Eléments de correction du DS1 mardi 12 octobre 2010, SVE 101

Exercice 1.
1) Donner la formule d'intégration par parties.
Soient f et g deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^2 xe^x\,dx$.
On prend $f(x) = x$ et $g(x) = e^x$ alors f et g sont dérivables et de dérivées continues sur $[0, 2]$. $f'(x) = 1$ et $g'(x) = e^x$, la formule d'intégration par parties nous donne

$$\int_0^2 xe^x\,dx = [xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = [xe^x - e^x]_0^2 = e^2 + 1.$$

3) En cherchant une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ sous la forme $F(x) = (ax + b)e^x$, en déduire une autre façon de calculer I.
Dire que F est une primitive de f équivaut à $F' = f$ soit $(ax + b + a)e^x = xe^x$ pour tout réel x. Ceci n'est possible que si $a = 1$ et $b + a = 0$, soit $a = 1$, $b = -1$ et $F(x) = (x - 1)e^x$. On retrouve bien que $I = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = e^2 + 1$.

Exercice 2.
1) Trouver deux constantes réelles a et b telles que pour tout réel t différent de -1 et -2, on ait

$$\frac{1}{t^2 + 3t + 2} = \frac{a}{t + 1} + \frac{b}{t + 2}.$$

En réduisant au même dénominateur

$$\frac{a}{t + 1} + \frac{b}{t + 2} = \frac{a(t + 2) + b(t + 1)}{(t + 1)(t + 2)} = \frac{(a + b)t + (2a + b)}{t^2 + 3t + 2},$$

cette fraction est égale à $\frac{1}{t^2+3t+2}$ si et seulement si $(a + b)t + (2a + b) = 1$ soit si et seulement si

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

2) Soit $x \geq 0$ un réel fixé. A l'aide de la question précédente, calculer (en fonction de x)

$$\int_0^x \frac{1}{t^2 + 3t + 2}\,dt.$$

En déduire une primitive sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de la fonction définie sur cet intervalle par $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$.

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{t^2 + 3t + 2}\,dt &= \int_0^x \left(\frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t + 2}\right)dt = [\ln(t + 1) - \ln(t + 2)]_0^x \\ &= \ln(x + 1) - \ln(x + 2) + \ln(2) = \ln(\frac{x + 1}{x + 2}) + \ln(2)\end{aligned}$$

car pour tout x positif et tout t dans l'intervalle $[0, x]$, $t + 1 \geq 0$ et $t + 2 \geq 0$.
Par propriété de l'intégrale d'une fonction continue, une primitive sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de la fonction

définie sur cet intervalle par $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ est la fonction $x \mapsto \ln(\frac{x+1}{x+2}) + \ln(2)$ ou encore $x \mapsto \ln(\frac{x+1}{x+2})$ puisque ces deux fonctions ne diffèrent que d'une constante.

3) Soit h une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, donner toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y' + h(x)y = 0.$$

Ce sont les fonctions y définies sur I par $y(x) = Ce^{-H(x)}$ avec H primitive de h sur I et C constante réelle arbitraire.

4) On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y' = \frac{1}{x^2+3x+2}y.$$

A l'aide de la question 2, trouver la solution y de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

On a avec la question 2 qu'une primitive de la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = -\frac{1}{x^2+3x+2}$ est la fonction H définie par $H(x) = -\ln(\frac{x+1}{x+2})$ et les solutions de (E) sont les fonctions y définies sur $[0, +\infty[$ par $y(x) = Ce^{-H(x)} = C\exp(\ln(\frac{x+1}{x+2})) = C\frac{x+1}{x+2}$ (on peut remarquer que ces solutions sont définies sur l'intervalle $]-1, +\infty[$).

La solution vérifiant de plus la condition initiale $y(0) = 1$ est telle que $C \times \frac{1}{2} = 1$ soit $y(x) = 2\frac{x+1}{x+2}$.

Exercice 3.

Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = \cos(3x) - x + 7$.

On commence par résoudre l'équation homogène $y' + \frac{1}{2}y = 0$ qui a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y_H(x) = Ce^{-x/2}$ avec C constante réelle arbitraire.

Pour trouver une solution particulière nous allons utiliser le principe de superposition.

On cherche une solution particulière de $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\cos(3x)$ (E_1) sous la forme $y_1(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$, A et B réels à déterminer. On a $y_1'(x) = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)$ et y_1 est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $(3B + A/2)\cos(3x) + (-3A + B/2)\sin(3x) = \frac{1}{2}\cos(3x)$ soit si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} 3B + A/2 = \frac{1}{2} \\ -3A + B/2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 18A + A/2 = \frac{1}{2} \\ B = 6A \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \frac{1}{37} \\ B = \frac{6}{37} \end{array}\right.$$

$y_1(x) = \frac{1}{37}\cos(3x) + \frac{6}{37}\sin(3x)$.

On cherche une solution particulière de $y' + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ (E_2) sous la forme $y_2(x) = Cx + D$, C et D réels à déterminer. On a $y_2'(x) = C$ et y_2 est solution de l'équation (E_2) si et seulement si $\frac{C}{2}x + (C + \frac{D}{2}) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ soit si et seulement si $C = -1$ et $C + \frac{D}{2} = \frac{7}{2}$.

$y_2(x) = -x + 9$.

Les solutions de l'équation différentielle sont la somme des solutions de l'équation homogène et des solutions particulières de (E_1) et (E_2), soit les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = Ce^{-x/2} + \frac{1}{37}\cos(3x) + \frac{6}{37}\sin(3x) - x + 9$$

avec C constante réelle arbitraire.

Exercice 4.

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\text{(E)} \quad y'' - 4y' + 4y = e^{3x}.$$

1) Résoudre l'équation homogène (ou sans second membre) associée à l'équation (E).
L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2 - 4r + 4 = 0$ soit $(r-2)^2 = 0$, elle admet 2 comme racine double. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y_H(x) = (C_1x + C_2)e^{2x}$ avec C_1 et C_2 des constantes réelles arbitraires.
2) Trouver une solution particulière de l'équation (E).
3 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche la solution particulière sous la forme $y_P(x) = Ke^{3x}$, $y_P'(x) = 3Ke^{3x}$ et $y_P''(x) = 9Ke^{3x}$. $y_P''(x) - 4y_P'(x) + 4y_P(x) = (9-12+4)Ke^{3x} = e^{3x}$ si et seulement si $K = 1$, $y_P(x) = e^{3x}$.
3) Donner l'ensemble des solutions de (E).
Ce sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = (C_1x + C_2)e^{2x} + e^{3x}$ avec C_1 et C_2 des constantes réelles arbitraires.
4) Déterminer la solution y de (E) *satisfaisant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.*
$y'(x) = (2C_1x + 2C_2 + C_1)e^{2x} + 3e^{3x}$,

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 + 1 = 1 \\ 2C_2 + C_1 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = -3 \end{cases}$$

La solution y de (E) satisfaisant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -3xe^{2x} + e^{3x}$.

Barème : Ex1 = 45 pts, Ex2 = 60 pts, Ex3 = 45 pts, Ex4 = 50 pts.