Université Bordeaux 1
TD de MHT 411
2008/2009

FEUILLE N° 2 : GROUPES, SOUS-GROUPES, HOMOMORPHISMES DE GROUPES (1)

Rappel : Soit $(G,\cdot)$ un groupe, d'élément neutre e. On rappelle qu'un sous-ensemble $H \subset G$ est appelé sous-groupe de G si et seulement si
(i) $e \in H$.
(ii) $\forall x, y \in H$, $xy \in H$.
(iii) $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$.

On note $H \leq G$.

Exemple : $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}, +)$.

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Gl_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ inversibles : c'est à dire si $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ alors il existe $A^{-1} \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour $n = 2$, alors $Gl_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle. Ce groupe est-il commutatif ?

Remarque. On peut montrer que pour tout $n \geq 2$, Gl_n est un groupe non commutatif.

Exercice 2. Soit $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $\star$ une loi de composition interne à G définie par

$$(x, y) \star (x', y') = (x' + xy', yy').$$

(1) Montrer que $(G, \star)$ est un groupe non commutatif.
(2) Soit H un sous-groupe quelconque de $(\mathbb{R}^*, \times)$. Montrer que $\mathbb{R} \times H$ est un sous-groupe de G.
(3) Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $Gl_2(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : \ b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$ isomorphe à $(G, \star)$.

Exercice 3. Soit a un élément non nul de $\mathbb{R}$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on pose

$$x \star y := x + y - axy.$$

(1) Montrer que la loi $\star$ est associative et qu'elle admet un élément neutre.
(2) Déterminer les éléments neutres pour la loi $\star$.
(3) L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{a}\}$ muni de la loi $\star$ est-il un groupe ?

Exercice 4. Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ sur lequel on définit la loi :

$$(a, b, c) \star (\alpha, \beta, \gamma) = (a\alpha, b\beta, a\gamma + c\beta)$$

Montrer que $\mathbb{E}$ muni de $\star$ est un groupe. Est-il commutatif ?

Exercice 5. Soit $(G, \cdot)$ un groupe dans lequel chaque élément est son propre inverse. Montrer que G est commutatif.

Exercice 6. Soient $(G, \cdot)$ un groupe et H, K deux sous-groupes de G. Montrer que

$$(H \cup K \text{ est un sous-groupe de } G) \Longleftrightarrow (H \subset K \text{ ou } K \subset H).$$

Exercice 7. *Automorphismes intérieurs*

Soit G un groupe. Pour tout $g \in G$, on note

$$\begin{array}{rccc} \phi_g : & G & \to & G \\ & x & \mapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

(1) Montrer que pour tout $g \in G$, ϕ_g est un automorphisme de G.

(2) On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. Montrer que c'est un groupe pour la loi de composition $\circ$ $((\phi \circ \psi)(x) = \phi(\psi(x)))$.

(3) Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & G & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ & g & \mapsto & \phi_g \end{array}$$

(i) Montrer que Φ est un homomorphisme de groupes.

(ii) Montrer que $\mathrm{Ker}\Phi = Z(G)$, où $Z(G) := \{x \in G : \ xy = yx, \ \forall y \in G\}$ est le *centre* de G : c'est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres.

Remarque. Si G est commutatif, alors $Z(G) = G$.

Exercice 8. Soient G un groupe et $n \geq 1$ tels que l'application $x \mapsto x^n$ est un automorphisme de G. Montrer que $\forall x \in G$, on a $x^{n-1} \in Z(G)$.

Exercice 9. Soient G un groupe et f l'application de G dans G définie par $f(x) = x^{-1}$. Montrer que f est un homomorphisme de goupes si et seulement si G est commutatif.

Exercice 10. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On note $H^2 := \{xy : \ x, y \in H\}$, $H^{-1} := \{x^{-1} : \ x \in H\}$ et $HH^{-1} := \{xy^{-1} : \ x, y \in H\}$.

(1) Montrer que $H^2 = H$, $H^{-1} = H$ et $HH^{-1} = H$.

(2) Soient H, K deux sous-groupes de G. On note $HK := \{xy : \ x \in H, \ y \in K\}$ et $KH := \{yx : \ y \in K, \ x \in H\}$.Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 11. Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

(1) Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Montrer que ou bien $G = \{0\}$ ou bien il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.

(2) Soit $H := \{8b + 12c : \ b, c \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Déterminer a tel que $H = a\mathbb{Z}$.

(3) Soit $H := 8\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z}$. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Déterminer a tel que $H = a\mathbb{Z}$.

(4) Plus généralement, si $x, y \in \mathbb{Z}$ déterminer $x\mathbb{Z} \cap y\mathbb{Z}$ et le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par x et y en fonction de x et y.