Université Bordeaux 1
2008/2009
TD de MHT 411

FEUILLE DE TD N°3 : GROUPES (2)

Exercise 0.1. *Racines* 6*-ièmes de l'unité*

Soit $\omega := \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = e^{\frac{2i\pi}{6}}$.

(1) Calculer ω^3 et ω^6. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $\omega^n = 1$. En déduire que $\omega^r = \omega^s$ si et seulement si $r \in s + 6\mathbb{Z}$.

(2) On note $G := \{1, \omega, \omega^2, .., \omega^5\}$, $H := \{1, \omega^2, \omega^4\}$ et $K := \{1, \omega^3\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$, puis que H, K sont des sous-groupes de G.

(3) Déterminer tous les sous-groupes de G.

Exercise 0.2. *Les groupes d'ordre 4*

(1) Montrer que $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique. Vérifier que $\overline{3}$ est générateur. Déterminer les sous-groupes de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(2) Donner la table de $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$. Montrer que G n'est pas cyclique et donner l'ordre de chaque élément. Déterminer les sous-groupes de G.

(3) Soit H un groupe d'ordre 4. On suppose qu'il existe un élément $a \in H$ d'ordre 4. Montrer qu'il existe un isomorphisme de groupes $\Phi : H \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(4) Soit H un groupe d'odre 4 qui ne possède pas d'élément d'odre 4. Montrer qu'il existe un isomorphisme de groupes $\Phi : H \to G$.

Exercise 0.3. *Les groupes d'ordre 9*

Le but de cet exercice est de démontrer qu'il n'y a, à isomorphisme près, que deux groupes à 9 éléments.

Soit G un groupe à 9 éléments, dont l'élément neutre est noté e, supposé **non cyclique.**

(1) Soit $x \in G$, $x \neq e$. Quel est l'ordre de x ? Donner $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^{-1} = x^n$.

(2)On considère l'application $f : G \to G$, qui à λ associe λ^2. Montrer que $f \circ f$ est l'identité. En déduire que f est une bijection.

On veut maintenant montrer que G est commutatif. On fixe $a \in G$, on note H le sous-groupe engendré par a et on fixe b un élément de

G n'appartenant pas H. Les 3 prochaines questions servent à montrer que $ab = ba$.

(3) Montrer que b^2 n'appartient ni à H, ni à bH. En déduire que $G = H \cup bH \cup b^2H$.

(4) Montrer que $ab \notin \{e, a, a^2, b, b^2\}$. On en conclut que $ab \in \{b^2a^2, b^2a, ba^2, ba\}$.

(5) Montrer que seul le cas $ab = ba$ est possible.

(6) Ecrire un isomorphisme entre G et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Definition. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. Pour $g \in G$, on note

$$gHg^{-1} := \{ghg^{-1} : \quad h \in H\}.$$

On dit que H est *distingué*, ou encore *normal*, dans G si $gHg^{-1} \subset H$ quel que soit $g \in G$.

Exercise 0.4. Soient G_1, G_2 deux groupes, d'éléments neutres e_1 et e_2, et Φ un homomorphisme de groupes entre G_1 et G_2.

(1) Montrer que $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est un sous-groupe distingué de G_1.

(2) Soit H un sous-groupe distingué de G_2. Montrer que $\Phi^{-1}(H)$ est un sous-groupe distingué de G_1.

Exercise 0.5. Soit G un groupe. Pour $x \in G$, on note $C(x)$ l'ensemble des éléments qui commutent avec x.

(1) Montrer que, pour chaque $x \in G$, $C(x)$ est un sous-groupe de G.

(2) Que vaut $C(x)$ si G est commutatif ?

(3) Déterminer $C(x)$ lorsque

(i) $G = \mathcal{S}_3$ et $x = (i, j)$.

(ii) $G = \mathcal{S}_n$ et $x = (ij)$.

Exercise 0.6. *A propos du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$...*

Soit n un entier positif.

(1) Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les $n-1$ transpositions $(1, i)$, $2 \leq i \leq n$.

(2) Montrer qu'il est également engendré par les transpositions $(i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$.

(3) Pour $n \geq 3$, montrer que $Z(\mathcal{S}_n) = \{id\}$, où $Z(\mathcal{S}_n)$ est le centre du groupe $\mathcal{S}_n$, c'est à dire l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}_n$ qui commutent avec tous les autres.

(4) On prend $n = 7$. Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer σ^p, pour $p \in \mathbb{Z}$. Quel est l'ordre de σ ?

Definition. Pour $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\mathcal{A}_n$ désigne le $n-$ième groupe alterné. C'est à dire le noyau de l'homomorphisme signature

$$\epsilon : \mathcal{S}_n \to \{\pm 1\}.$$

Exercise 0.7.

(1) Montrer que les éléments

$$\sigma_1 = (1,2)\,(3,4)\,, \quad \sigma_2 = (1,3)\,(2,4) \quad \text{et} \quad \sigma_3 = (1,4)\,(2,3)$$

sont des éléments de $\mathcal{A}_4$.

(2) Déterminer le sous-groupe G engendré par σ_1, σ_2 et σ_3 et donner sa table de multiplication.

(3) Soit $\sigma \in G$, $\sigma \neq id$ et soit $\tau \in \mathcal{S}_4$. Montrer que $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ n'a pas de point fixe, c'est à dire que $\forall i \in \{1,2,3,4\}$, $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}(i) \neq i$.

(4) Montrer que $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ est d'ordre 2.

(5) En déduire que G est distingué dans $\mathcal{A}_4$.

Remark. Un groupe qui ne possède pas de sous-groupe distingué autre que $\{e\}$ et lui-même est dit *simple*. On vient de montrer que $\mathcal{A}_4$ n'était pas simple. En revanche, on peut montrer que pour tout $n \geq 5$, $\mathcal{A}_n$ est un groupe simple.