Variables aléatoires discrètes.

Exercice 1 *L'oral d'un examen comporte 20 sujets possibles. Le candidat tire deux sujets au hasard puis choisit celui qu'il désire traiter. Il a révisé 12 sujets et on considère la variable aléatoire X qui est le nombre de sujets révisés parmi les deux sujets tirés.*

1. *Quelle est la loi de probabilité de X ?*
2. *Quelle est la probabilité pour que le candidat obtienne au moins un sujet révisé ?*
3. *Calculer $E(X)$.*

Exercice 2 *On lance deux dés équilibrés à six faces. On note X la variable aléatoire : "somme des résultats obtenus".*

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Calculer $P(X \in \{6, 7, 8\})$.*
3. *Calculer $E(X)$ et $V(X)$.*

Exercice 3 *On jette deux dés, on note X_1 la variable aléatoire nombre de points obtenus sur le premier dé et X_2 la variable aléatoire nombre de points obtenus sur le deuxième dé. On considère la variable aléatoire $X = \max(X_1, X_2)$.*

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Calculer $E(X)$ et $V(X)$.*

Exercice 4 *Un grossiste estime que la demande en tonnes de ces clients est une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ dont la loi est la suivante.*

$P(X = 0) = 0,05;\ P(X = 1) = 0,15;\ P(X = 2) = 0,2;\ P(X = 3) = 0,35;\ P(X = 4) = 0,15;\ P(X = 5) = 0,1.$

1. *Calculer la fonction de répartition de X.*
2. *Calculer $P(1 < X < 4)$.*
3. *Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X.*

Exercice 5 *On considère deux variables aléatoires indépendantes X, Y, qui prennent les valeurs et probabilités suivantes.*

$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{3}; \quad P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Z = |X - Y|$.

1. *Déterminer la loi de Z.*
2. *Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$*

Exercice 6 *Le prix d'un ticket de tramway est de 1 euro et celui d'une amende est de 40 euros. La probabilité qu'un voyageur soit controlé lors d'un trajet est p. On désigne par X la variable aléatoire comptant le nombre de controles d'un voyageur lors de N trajets.*

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Un voyageur indélicat est tenté de ne jamais composter son ticket. Quelle doit être la probabilité p de controle pour l'en dissuader ? (on pourra introduire la variable aléatoire Y gain lorsque l'on ne composte jamais lors des N trajets)*

Exercice 7 *Deux joueurs lancent une pièce de monnaie 3 fois chacun. On note X et Y les deux variables aléatoires (indépendantes) égales au nombre de piles obtenus par chacun des joueurs.*

1. *Déterminer la loi de X et Y.*

2. *Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.*
3. *Quelle est la probabilité que les deux joueurs obtiennent le même nombre de fois pile.*

Exercice 8 *On jette dix pièces de monnaie truquées de telle sorte que pour chacune d'elles, la probabilité d'obtenir pile soit $0,3$. Soit X le nombre de pile obtenus au cours de ce lancer.*

1. *Déterminer la loi de X, l'espérance et la variance de X.*
2. *Quelle est la probabilité d'obtenir 3 piles ? moins de 3 piles ?*
3. *Quelle est la probabilité que l'on ait obtenu plus de 3 piles sachant que l'on en a obtenu au plus 5 ?*

Exercice 9 *On considère un système S formé de n composants identiques dont chacun possède (de façon indépendante des autres) la probabilité p de tomber en panne. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'exactement un des n composants soit en panne sachant que le système S est en panne ? (ind. : on pourra introduire la variable aléatoire le nombre de composants en panne.)*

Exercice 10 *On lance un dé et on note X le résultat obtenu.*

1. *Calculer $E(X)$ et $V(X)$.*
2. *On lance n fois le dé et l'on note X_i le résultat obtenu lors du i^{eme} lancé. Calculer $E\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)$ et $V\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)$. Que remarquez-vous ?*