SVE 101 - Année 2010/2011
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~fgaunard

FEUILLE D'EXERCICES N°1 : CALCUL INTÉGRAL

Exercise 1. Vrai ou Faux (justifier votre réponse)

(*i*) $\int_{-1}^{3}\left(\cos(2x)+x^3\right)dx = \int_{-1}^{3}\cos(2x)dx + \int_{-1}^{3}x^3dx$;

(*ii*) $\int_{-1}^{3}\cos(2x)dx = 2\int_{-1}^{3}\cos(x)dx$;

(*iii*) $\int_{-1}^{3}\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{6}\cos(x)dx$;

(*iv*) $\int_{-1}^{3}\left(\cos(2x)+x^3\right)dx = \int_{0}^{3}\cos(2x)dx + \int_{-1}^{0}x^3dx$;

(*v*) Si $\int_0^2 f(x)dx = 0$ alors $f(x)=0$ pour $x\in[0,2]$;

(*vi*) $\left(\int_{-1}^{1} f(x)dx\right)^2 = \int_{-1}^{1} f(x)^2dx$;

(*vii*) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Exercise 2. Calculer les intégrales suivantes

$$(i)\ \int_0^1 x^3dx,\quad (ii)\ \int_1^4 \frac{1}{x^2}dx,\quad (iii)\ \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx,\qquad (iv)\ \int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx.$$

Exercise 3. Donner des primitives des fonctions suivantes et préciser leur intervalle de définition maximal

$$(i)\ x\mapsto \frac{1}{x-2},\qquad (ii)\ x\mapsto\cos(3x-5),\qquad (iii)\ x\mapsto\frac{x^2-3x+4}{x},\qquad (iv)\ x\mapsto\sin(x)\cos(x).$$

Exercise 4. Trouver deux réels a et b tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,4\}$, on ait la relation

$$\frac{1}{x^2-4x-5} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}.$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-4x-5}dx.$$

Exercise 5. En intégrant par parties, calculer les intégrales suivantes

$$(i)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx,\quad (ii)\ \int_0^{\pi}\left(x^2-x+1\right)\sin(3x)dx,\quad (iii)\ \int_0^1\left(1-x^2\right)e^{-x}dx.$$

Exercise 6. En effectuant deux intégrations par parties succéssives, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin(x)dx.$$

Exercise 7. On rappelle que pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on définit $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

(1) Exprimer la dérivée de la fonction tan en fonction de la fonction cos.

(2) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)}dt.$$

Exercise 8. A l'aide de changements de variables, calculer les intégrales suivantes

$$(i)\ \int_0^1 2xe^{x^2}dx, \qquad (ii)\ \int_0^{\ln 2} e^x\sqrt{e^x+3}, \qquad (iii)\ \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}dx, \qquad (iv)\ \int_0^1 \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}dx.$$

Exercise 9. Calculer l'intégrale suivante de deux manières différentes

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx.$$

Exercise 10. Soit $\lambda > 0$ un paramètre fixé.

(1) Calculer les trois intégrales

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx, \quad \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx, \quad \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx.$$

(2)* Proposer une valeur, pour $n \in \mathbb{N}$, de

$$\int_0^{+\infty} x^n\lambda e^{-\lambda x}dx.$$

Exercise 11. * Dans cet exercice on admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$.

(1) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

(2) Soient μ et σ deux paramètres fixés et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$. Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$