SVE 101 - 2010/2011 - Mardi 12 octobre 2010 - Durée 1h30

La calculatrice Bordeaux 1 est autorisée. Aucun autre document n'est autorisé.
Les exercices sont indépendants et les résultats doivent être justifiés.

Exercice 1.
1) *(Question de cours)* Donner la formule d'intégration par parties.
2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^2 xe^x\, dx$.
3) En cherchant une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ sous la forme $F(x) = (ax + b)e^x$, en déduire une autre façon de calculer I.

Exercice 2.
1) Trouver deux constantes réelles a et b telles que pour tout réel t différent de -1 et -2, on ait

$$\frac{1}{t^2 + 3t + 2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}.$$

2) Soit $x \geq 0$ un réel fixé. A l'aide de la question précédente, calculer (en fonction de x)

$$\int_0^x \frac{1}{t^2 + 3t + 2}\, dt.$$

En déduire une primitive sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de la fonction définie sur cet intervalle par $x \mapsto \frac{1}{x^2+3x+2}$.
3) *(Question de cours)* Soit h une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, donner toutes les solutions de léquation différentielle

$$y' + h(x)y = 0.$$

4) On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y' = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} y.$$

A l'aide de la question 2, trouver la solution y de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 3.
Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = \cos(3x) - x + 7$.

Exercice 4.
Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\text{(E)} \quad y'' - 4y' + 4y = e^{3x}.$$

1) Résoudre l'équation homogène (ou sans second membre) associée à l'équation (E).
2) Trouver une solution particulière de l'équation (E).
3) Donner l'ensemble des solutions de (E).
4) Déterminer la solution y de (E) satisfaisant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Barème indicatif : Ex1 = 45 pts, Ex2 = 60 pts, Ex3 = 45 pts, Ex4 = 50 pts.