Correction exercice 7

EXERCICE 7 :

Un jeu de 32 cartes est constitué de quatre familles de huit cartes, chaque famille ayant une couleur différente : pique, cœur, carreau ou trèfle. Les huit cartes d'une famille sont ordonnées suivant leur hauteur : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as. Ainsi une carte est complètement caractérisée par son couple (couleur, hauteur). On tire en un seul coup cinq cartes parmi les 32 du jeu.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Parmi ceux-là, combien y en a-t-il qui correspondent à :
   a . une paire (deux cartes de la même valeur) ?
   b . une double paire (deux paires de valeurs différentes) ?
   c . un brelan (trois cartes de la même valeur) ?
   d . un full (une paire et un brelan) ?

CORRECTION :

1. On ne tient pas compte de l'ordre dans cette situation donc le nombre mains possibles est de $\binom{32}{5}$
2. a . Pour obtenir une paire :
   - ♦ $32 \times 3 = 96$ donne le nombre de paires en tenant compte de l'ordre : (Roi Coeur, Roi Trèfle) et (Roi Trèfle, Roi Coeur) sont comptés séparément. Si l'on ne veut plus tenir compte de l'ordre, il faut diviser ce résultat par 2, le nombre de permutations à 2 éléments.
   - ♦ $32 \times 3 \times 28$ donne le nombre de possibilités pour avoir une paire et une carte de hauteur différente de sorte que le placement de la paire et de l'autre carte soient fixés. Par exemple, cela compte le nombre de (P1, C1, P2) avec P1 et P2 qui peuvent être inversés, mais pas Pi et Cj.

   Donc, le calcul $32 \times 3 \times 28 \times 24 \times 20 = 1\ 290\ 240$ ne donne pas le nombre de mains possibles avec un paires sans prendre en compte l'ordre mais le nombre de (P1, P2, C1, C2, C3) avec P1 et P2 qui peuvent être inversées et C1, C2, C3 aussi, mais pas Pi et Cj. Le problème dans ce calcul est que l'on fixe le placement des cartes qui constituent la paire et les autres cartes mais on ne prend pas en compte l'ordre au niveau de la paire ou des autres cartes. Pour ne plus tenir compte de l'ordre, il ne faut pas diviser par 5!, le nombre de permutation à 5 éléments, mais enlever uniquement les permutations au niveau de la paire (2!) et celles au niveau des 3 autres cartes (3!).

   Correction : Une autre manière de voir serait plutôt de regarder directement le nombre de paire sans tenir compte de l'ordre $\frac{32\times3}{2} = 48$ (on divise par 2 qui est le nombre de permutation a deux éléments). Puis, le nombre de possibilités pour avoir 3 cartes de hauteurs différentes entre elles et différentes de la hauteur de la paire sans tenir compte de l'ordre $\frac{28\times24\times20}{3!} = 2\ 240$.
   Finalement, on peut multiplier ces deux résultats pour obtenir que le nombre de paires dans une main de 5 cartes en ne tenant pas compte de l'ordre est 107 520.

   Si l'on veut le nombre de mains avec une paire en prenant en compte l'ordre, il faut multiplier 107 520, le nombre de mains sans prendre compte de l'ordre, par 5!, le nombre de permutations à 5 éléments, ce qui donne 12 902 400. On se rend bien compte qu'il nous manque des possibilités lorsque l'on fait le calcul $32 \times 3 \times 28 \times 24 \times 20$.

   b . Pour une double paire : De la même manière, le calcul $32 \times 3 \times 28 \times 3 \times 24$ ne donne pas le nombre de mains possibles avec une double paire en prenant compte de l'ordre mais le nombre de (Paire1, Paire2 , C1). L'ordre est pris en compte dans chacune des paires mais la place de C1 et des paires sont fixées.

   Correction : Comme vu précédemment, le nombre de paire sans tenir compte de l'ordre est 48. De la même manière, il y $\frac{28\times3}{2} = 42$ possibilités pour obtenir une deuxième paire de hauteur différente de la première. Puis, le nombre de double paire est $\frac{48\times42}{2} = 1008$ en ne tenant pas compte de l'ordre (d'où la division par 2 car nous voulons que (Paire Roi, Paire Dame) = (Paire Dame, Paire Roi)).
   Finalement, le nombre de mains avec une double paire en ne prenant pas en compte l'ordre des cartes est $1008 \times 24 = 24\ 192$.

c . <u>Pour un brelan :</u> Vous l'aurez compris, le calcul $32 \times 3 \times 2 \times 28 \times 24$ ne donne pas le nombre brelan en prenant en compte l'ordre des cartes mais en fixant la place des 3 cartes identiques et des deux autres cartes, par exemple (P1, C1, P2, P3, C2) avec les permutations possibles sur les Pi et sur les Cj, mais pas Pi avec Cj. Ainsi, pour ne pas prendre en compte l'ordre, on ne doit pas diviser par le nombre de permutations à 5 éléments mais par les permutations à 3 éléments et à 2 éléments.

Correction : Le nombre de mains avec 3 cartes identiques sans tenir compte de l'ordre est $\frac{32\times3\times2}{3!} = 32$. Puis, pour les deux cartes restantes sans tenir compte de l'ordre $\frac{28\times24}{2} = 336$. Donc, le nombre de mains, sans prendre en compte l'ordre, contenant un brelan est : $32 \times 336 = 10\ 752$.

d . <u>Pour un full :</u> De la même manière, le calcul $32 \times 3 \times 2 \times 28 \times 3$ ne donne pas le nombre de full sans tenir compte de l'ordre, mais fixe la place des cartes de même hauteur dans la main (par exemple (B1, P1, B2, B3, P2) avec les permutations possibles sur les Bi et sur les Pj mais pas Bi avec Pj).

Correction : D'après la question sur le brelan, il y a 32 mains avec 3 cartes identiques sans tenir compte de l'ordre. Puis, il y a $\frac{28\times3}{2} = 42$ paires possibles avec une hauteur différente de celle du brelan. Donc, sans tenir compte de l'ordre, il y a $32 \times 42 = 1344$ mains possibles pour obtenir un full.