Probabilités conditionnelles.

Exercice 1 *Soit P une probabilité sur un espace Ω et $A \subset \Omega$. On suppose $P(A) \neq 0$. Calculer $P(\emptyset|A)$, $P(A|A)$, $P(\overline{A}|A)$, $P(\Omega|A)$.*

Exercice 2

1. *Mon voisin a deux enfants, l'ainée est une fille quelle est la probabilité que le cadet soit un garçon ?*
2. *Mon voisin a deux enfants, l'un est une fille quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?*

Exercice 3

1. *Une urne contient 10 boules, 7 rouges et 3 vertes.*
   (a) *On tire 2 boules avec remise ; quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?*
   (b) *On tire 2 boules sans remise ; quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?*
2. *Soit une urne contenant quatre boules blanches et trois boules noires. On tire une à une et sans remise trois boules de l'urne.*
   Quelle est la probabilité que la première boule soit blanche, la deuxième blanche et la troisième noire ?

Exercice 4 *On lance deux dés ordinaires.*

a) Quelle est la probabilité conditionnelle d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points est égale à 8 ?

b) Quelle est la probabilité conditionnelle d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points est supérieure ou égale à 10 ?

Exercice 5 *Un sac contient 3 jetons. L'un de ces jetons a 2 faces noires, un autre 2 faces blanches et le troisième a une face noire et une face blanche. On tire au hasard un jeton du sac et on le pose sur la table. La face visible est noire. Quelle est la probabilité que le jeton tiré ait 2 faces noires ?*

Exercice 6 *On considère une population composée de 48% d'hommes et de 52% de femmes. La probabilité qu'un homme soit daltonien est 0,05 ; qu'une femme soit daltonienne est 0,0025. Quelle proportion de la population est-elle daltonienne ?*

Exercice 7 *Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience élémentaire est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le bon couloir. Sous chacune des hypothèses suivantes :*

(H_1) *le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures,*

(H_2) *le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente,*

(H_3) *le rat se souvient des deux expériences précédentes,*

avec quelle probabilité la première tentative réussie est-elle la première ? la deuxième ? la troisième ? la k-ième ?

Exercice 8 *Un système complexe est formé de trois machines A, B, et C dont les probabilités de panne (événements indépendants) sont respectivement : 0,05 ; 0,03 et 0,01. Le système tombe en panne dès que l'une au moins des machines tombe en panne.*

1. *Déterminer la probabilité de panne du système.*
2. *Le système tombe en panne, quelle est la probabilité que la machine A soit en panne ?*

Exercice 9 *On considère un test servant à dépister une maladie. Soient les événements $M =$ "l'individu est malade" et $P_0 =$ "le test est positif". On sait expérimentalement que $P_M(\overline{P_0}) = 10^{-3}$ et que $P_{\overline{M}}(P_0) = 2 \times 10^{-3}$ appliqué à une maladie qui touche un individu sur 10000. Calculer la probabilité que l'individu soit malade lorsque le test est positif. Commentaire ?*

Exercice 10 *Lors d'une épidémie, on estime que la probabilité de contamination d'un individu est de $\frac{1}{20}$. Pour contrer l'épidémie, on a développé un test T pour repérer si un individu est contaminé ou non. On estime le test fiable à 90%, c'est-à-dire que le résultat du test est positif (respectivement négatif) sachant que l'individu est contaminé (respectivement n'est pas contaminé) avec une probabilité de $\frac{9}{10}$.*

Quelle est la probabilité qu'un individu soit contaminé sachant que le test est négatif ?

Exercice 11 *Devant un certain tableau clinique, on estime qu'une personne a six chances sur dix d'être atteinte d'une certaine maladie. On effectue deux tests T1 et T2.*
T1 est positif à 70% sur les malades et à 20% sur les non-malades.
T2 est positif à 90% sur les malades et à 30% sur les non-malades.
On suppose que les deux tests sont indépendants. Quelle est la probabilité que le deuxième test soit positif sachant que le premier l'a été.

Exercice 12 *On considère 3 urnes :*

U_1 contient 2 boules noires et 3 boules rouges ;
U_2 contient une boule noire et 4 boules rouges
U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges.
On tire une boule dans U_1 et une boule dans U_2, et on les met dans U_3. On tire une boule dans U_3, elle est noire. Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 13 *Une usine fabrique des ampoules électriques à l'aide de trois machines A, B et C. La machine A assure 20% de la production et 5% des ampoules fabriquées par A sont défectueuses. La machine B assure 30% de la production et 4% des ampoules fabriquées par B sont défectueuses. La machine C assure 50% de la production et 1% des ampoules fabriquées par C sont défectueuses.*

a) On choisit au hasard une ampoule. Calculer les probabilités :
- *pour que l'ampoule soit défectueuse et produite par A,*
- *pour que l'ampoule soit défectueuse et produite par B,*
- *pour que l'ampoule soit défectueuse et produite par C.*

b) Calculer la probabilité pour qu'une ampoule défectueuse :
- *provienne de A,*
- *provienne de B,*
- *provienne de C.*

Exercice 14 ***Loi de Hardy-Weinberg***
Lorsqu'un gène porte deux allèles A et a, un individu peut avoir l'un des trois génotypes AA, Aa ou aa ; il transmet alors aléatoirement un des deux allèles à son enfant.

1. *Calculer $P(AA)$, $P(Aa)$ et $P(aa)$ pour un enfant dont les deux parents ont pour génotypes respectifs*
   (a) AA et AA ; (b) Aa et AA ; (c) aa et AA ; (d) Aa et Aa.
2. *On considère une population (génération 0) pour laquelle les proportions respectives des trois génotypes AA, Aa et aa sont p_0, q_0 et r_0. On admet que l'appariement est aléatoire.*
   (a) Exprimer en fonction de p_0, q_0 et r_0 la probabilité p_1 qu'un enfant de la génération 1 ait le génotypes AA.
   (b) Mêmes questions pour q_1 et r_1.
3. *Soit $\alpha = p_0 - r_0$, montrer que $p_1 = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2$, $q_1 = \frac{1-\alpha^2}{2}$ et $r_1 = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$.*
4. *Calculer $p_1 - r_1$, que peut-on en déduire sur p_n, q_n et r_n pour $n \geq 1$?*