta(t) = \lambda(e^t - 1) \text{ et } \gamma(t) = \mu(1-e^{-t}) \text{ pour certains } \lambda, \mu \geq 0.$$

D'autre part, comme

$$\frac{q(e^t x)}{q(x)} = \alpha(t)e^{i\lambda(e^t-1)x}e^{-i\mu(1-e^{-t})x^{-1}} \tag{13}$$

et que le quotient est mesurable en (x,t) et continu en x pour chaque t fixé, on en déduit que le quotient, et donc α, est mesurable en t. Il en découle, à l'aide du lemme 4.1.2 que

$$\alpha(t) = e^{i\sigma t}, \qquad \sigma \in \mathbb{R}.$$

On pose alors

$$u(x) := \exp(i\sigma\log|x|)e_{\lambda,\mu}(x).$$

La formule (13) affirme alors que, pour chaque $t \geq 0$, on a

$$\frac{u(e^t x)}{u(x)} = \frac{\exp(i\sigma t + i\sigma \log|x|)}{\exp(i\sigma \log|x|)} \cdot \frac{\exp(i(\lambda e^t x + \mu e^{-t} x^{-1}))}{\exp(i(\lambda x + \mu x^{-1}))} = \alpha(t) e^{i\lambda(e^t - 1)x} e^{-i\mu(1-e^{-t})x^{-1}} = \frac{q(e^t x)}{q(x)}$$

pour presque tout x. On définit maintenant $v := q\overline{u} = q/u$ et l'équation précédente se réécrit

$$v(e^t x) = v(x) \tag{14}$$

presque partout en x, pour chaque $t \geq 0$. En fait, cette relation est encore vraie presque partout en x pour chaque t réel : soit $t < 0$, alors pour presque tout $y = e^{-t}x$,

$$v(e^t y) = v(e^t e^{-t} x) = v(e^{-t} x) = v(y).$$

On montre maintenant que v ne prend que deux valeurs sur $\mathbb{R}$ et est constante sur chacune des demi-droites $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$. Soit $f(x, y) := |v(xy) - v(x)|$. Par hypothèse (la relation (14)), pour chaque $y > 0$, il existe un ensemble A_y de mesure pleine tel que $f(x, y) = 0$ pour $x \in A_y$. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = 0 \text{ pour chaque } y > 0,$$

ce qui implique clairement que $\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = 0$. Par le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} f(x, y) dy dx = 0$$

et donc, l'existence d'un ensemble de mesure pleine sur $\mathbb{R}$ pour les élements x duquel on a $\int_{\mathbb{R}^+} f(x, y) dy = 0$. Prenons $x_1 > 0$ et $x_2 < 0$ à l'intérieur de cet ensemble. Ainsi, presque partout en $y > 0$, on a $f(x_i, y) = 0$ pour $i = 1, 2$. Il suit que $v(x) = v(x_1)$ pour presque tout $x > 0$ et $v(x) = v(x_2)$ pour presque tout $x < 0$.

On conclut donc que, à une constante multiplicative unimodulaire près, $q = vu$ est de la forme $g_{\sigma,\theta} e_{\lambda,\mu}$, ce qui termine la démonstration. □

Bibliographie

[1] S. Agmon, Sur un problème de translations. *C.R. Acad. Sci. Paris.,* **229** (1948), n°11, 540-542

[2] E. Amar & E. Matheron, Analyse complexe. Cassini, Paris. (2004)

[3] S.R. Caradus, Universal operators and invariant subspaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **23** (1969), 526-527

[4] P. Enflo, On the invariant subspace problem in Banach spaces. *Séminaire Maurey-Schwartz (1975-1976) Espaces Lp applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach*, Exp. **14-15**, Centre Math. École Polytech. Palaiseau. (1976)

[5] E.A Gallardo-Gutièrrez & J.R. Partington, Invariant subspaces for translation, dilation and multiplication semigroups (preprint, 2007)

[6] J.B. Garnett, Bounded analytic functions, *Pure and applied mathematics* **96**, Academic Press (1981)

[7] A. Katavolos & S.C. Power, The Fourier binest algebra. *Math. Proc. Cambride Philos. Soc.*, **122** (1997), n°3, 525-539

[8] A. Katavolos & S.C. Power, Translation and dilation invariant subspaces of $L^2(\mathbb{R})$. *J. Reine Angew. Math.*, **552** (2002), 101-129

[9] N.K. Nikolski, Operators, functions and systems : An Easy Reading, Volume 1. *Mathematical Surveys and Monographs* **92**. American Mathematical Society, Providence, RI. (2002)

[10] N.K. Nikolski, Operators, functions and systems : An Easy Reading, Volume 2. *Mathematical Surveys and Monographs* **93**. American Mathematical Society, Providence, RI. (2002)

[11] V. Matache, On the minimal invariant subspaces of the hyperbolic composition operator. *Proc. Amer. Math. Soc.,* **119** (1993), n°3, 837-841

[12] E. Nordgren, P. Rosenthal & F.S. Wintrobe, Invertible composition operators on H^p. *J. Funct. Anal.*, **73** (1987), 324-344

[13] C.J. Read, A solution to the invariant subspace problem. *Bull. London Math. Soc.* **16** (1984), no. 4, 337-401

[14] W.C. Ridge, Approximate point spectrum of a weighted shift. *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, **147** (1970), n°2, 349-356

[15] A.L. Shields, Weighted shift operators and analytic function theory, *Mathematical Surveys* **13**. Amer. Math. Soc., Providence. (1974)