FEUILLE N°4 : GÉOMÉTRIE & ANALYSE VECTORIELLES

STE 303 - ANNÉE 2010/2011

Part 1. *Rappels du cours.*

1. Géométrie Vectorielle

On se place dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$ noté $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Si M est un points de coordonées (x, y, z), alors le vecteur

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

et on a

$$OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

De plus, soient veux vecteurs

$$\overrightarrow{u} = x_1\,\overrightarrow{i} + x_2\,\overrightarrow{j} + x_3\,\overrightarrow{k},$$
$$\overrightarrow{v} = y_1\,\overrightarrow{i} + y_2\,\overrightarrow{j} + y_3\,\overrightarrow{k}.$$

On rappelle que le *produit sclaire* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est donné par

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

et que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. On remarque aussi que

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}.$$

Mais, si $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ désigne l'angle orienté formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a aussi la relation

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}).$$

D'autre part, le *produit vectoriel* de deux vecteurs est un vecteur qui est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$ est qui est donné par

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\,\overrightarrow{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\,\overrightarrow{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\overrightarrow{k}.$$

2. Analyse Vectorielle

On appelle *champ scalaire* une application f qui à un point $M(x, y, z)$ de l'espace associe un réel $f(M)$ et on appelle *champ de vecteurs* une application $\overrightarrow{F}$ qui à un point $M(x, y, z)$ de l'espace associe un vecteur $\overrightarrow{F}(M)$.

Pour un champ scalaire f on calcule le *gradient* de f, qui est un champ de vecteurs et qui est donné par

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M(x, y, z))\,\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(M(x, y, z))\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(M(x, y, z))\,\overrightarrow{k}.$$

On dit qu'un champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ *dérive d'un potentiel scalaire* si il existe un champ scalaire f tel que

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f.$$

On introduit également le *rotationnel d'un champ de vecteurs* $\overrightarrow{F}$ par le formule

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F} = \nabla \wedge \overrightarrow{F}$$

où

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

et donc plus précisément, si

$$\overrightarrow{F}(M(x,y,z)) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

(ce qu'on note $\overrightarrow{F} = (P,Q,R)$) alors

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y}R - \frac{\partial}{\partial z}Q\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}P - \frac{\partial}{\partial x}R\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P\right)\overrightarrow{k}.$$

Et on a le **théorème** suivant :

Soit $\overrightarrow{F} = (P,Q,R)$ un champ de vecteurs. Si $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire. En particulier, il existe un champ scalaire f tel que

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Puis, on définit la *divergence* d'un champ de vecteur $\overrightarrow{F} = (P,Q,R)$ par

$$\text{div}\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \in \mathbb{R}.$$

Enfin, le *Laplacien* d'un champ scalaire f est donné par la formule

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \in \mathbb{R}.$$

Part 2. **Exercices**

Exercice 1. Soient a et b deux vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^3$. Montrer que l'on a

$$a \wedge (a \wedge b) = -\|a\|^2 b.$$

Exercice 2. Soit

$$\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{i} + -\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$$

et

$$\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}.$$

Trouver un vecteur $\overrightarrow{w}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exercice 3. Pour deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, établir l'égalité suivante

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 4\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}.$$

Exercice 4. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et $\overrightarrow{w}$ supposé non nul, défini par

$$\overrightarrow{w} = \|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{u} + \|\overrightarrow{u}\|\,\overrightarrow{v}.$$

Calculer $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}})$ et $\cos(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}})$.

Exercice 5. On considère le point $A(1,2,1)$ et les vecteurs $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$.
(1) Déterminer l'équation cartésienne du plan P passant par A et engendré par les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.
(2) En déduire un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal au plan P et de norme 1.

Exercice 6. Soit D la droite engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + -\overrightarrow{k}$ et passant par le point $A(0,1,-5)$. Calculer la distance d du point $P(2,1,-1)$ à la droite D.

Exercice 7. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes puis donner leur gradient :
(1) $f(x,y) = yx^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ définie sur $\mathbb{R}^2$;
(2) $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
(3) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ définie sur $\mathbb{R}^3$;
(4) $f(x,y,z) = e^{x\cos y + \ln(1+z^2)}$ définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8. (*Calcul de gradient, divergence et rotationnel)*
(1) Soit le champ scalaire défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$M(x,y,z) \mapsto f(M) = f(x,y,z) = 3x^2y - y^3z.$$

Calculer

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$$

au point $M_0(1,-2,-1)$.
(2) Soit le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$M(x,y,z) \mapsto \overrightarrow{F}(M) = x^2z\,\overrightarrow{i} - 2y^3z^2\,\overrightarrow{j} + xy^2z\,\overrightarrow{k}.$$

Calculer

$$\text{div}\,\overrightarrow{F}(M)$$

au point $M_0(1,-1,1)$.
(3) Soit le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$M(x,y,z) \mapsto \overrightarrow{F}(M) = xz^3\,\overrightarrow{i} - 2x^2yz\,\overrightarrow{j} + 2yz^4\,\overrightarrow{k}.$$

Calculer

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F}(M)$$

au point $M_0(1,1,0)$.

Exercice 9. (*Formules sur le gradient)*
Soient f et g deux champs scalaires et M un point de l'espace. Montrer qu'on a les relations suivantes:
(1) $\overrightarrow{\text{grad}}(f(M) + g(M)) = \overrightarrow{\text{grad}}(g(M)) + \overrightarrow{\text{grad}}(g(M))$;
(2) $\overrightarrow{\text{grad}}(f(M)g(M)) = f(M)\overrightarrow{\text{grad}}(g(M)) + g(M)\overrightarrow{\text{grad}}(f(M))$.

Exercice 10. (*Formules classiques)*
Soit λ un champ scalaire et $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{G}$ deux champs de vecteurs. Démontrer les formules suivantes:

(1) $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{F}\right) = 0$;
(2) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\lambda\right) = \overrightarrow{0}$;
(3) $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{F}+\overrightarrow{G}\right) = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{F}\right)+\operatorname{div}\left(\overrightarrow{G}\right)$;
(4) $\operatorname{div}\left(\lambda\overrightarrow{F}\right) = \lambda\operatorname{div}\left(\overrightarrow{F}\right)+\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\lambda$;
(5) $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{F}\wedge\overrightarrow{G}\right) = \overrightarrow{G}\cdot\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{F}-\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{G}$;
(6) $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\lambda\right) = \Delta\lambda$;
(7) $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{F}\wedge\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{i}$.

Exercice 11. *(Potentiel scalaire - 1)*
On considère le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{F} = \left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)\overrightarrow{j}+\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)\overrightarrow{k},$$

défini sur

$$\mathbb{U} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x>0,\ y>0,\ z>0\right\}.$$

(1) Montrer que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire;
(2) Trouver les potentiels dont il dérive.

Exercice 12. *(Potentiel scalaire - 2)*
On considère le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{F} = \left(3x^2+3y-1\right)\overrightarrow{i}+\left(z^2+3x\right)\overrightarrow{j}+(2yz+1)\overrightarrow{k}.$$

(1) Montrer que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire;
(2) Trouver un potentiel dont il dérive.