# Equations différentielles du premier ordre à coefficients constants.

**Exercice 1** *Résoudre les équations différentielles suivantes.*

1. $y' + 5y = 3$ *avec la condition initiale* $y(0) = 0$.
2. $y' = -3y + 4e^x$ *avec la condition initiale* $y(0) = -2$.
3. $y' + y = xe^{-x} + 1$ *avec la condition initiale* $y(1) = 0$.
4. $2y' + 4y = 6x^3 + 4x + 2$ *avec la condition initiale* $y(0) = -\frac{9}{4}$.
5. $y' - y = \sin(x) + 2\cos(x)$ *avec la condition initiale* $y(\pi) = 1$.
6. $y' = 3y + e^{3x}\sin(x)$ *avec la condition initiale* $y(0) = 0$.
7. $y' + y = (x^2 - 1)e^x + 2\cos(x)$ *avec la condition initiale* $y(0) = 0$.
8. $y' = y + \sin(x) + \sin(2x)$ *avec la condition initiale* $y(\pi) = 0$.

**Exercice 2** *On considère une population formé de $N$ individus et évoluant en fonction du temps $t > 0$.*

1. *Dans le modèle de Malthus on suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus.*
   *(a) Justifier que dans ce modèle $N$ vérifie l'équation* $\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = kN(t)$ *pour une certaine constante $k$. On suppose désormais que $N$ est dérivable. Déduire que $N'(t) = kN(t)$.*
   *(b) Déterminer $N(t)$ si à l'instant $t = 0$ la population est de $N_0$ individus.*
   *(c) Comment évolue cette population lorsque $t$ tend vers l'infini ?*
2. *Le modèle de Verhulst prend en compte que les ressources de l'environnement ne sont pas illimitées et suppose que le taux $k$ n'est plus constant mais proportionnel à la différence entre une population maximale $N^*$ et la population à l'instant $t$. On a alors $k(t) = r(N^* - N(t))$ et $N$ est solution de l'équation $N'(t) = rN(t)(N^* - N(t))$ (appelée équation logistique).*
   *(a) On admet que la population n'est jamais nulle et on pose $y(t) = 1/N(t)$. Justifier que $y$ est dérivable puis calculer $N'$ en fonction de $y$ et $y'$.*
   *(b) Remplacer $N'$ et $N$ par leurs expressions en fonctions de $y'$ et $y$ dans l'équation logistique et vérifier que $y$ est solution de l'équation différentielle*
   $$y' = r(1 - N^*y).$$
   *(c) Résoudre l'équation précédente.*
   *(d) En déduire que* $N(t) = \frac{N^*}{1 + Ke^{-rN^*t}}$ *avec une constante réelle $K$.*
   *(e) Comment évolue cette population lorsque $t$ tend vers l'infini ?*

**Exercice 3** *Il existent des épidemies qui guérissent quasiment sans aucun effet d'immunisation (la tuberculose, par exemple). On considère deux groupes de personnes : des susceptibles $S(t)$ et des infectants $I(t)$. Si on suppose aucune phase latente (une phase latente est une période d'infection pendant laquelle on ne peut pas transmettre l'infection), alors $S(t) + I(t)$ est constant, d'où $S'(t) + I'(t) = 0$. Le changement des deux groupes est modélisé par une fonction $f$ d'infection, on a donc $S' = -f(S, I)$ et par conséquent $I' = f(S, I)$. Il paraît logique d'avoir une proportionalité entre $f(S, I)$ et $S$ et $I$ d'où $f(S, I) = rSI$ avec une rate $r > 0$. La guérison se passe a une rate $a > 0$. On déduit comme modèle*

$$\begin{cases} S'(t) &= -rS(t)\,I(t) + aI(t) \\ I'(t) &= rS(t)\,I(t) - aI(t) \end{cases}$$

*avec des valeur initiales $S(0) = S_0$ et $I(0) = I_0$.*

1. *On pose $N = S_0 + I_0$. Montrer que les fonctions $u$ et $v$, définis par $u(t) = S(t/a)/N$ et $v(t) = I(t/a)/N$ satisfont*

$$\begin{cases} u + v & \equiv & 1 \\ u' & = & -(Ru-1)v \\ v' & = & (Ru-1)v \end{cases}$$

*avec des valeur initiales $u(0) = u_0 = S_0/N$ et $v(0) = v_0 = I_0/N$. Ici, $R = rN/a$ est en fait le nombre d'infections qu'un individu transmet pendant la phase d'infection en moyenne. Indication : dérivez les équations qui définissent $u$ et $v$ par rapport à $t$ et utilisez les équations différentiels que satisfont $S$ et $I$.*

2. *Montrer que $v$ satisfait l'équation logistique $v' = ((R-1) - Rv)v, \qquad v(0) = v_0$.*

3. *Utiliser les techniques de l'exercice précédente pour trouver une solution à cette équation. Indication : on pose $v^* = 1 - \frac{1}{R}$. Démontrer que*

$$v(t) = \frac{v_0 v^*}{v_0 + (v^* - v_0)\exp((1-R)t)}$$

4. *Discuter le comportement de la solution quand $t$ tend vers infini en fonction de $R$.*

**Exercice 4** *Pour les substances radioactives, des expériences ont montré que, en l'absence d'apport extérieur, le taux de variation du nombre $Q(t)$ d'atomes radioactifs est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents. La fonction $Q$ est donc solution de l'équation différentielle $y' = -\mu y$ où $\mu$ est une constante propre à la substance radioactive.*
*(a) On appelle temps de demi-vie pour une substance radioactive le temps $T$ nécessaire pour que la moitié de ses noyaux radioactifs disparaissent, trouver une relation reliant $T$ et $\mu$.*
*(b) Pour le carbone-14, $T$ est environ de 5730 ans, que vaut approximativement $\mu$ ?*
*(c) L'analyse des restes d'un arbre mort lors d'une éruption volcanique fait apparaître que l'arbre ne contient plus que 40% du carbone-14 qu'il contenait avant l'éruption. De quand date l'éruption si l'analyse a été effectuée en 2006 (penser à utiliser le temps de demi-vie du carbone-14).*
*(d) Même question avec une analyse plus fine qui donne 42%*

**Exercice 5** *Lorsque du glucose est introduit par intraveineuse dans le corps humain à débit constant, la variation de la concentration $c(t)$ du glucose dans le sang est donnée par :*

$$c'(t) = \frac{G}{100V} - kc(t)$$

*où $G$ est la valeur du débit de glucose (en milligrammes par min), $V$ est le volume du sang dans le corps (5l pour un adulte) et $k$ une constante positive.*

1. *Trouvez l'évolution de $c(t)$ en fonction du temps $t$.*
2. *La concentration du glucose dans le sang tend-elle vers une valeur limite ?*