VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

SVE 101 - ANNÉE 2010/2011

Exercice 1. Exprimée en heures, la durée de vie D d'un certain modèle d'ampoule électrique est une variable aléatoire de densité f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} cx^{-2} & , \text{ si } x > 200 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

(1) Quelle est nécessairement la valeur de c ?
(2) On contrôle l'état d'une ampoule après 300 heures d'utilisation. Avec quelle probabilité est-elle hors d'usage ?
(3) On équipe un local souterrain de 5 de ces ampoules électriques,neuves. On suppose que les durées de vie D_1, ..., D_5 de ces ampoules sont des variables aléatoires indépendantes de même densité f. On contrôle l'état de ces ampoules après 300 heures d'utilisation. Avec quelle probabilité deux (exactement) de ces ampoules sont hors d'usage ?

Exercice 2. (*Pannes de réacteurs*)
(1) En moyenne, un moteur d'avion peut fonctionner 2 000 heures sans panne. En supposant que la durée de fonctionnement suit une loi exponentielle, calculer la probabilité que le moteur ne puisse pas compléter un vol de 10 heures.
(2) Supposons que le temps X entre l'inspection d'un certain moteur d'avion et le moment de la première panne de moteur est de loi exponentielle de moyenne 1000 heures. Un avion entreprend un voyage de 25 heures après inspection de ses moteurs.
(i) Quelle est la probabilité qu'il puisse terminer son vol si les 4 moteurs sont nécessaires pour voler?
(ii) Quelle est la probabilité qu'il puisse terminer son vol si l'avion peut voler avec un seul moteur?

Exercice 3. (*Lecture de la table de la loi normale*)
(1) Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(4,\ 4)$, calculer $P(Y < 6)$.
(2) Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(3,\ 2,25)$, déterminer x tel que $P(Y \geq x) = 0.4207$.
(3) Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(5,\ 4)$, calculer $P(2,5 < Y < 6,5)$.
(4) Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(6,\ 4)$, déterminer un intervalle centré sur la moyenne dans lequel Y prend ses valeurs avec probabilité 0.9.

Exercice 4. Lors d'un tir, on admet que la longueur de ce tir suit une loi normale (de paramètres inconnus). On constate en ayant effectués un grand nombre de tirs que 10% des projectiles tombent à une distance supérieure à 1600 mètres et 25% tombent à une distance inférieure à 1400 mètres. Donner des valeurs approchées des paramètres de la loi normale suivie par la longueur des tirs.

Exercice 5. (*Janvier 2010*)
On considère un lot de tubes à essais. A chaque tube, on associe 2 variables aléatoires notées D et H supposées **indépendantes**; D représente son diamètre et H sa hauteur en mm. On suppose que :

- D suit la loi normale de moyenne $\mu_D = 19,7$ et d'écart-type $\sigma_D = 0,4$;
- H suit la loi normale de moyenne $\mu_H = 200$ et d'écart-type $\sigma_H = 6$.

Alors,
(1) Calculer la probabilité qu'un tube à essais ait un diamètre d'au moins 20 mm.
(2) Calculer la probabilité qu'un tube à essais ait une hauteur supérieure à 190 mm et inférieure à 210 mm.
(3) En raison des contraintes d'expérience, un tube ne sera utilisable que si : son diamètre est supérieur à 20 mm et sa hauteur appartient à l'intervalle $[190, 210]$. On note p la probabilité que le tube soit utilisable, calculer p.
On considère maintenant un lot de 100 tubes à essais, on suppose que les tubes à essais du lot sont utilisables ou non indépendamment les uns des autres. On appelle S la variable aléatoire égale au nombre de tubes utilisables parmi les 100 choisis.
(4) Quelle est la loi de S ? Justifier votre réponse.
(5) Donner l'espérance et la variance de S en fonction de p.
(6) Déterminer une valeur approchée de la probabilité qu'il y ait au plus 25 tubes utilisables parmi les 100 choisis.

Exercice 6. Le pH de l'urine d'un adulte sain est une variable aléatoire normale de loi $\mathcal{N}\left(6,25,\ (0,36)^2\right)$. Déterminer un intervalle, centré autour de la moyenne, où se trouve la mesure du pH urinaire pour 75% des adultes sains.

Exercice 7. (*2009 - Session* 2)
Le poids (exprimé en kg) de chaque fromage fabriqué dans une bergerie d'altitude est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 0.900 et d'écart-type inconnu σ. On suppose que les poids de différents fromages sont des cariables aléatoires **indépendantes.**
Une coopérative conditionne ces fromages pour expédition par lots de 10. On désigne par L la variable aléatoire du poids d'un lots; ainsi $L = X_1 + X_2 + ... + X_{10}$, où X_i est la variable aléatoire poids du $i-$ème fromage.
(1) Calculer l'espérance de L.
(2) Exprimer la variance de L en fonction de σ. Quelle est la loi de L ?
(3) La coopérative a constaté que le poids d'un lot dépasse 10 kg avec probabilité 0.15. Déterminer une valeur approchée de σ.
(4) La variable aléatoire coût d'expédition d'un lot C est de 5 € pour un lot ne dépassant pas 10 kg et de 7 € pour un lot dépassant 10 kg. Déterminer l'espérance et la variance de C.