

FEUILLES D'EXERCICES N°3 : DIAGONALISATION

STE 303 - ANNÉE 201/2011

Rappel. Le polynôme caractéristique d'une matrice A est défini par

$$P_A(X) := \det(A - XI_3).$$

C'est un polynôme de degré 3 dont les racines sont appelées *valeurs propres* de A .

Exercice 1. On considère l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ et les valeurs propres de A .

(2) Trouver une base de \mathbb{R}^3 constituée de vecteurs propres de A .

(3) Dans cette base, quelle est la matrice D de f ? Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres; écrire la matrice P . Quelle relation y a-t-il entre D , P et A ?

Exercice 2. On considère l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ et les valeurs propres de A .

(2) Trouver une base de \mathbb{R}^3 constituée de vecteurs propres de A .

(3) Dans cette base, quelle est la matrice D de f ? Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres; écrire la matrice P . Quelle relation y a-t-il entre D , P et A ?