Equations Différentielles du second ordre à coefficients constants.

Exercice 1 *Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions, puis, la solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ pour les équations 1,2,4 et 6.*

1. $y'' + 2y' - 3y = -t + 1$.
2. $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$.
3. $y'' + 2y' - 3y = -t + 1 + e^{2t} + \cos t$.
4. $y'' - 6y' + 9y = 3 + e^{3t}$.
5. $y'' - 3y' = 3 + t^2$.
6. $y'' + y = t + \sin(2t)$.

Exercice 2 *Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes. Dans chaque cas déterminer la solution vérifiant les conditions initales $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$.*

1. $y'' + 5y' - 6y = e^x$.
2. $y'' + 5y' - 6y = e^{2x}(x^2 + 1)$.
3. $y'' + 5y' - 6y = \cos(3x)$.
4. $y'' - 2y' + y = x - 1 + e^x$.
5. $y'' - y' = x^2$
6. $y'' + y' + y = x + 1$.
7. $y'' + 4y = x + \sin(2x)$.

Exercice 3 ***Chute***
Le principe fondamental de la dynamique de Newton dit que le centre d'inertie d'un corps de masse m subit une accélération $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}_e$ où $\vec{F}_e$ est la somme des forces extérieures exercées sur l'objet.
On choisit un axe vertical repéré par le vecteur $\vec{\jmath}$ orienté vers le haut et d'origine O d'altitude 0. Ainsi le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{\jmath}$ et la vecteur accélération $\vec{a} = a(t)\vec{\jmath}$.

1. *Si $z(t)$ désigne l'altitude du centre d'inertie du corps à l'instant t, exprimer $a(t)$ en fonction de $z(t)$.*
2. *En l'absence de frottement, la seule force extérieure est la force de pesanteur $m\vec{g}$. En déduire que la fonction z satisfait l'équation différentielle*
$$z'' = -g.$$
Puis la résoudre en supposant que la position initiale est $z(0) = h$ et que le corps n'a pas de vitesse initiale.
3. *Avec frottements, on suppose que le corps est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse (hypothèse valable seulement pour une vitesse pas trop élevée). Vérifier que la fonction z vérifie alors l'équation différentielle*
$$z'' = -g - \frac{k}{m}z'$$
puis la résoudre.

4. *Dans le cas précédent, calculer la limite lorsque t tend vers l'infini de z', quelle interprétation pouvez-vous en donner ?*

Exercice 4 ***Masse suspendue à un ressort.***
On considère un corps ponctuel M de masse m suspendu à un ressort et plongé dans un milieu ayant une certaine viscosité (air, eau, huile, ...). On repère la position de M sur un axe vertical, repéré par un vecteur $\vec{\jmath}$ orienté vers le haut, et on prend pour origine la position d'équilibre de M. On note $y(t)$ la cote de M sur cet axe à l'instant t (soit $\overrightarrow{OM} = y(t)\vec{\jmath}$).

1. *En l'absence de force d'excitation agissant sur M , trois forces interviennent pour déterminer le mouvement de M, la force d'inertie proportionnelle à y'' (coefficient la masse m), la force de viscosité proportionnelle à y' (coefficient de viscosité $b > 0$) et la force de rappel proportionnelle à y (coefficient de raideur du ressort $c > 0$). Alors y vérifie l'équation*

$$my'' + by' + cy = 0.$$

   Résoudre cette équation en cas de
   (a) *Viscosité nulle ($b = 0$).*
   (b) *Viscosité faible (b petit tel que $b^2 - 4mc < 0$).*
   (c) *Viscosité grande (b grand tel que $b^2 - 4mc > 0$).*
   (d) *Dans chaque cas comment se comporte $y(t)$ lorsque t tend vers l'infini ? (Pour avoir une idée de l'allure de la courbe lorsque $b^2 - 4mc < 0$ on pourra utiliser, en l'ayant vérifié, que $A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = C\sin(\omega x + \varphi)$ avec $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ et φ tel que $\cos\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$.)*
2. *On suppose maintenant de plus que M est soumis à une force sinusoïdale de pulsation λ, soit*

$$my'' + by' + cy = k\sin\lambda t$$

   où k est une constante. Résoudre cette équation dans chacun des cas précédents.
3. *Que peut-on dire maintenant sur $y(t)$ lorsque t tend vers l'infini ?*