Equations Différentielles du premier ordre à coefficients variables.

Exercice 1 *Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants en précisant l'intervalle maximal d'éxistence.*

1. $y'(x) = x\,y(x)$;
2. $y'(t) = \dfrac{2}{t+1}\,y(t)$;
3. $y'(x) = x^2\,y(x)$;
4. $t^2 y'(t) = y(t)$;
5. $y'(x) = e^x y(x)$;
6. $y'(x)\sqrt{4-x^2} = x\,y(x)$;
7. $y'(x) = \ln(x)\,y(x)$;
8. $y'(t) + \cos(t)\,y(t) = 0$;
9. $y'(x) = \sin(x)\cos(x)\,y(x)$.

Exercice 2 *Déterminer les solutions aux problèmes inhomogènes suivants en précisant l'intervalle maximal d'éxistence.*

1. $y'(x) = \dfrac{2}{x+1}y(x) + (x+1)^2\cos(x)$;
2. * $y'(x) + \cos(x)y(x) = \sin(x)\cos(x)$;
3. $xy' + 3y = x^2$;
4. $(1+x^2)\,y'(x) - 2x\,y(x) = (1+x^2)^2$;
5. $y'(x) + 2x\,y(x) = 2xe^{-x^2}$;
6. $y'(x) = x^2(1-y(x))$.

Exercice 3 *Déterminer les solutions (uniques !) des problèmes de l'exercice 1 satisfaisant les conditions respectives suivantes.*

1. $y(0) = 1$;
2. $y(1) = \pi$;
3. $y(1) = e$;
4. $y(2) = 1$;
5. $y(0) = e$;
6. $y(2) = 0$;
7. $y(1) = 1$;
8. $y(\pi) = 1$;
9. $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Exercice 4 * *Les problèmes suivants sont de la forme $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^n$. On les reduira à des problème linéaires de première ordre en substituant $z(x) = y(x)^{1-n}$. Donnez ensuite la solution unique et précisez l'intervalle maximal d'éxistence.*

1. $\begin{cases} y'(x) = y(x) + y(x)^2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'(x) = y(x) - 2xy(x)^3. \\ 2y(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} \end{cases}$