Université Bordeaux 1
TD de MHT 411
2008/2009

FEUILLE N° 4 : ANNEAUX, CORPS, IDÉAUX

Exercise 0.1. Soient A un anneau et $a \in A$. On dit que a est *inversible à gauche* (resp. à *droite*) si il existe $x \in A$ tel que $x \cdot a = 1$ (resp. $x' \in A$ tel que $a \cdot x' = 1$).

(1) Montrer que si a est inversible à gauche et à droite, alors $x = x'$. On dit donc que a est inversible.

(2) On note $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de A. Montrer que $(A^\times, \cdot)$ est un groupe. On l'appelle le *groupe des unités* de A.

(3) Déterminer $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times$ et $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$.

(4)* Plus généralement, déterminer $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ ainsi que son ordre.

Exercise 0.2. On définit $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif pour les lois usuelles de $\mathbb{C}$.

(2) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercise 0.3. Soient A un anneau fini et $x \in A$ tel que $\forall y \in A \setminus \{0\}$, $x \cdot y \neq 0$.

(1) Montrer, en considérant l'application $\phi(y) = x \cdot y$, que x est inversible à droite.

(2) Montrer que x est inversible à gauche.

(3) Déterminer les *diviseurs de zéro* de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, c'est à dire les éléments $x \neq 0$ tels qu'il existe $y \neq 0$ vérifiant $x \cdot y = 0$. En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Exercise 0.4. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on définit la loi $\star$ par

$$(x, y) \star (x', y') := (xx', xy' + x'y).$$

(1) (i) Montrer que $A := (\mathbb{R}^2, +, \star)$ est un anneau commutatif.

(ii) Expliciter les diviseurs de zéro de A.

(2) On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}[X] & \to & A \\ & P & \mapsto & (P(0), P'(0)) \end{array}$$

(i) Montrer que f est un homomorphisme d'anneaux.

(ii) f est-il surjectif ?

(iii) Déterminer le noyau de f.

Exercise 0.5. *On rappelle pour cet exercice que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels) muni de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices est un anneau.* On note

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Ici, $n = 2$. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{K}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathcal{K} := \{aI_2 + bJ : \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(1) Montrer qu'on a la relation $I + J^2 = 0$.
(2) Montrer que $(\mathcal{K}, +, \times)$ est un anneau commutatif.
(3) Montrer que c'est un corps.

Exercise 0.6. Soit A un anneau dans lequel tous les éléments sont *idempotents*, c'est à dire tel que tout élément $x \in A$ vérifie $x^2 = 0$.
(1) Montrer que tout $x \in A$ vérifie $x + x = 0$. En déduire que A est commutatif.
(2) Soit $n \geq 1$. Montrer que tous les éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ sont idempotents.
(3) Soit E un ensemble non vide et fini. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des application de E dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que $\mathcal{A}$ muni de la somme et du produit des applications est un anneau commutatif.

Exercise 0.7. Montrer que
(1) La somme de deux idéaux est un idéal.
(2) L'intersection de deux idéaux est un idéal.
(3) Généraliser à des sommes et des intersections quelconques.

Exercise 0.8. On rappelle que pour $n \geq 1$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau. (*Remarque : c'est un corps si et seulement si n est un nombre premier*)
(1) $n = 9$. Montrer que $I := \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.
(2) Peut-on affirmer que les éléments non inversibles forment toujours un idéal dans un anneau fini ?

Exercise 0.9.
(1) Soit $D := \{P \in \mathbb{R}[X] : \ P'(0) = 0\}$. Montrer que D est un sous-anneau unitaire de $\mathbb{R}[X]$ mais que ce n'est pas un idéal de $\mathbb{R}[X]$.
(2) Soit $E := \{P \in \mathbb{R}[X] : \ P(0) = P'(0) = 0\}$. Montrer que E n'est pas un sous-anneau unitaire de $\mathbb{R}[X]$ mais que c'est un idéal de $\mathbb{R}[X]$.

Exercise 0.10. *On rappelle qu'un anneau intègre est un anneau dans lequel* 0 *est le seul diviseur de zéro.*

Soit A un anneau commutatif. Pour $a \in A$, on note $(a) := aA$.

(1) Montrer que pour tout $a \in A$, (a) est un idéal de A.

On dit que deux éléments a et b de A sont *associés* s'il existe un élément inversible u de A tel que $a = bu$.

(2) Montrer que si a et b sont associés alors $(a) = (b)$.

(3) Réciproquement, si A est intègre et si $(a) = (b)$, montrer que a et b sont associés.

URL: `http ://www.math.u-bordeaux1.fr/~fgaunard`