SVE 101 : DEVOIR MAISON N°1

A RENDRE LE LUNDI 27 SEPTEMBRE

Les exercices sont indépendants et tous les résultats doivent être justifiés. A titre d'entraînement, la durée d'un tel devoir est de ***1h30****.*

Exercice 1. *(Extrait du DS1 d'Octobre 2009)*
(1) Donner la formule d'intégration par parties;
(2) A l'aide de la formule susnommée, calculer

$$\int_1^2 x^3 \ln(x) dx.$$

Exercice 2. *(Extrait du DS1 d'Octobre 2009)*
(1) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x réel différent de -3 et -5, on ait

$$\frac{1}{x^2+8x+15} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+5}.$$

(2) Calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+8x+15}.$$

Exercice 3. *(Extrait du DS1 d'Octobre 2009)*
(1) Résoudre l'équation différentielle

$$y' = x^2 y.$$

(2) Trouver la solution de cette équation satisfaisant la condition initiale $y(0) = -1$.

Exercice 4. Loi de refoidissement de Newton.
On suppose que le taux de variation de la température d'un objet est proportionnel à la différence de température entre l'objet et le milieu ambiant. Le coefficient de proportionnalité, noté k, dépend essentiellement de la surface de contact entre l'objet et son milieu et on le considèrera constant. On note $T(t)$ la température de l'objet à l'instant t et $T_a(t)$ la température du milieu ambiant à l'instant t.
(1) On suppose que $T_a(t) = T_a$ (le milieu ambiant est à température constante). Donner l'équation différentielle satisfaite par la fonction $T(t)$.
(2) Déterminer $T(t)$ si on suppose que $T(0) = T_0$, où T_0 est une constante réelle fixée.
(3) On suppose maintenant que la témpérature ambiante varie avec le temps (c'est par exemple le cas lorsque le sol est exposé aux rayons du soleil). Déterminer $T(t)$ lorsque $T_a(t) = T_m \sin(\omega t)$ et $T(0) = T_0$, où ω, T_0 et T_m sont des constantes réelles fixées.