Université Bordeaux 1
TD de MHT 411
2008/2009

DEVOIR MAISON N°1 : SOLUTION

Exercice 1. $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$

(1) On veut montrer l'équivalence

$$f \text{ injective } \iff A \cup B = E$$

(i) On veut montrer que f injective implique que $A \cup B = E$. On procède par **contraposée**, c'est à dire on suppose que l'on a pas $A \cup B = E$ (c'est à dire qu'on a $A \cup B \neq E$) et on va montrer que f n'est pas injective.

$A \cup B \neq E$ donc il existe un élément $x \in E$ tel que $x \notin A \cup B$. On a donc $f(\{x\}) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$. Or, $\{x\} \neq \emptyset$ et f n'est donc pas injective.

(ii) Réciproquement, on suppose que $A \cup B = E$. On veut montrer que f est injective. Soient donc X, Y deux élements de $\mathcal{P}(E)$ qui ont la même image par f. On veut montrer qu'ils sont égaux.

$$f(X) = f(Y) \iff (X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B) \iff \begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases}$$

Mais $A \cup B = E$ ce qui veut dire que

$$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y.$$

On a bien montré l'équivalence voulue.

(2) Ici, on veut montrer une autre équivalence

$$f \text{ surjective } \iff A \cap B = \emptyset$$

(i) Supposons que f soit surjective. Prenons $x \in A$. On va montrer que $x \notin B$, ce qui impliquera que $A \cap B = \emptyset$. Par surjectivité de f, il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = (\{x\}, \emptyset)$ c'est à dire que $X \cap A = \{x\}$ et $X \cap B = \emptyset$. En particulier, $x \in X$ et si on avait $x \in B$, on aurait $X \cap B \neq \emptyset$, donc $x \notin B$.

On pouvait aussi faire cette question par contraposée : on suppose que $A \cap B \neq \emptyset$, on a donc un $x \in A \cap B$ et il est facile de voir que $(\{x\}, \emptyset)$ n'a pas d'antécédent par f...

(ii) Supposons maintenant que $A \cap B = \emptyset$. On veut montrer que f est surjective : prenant $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ on veut trouver $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = (C, D)$. On voit que $X = C \cup D$ convient. En effet,

$$X \cap A = (C \cup D) \cap A = (C \cap A) \cup (D \cap A) = C \cup \emptyset = C$$

car $C \subset A$ et $D \cap A \subset B \cap A = \emptyset$. De la même manière, on voit que $X \cap B = D$. Ainsi, f est bien surjective.

(3) D'après les deux premieres questions, on voit que f est bijective si et seulement si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$. On dit que $\{A, B\}$ forme une partition de E.

Exercice 2.

Il y avait une coquille dans l'énoncé, en effet la propriété de l'énoncé vérifiée par la famille $\mathcal{F}$ entraine que deux éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont automatiquement en relation...

Correction : la famille $\mathcal{F}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2,\ \exists C \in \mathcal{F} \text{ tel que } C \subset A \cap B.$$

(1) On montre que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :

(i) réflexivité : Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. $\forall C \in \mathcal{F}$, on a clairement $C \cap X = C \cap X$. Donc $X \mathcal{R} X$ et la relation est bien reflexive.

(ii) symétrie : Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \mathcal{R} Y$. On a donc l'existence d'un $C \in \mathcal{F}$ tel que $C \cap X = C \cap Y$ mais alors $C \cap Y = C \cap X$ donc $Y \mathcal{R} X$.

(iii) transitivité : Soient $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X\mathcal{R}Y$ et $Y\mathcal{R}Z$. Il existe donc $A, B \in \mathcal{F}$ tels que $A \cap X = A \cap Y$ et $B \cap Y = B \cap Z$. Il suit que $(A \cap B) \cap X = (A \cap B) \cap Y = (A \cap B) \cap Z$. Cependant $A \cap B$ n'est pas forcément un élément de $\mathcal{F}$! ! Mais par hypothèse sur la famille $\mathcal{F}$, on sait qu'il existe $C \in \mathcal{F}$ tel que $C \subset A \cap B$. Et on a bien $C \cap X = C \cap Y = C \cap Z$ et donc $X\mathcal{R}Z$.

(2) Par définition

$$cl(X) := \{Y \in \mathcal{P}(E) : \ X\mathcal{R}Y\} = \{Y \in \mathcal{P}(E) : \ \exists C \in \mathcal{F}, \ C \cap X = C \cap Y\}.$$

On veut montrer que

$$cl(X) = \{Y \in \mathcal{P}(E) : \ Y = (A \cap X) \cup B, \ A \in \mathcal{F}, \ B \subset A^c\} =: Z(X).$$

Soit $Y \in cl(X)$. Par définition, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $A \cap X = A \cap Y$. Tout partie M de E peut s'écrire comme $M = (M \cap A) \cup (M \cap A^c)$. En particulier,

$$Y = (A \cap Y) \cup (Y \cap A^c) = (A \cap X) \cup B$$

où on a noté $B := Y \cap A^c \subset A^c$. Donc $Y \in Z(X)$ et on a l'inclusion $cl(X) \subset Z(X)$.

Réciproquement, soit $Y \in Z(X)$. On a alors que $Y = (A \cap X) \cup B$ pour certains $A \in \mathcal{F}$ et $B \subset A^c$. Mais alors,

$$A \cap Y = (A \cap (A \cap X)) \cup (A \cap B) = A \cap X$$

car $A \cap B \subset A \cap A^c = \emptyset$. Donc $X\mathcal{R}Y$, c'est à dire que $Y \in cl(X)$ et $Z(X) \subset cl(X)$.

On a bien montré $cl(X) = Z(X)$.

Exercice 3.

(1) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :

(i) réflexivité : clairement $|z|z = z|z|$ donc $z\mathcal{R}z$.

(ii) symétrie : Soient z, z'tels que $z\mathcal{R}z'$ c'est à dire que $|z|z' = z|z'|$ c'est la même chose que de dire que $|z'|z = z'|z|$ et donc $z'\mathcal{R}z$.

(iii) transitivité : Soient $z\mathcal{R}z'$ et $z'\mathcal{R}z"$. On a donc $|z| = \frac{z|z'|}{z'}$ et $|z'| = \frac{z'|z"|}{z"}$ donc $|z|z" = \frac{z"|z'|z}{z'} = \frac{z'|z"|z}{z'} = |z"|z$ et donc $z\mathcal{R}z"$.

On voit facilement que $cl(z) = \{z' : \ \mathrm{Arg}(z') = \mathrm{Arg}(z)\}$.

(2) $f : \mathbb{C}^* \to U$, $f(z) = \frac{z}{|z|}$. Si $z \in U$, alors $|z| = 1$ et on voit que $f(z) = z$ donc f est surjective. De plus, f n'est pas injective car deux éléments qui ont même argument ont même image par f : $f(\rho e^{i\theta}) = e^{i\theta} = f(\rho' e^{i\theta})$.

Pour les autres questions, il suffit d'appliquer les résultats de l'exercice 13 de la feuille de TD numéro 1 :

l'existence et l'unicité sont données par le théorème de factorisation qui s'applique si s est surjective (ce qui est le cas) et si

$$s(z) = s(z') \Longrightarrow f(z) = f(z').$$

De plus, on a vu dans ce même exercice que la surjectivité de f entraînait la surjectivité de $\tilde{f}$ et que $\tilde{f}$ était injective si et seulement si

$$f(z) = f(z') \Longrightarrow s(z) = s(z').$$

Tout cela est trivialement vérifié.