Laboratoire Jacques-Louis Lions, UMR 7598
Université Pierre et Marie Curie-Paris 6 & CNRS

Habilitation à diriger des recherches en mathématiques

Sur la dynamique de corps solides immergés dans un fluide newtonien incompressible.

Franck Sueur

Rapporteurs :

Eduard Feireisl
Institute of Mathematics AS CR

Thierry Gallay
Université Joseph Fourier

Matthias Hieber
Technische Universität Darmstadt

Soutenance le 6 décembre 2012 devant le jury :

Jean-Yves Chemin
Université Pierre et Marie Curie

Thierry Gallay
Université Joseph Fourier

Laure Saint-Raymond
École Normale Supérieure

Eduard Feireisl
Institute of Mathematics AS CR

Olivier Guès
Aix-Marseille Université

Remerciements

C'est avec plaisir que je profite ici de cette occasion pour remercier les nombreuses personnes qui m'ont aidé, de différentes manières, dans l'élaboration de ce travail.[1]

Mes premiers remerciements sont adressés à Eduard Feireisl, Thierry Gallay et Matthias Hieber qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les rapporteurs de ce mémoire. Je suis également très reconnaissant à Jean-Yves Chemin, Olivier Guès et Laure Saint-Raymond d'avoir accepter de faire partie du jury.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement Eric Dumas, Olivier Glass, Olivier Guès, Dragos Iftimie, Christophe Lacave, Ayman Moussa, Alexandre Munnier, Toan Nguyen, Gabriela Planas, Frédéric Rousset et Takéo Takahashi, pour leurs précieuses et agréables collaborations.

C'est un merci redoublé que j'adresse à Ayman et Olivier pour leur relecture attentive et prompte de ce manuscrit.

Merci aussi au personnel administratif du laboratoire pour leur disponibilité et leur efficacité, et plus généralement à tous les membres du laboratoire pour l'ambiance agréable et stimulante qu'ils y font régner.

Enfin un grand merci (et un "Merci, *mec* !") à ceux et celles qui m'ont soutenu dans cette période agitée de pré-soutenance !

1. Cela montre d'ailleurs à quel point il ne faut pas voir de sens caché à la citation qui suit !

L'oeuvre est une sueur.
Jean Cocteau.

Table des matières

Chapitre I

Introduction

Ce mémoire porte sur l'analyse théorique de la dynamique de corps solides immergés dans un fluide newtonien incompressible. C'est une tentative de synthèse des travaux sur le sujet auxquels j'ai contribué en collaboration avec (dans l'ordre alphabétique de leur nom de famille) Olivier Glass, Dragos Iftimie, Christophe Lacave, Ayman Moussa, Gabriela Planas et Takéo Takahashi, à savoir les articles [96, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 130, 140, 155, 156, 154] en gras dans les références à la fin de ce mémoire. C'est en quelque sorte la plus grande sous-partie de mes activités scientifiques depuis mon doctorat à laquelle j'ai pu donner, j'espère, une certaine cohérence ! Aussi j'omets volontairement de mentionner ici certains articles dont les thèmes sont un peu plus éloignés, mais qui me tiennent néanmoins à coeur, en particulier ceux issus de mes collaborations avec Eric Dumas, Olivier Guès et Toan Nguyen. Je renvoie ici le lecteur au reste du dossier scientifique où ces travaux sont référencés.

L'ordre de présentation ne reflète pas toujours l'ordre chronologique des articles sous-jacents mais plutôt ce qui m'apparaît a posteriori comme un ordre dans lequel il aurait été peut-être plus rationnel de traiter les questions ! Il faut bien dire que les différentes thématiques envisagées ici n'ont émergé que progressivement comme un programme. J'espère en tout cas donner, par ces quelques réaménagements éditoriaux, une progression plus systématique dans la présentation de mes résultats. J'essaie aussi de donner en cours de route un aperçu des nombreuses questions qui les prolongent naturellement.

A propos des choix éditoriaux effectués ici, dans la suite j'utilise la forme "nous" systématiquement, même si c'est à propos d'un travail effectué seul, et je...enfin donc...nous mentionnons, aussi, le prénom des gens lorsqu'ils sont cités en tant que collaborateurs.

Venons-en maintenant au contenu de ce chapitre. Il est consacré à la présentation du système en jeu dans ce mémoire et aux problématiques qui constituent les cinq chapitres suivants. Insistons ici tout de suite sur quelques points généraux. Le fluide est toujours décrit par un modèle non-stationnaire, et les corps qui y sont immergés sont toujours supposés rigides, indéformables et imperméables.

Les questions abordées relèvent tout aussi bien du caractère bien posé du problème de Cauchy ; de l'analyse asymptotique, les paramètres asymptotiques étant la taille et/ou la masse et/ou le nombre de corps immergés, ou encore la viscosité du fluide ; de l'interprétation géométrique du problème ; que du comportement qualitatif, notamment la régularité des trajectoires.

Nous regardons les cas des dimensions deux et trois d'espace, et le système fluide-solide occupe soit un domaine borné fixe soit l'espace tout entier.

I.1 Présentation du système

Commençons par présenter les objets auxquels nous nous intéressons dans ce mémoire, à savoir les quantités pertinentes à regarder pour étudier la dynamique d'un solide, puis deux modèles classiques en mécanique des fluides, donnés respectivement par les équations de Navier-Stokes et d'Euler, et enfin les équations newtoniennes qui régissent la dynamique d'un solide immergé.

I.1.1 Dynamique d'un solide

Nous distinguons ici les cas de la dimension 3 et de la dimension 2.

I.1.1.1 En dimension 3

Considérons un corps solide occupant initialement un sous-ensemble fermé borné connexe et simplement connexe $\mathscr{S}_0 \subset \mathbb{R}^3$ avec une frontière régulière. Il se déplace de manière rigide de telle sorte qu'au temps t il occupe un domaine noté $\mathscr{S}(t)$ isométrique à $\mathscr{S}_0$. Plus précisément, notant $h(t)$ la position du centre de masse du solide au temps t, alors il existe une rotation $Q(t) \in SO(3)$, telle que la position $\tau(t,x) \in \mathscr{S}(t)$ au temps t du point attaché au solide avec une position initiale $x \in \mathscr{S}_0$ est

$$\tau(t,x) := h(t) + Q(t)(x - h(0)). \tag{I.1}$$

Evidemment $Q(0) = Id$. De plus comme $(Q^T Q')(t)$ est anti-symétrique il existe un et un seul $r(t) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$(Q^T Q')(t)x = r(t) \wedge x.$$

Par conséquent la vitesse (eulérienne) dans le solide est donnée par

$$u_{\mathscr{S}}(t,x) := (\partial_t \tau)(t, \tau(t,\cdot)^{-1}(x)) = h'(t) + R(t) \wedge (x - h(t)) \text{ avec } R(t) := Q(t)r(t).$$

Etant donné une fonction strictement positive $\rho_{\mathscr{S}_0}$, disons dans $L^\infty(\mathscr{S}_0;\mathbb{R})$, décrivant la densité initiale dans le solide, la densité $\rho_{\mathscr{S}}(t,\cdot)$ dans le solide au temps t est donnée pour tout $x \in \mathscr{S}(t)$ par

$$\rho_{\mathscr{S}}(t,x) = \rho_{\mathscr{S}_0}(t, \tau(t,\cdot)^{-1}(x)).$$

La masse du solide $m > 0$, le centre de masse $h(t)$ et la matrice d'inertie $\mathscr{J}(t)$ peuvent être calculés comme les premiers moments :

$$m := \int_{\mathscr{S}(t)} \rho_{\mathscr{S}}(t,x)dx = \int_{\mathscr{S}_0} \rho_{\mathscr{S}_0}(x)dx > 0, \tag{I.2}$$

$$mh(t) := \int_{\mathscr{S}(t)} x\rho_{\mathscr{S}}(t,x)dx, \tag{I.3}$$

$$\mathscr{J}(t) := \int_{\mathscr{S}(t)} \rho_{\mathscr{S}}(t,x)\big(|x - h(t)|^2 \mathrm{Id}_3 - (x - h(t)) \otimes (x - h(t))\big)dx. \tag{I.4}$$

Il s'ensuit que $\mathscr{J}(t)$ est symétrique définie positive et satisfait la loi de Sylvester :

$$\mathscr{J}(t) = Q(t)\mathscr{J}_0 Q^T(t),$$

où $\mathscr{J}_0$ est la valeur initiale $\mathscr{J}_0 := \mathscr{J}(0)$ de $\mathscr{J}$. De la même manière nous notons $h_0 := h(0)$ la position initiale du centre de masse.

L'énergie cinétique du solide est donnée par

$$\mathscr{E}_{\mathscr{S}}(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathscr{S}(t)} \rho_{\mathscr{S}}(t,x)u_{\mathscr{S}}(t,x)^2 dx = \frac{1}{2}mh'(t)^2 + \frac{1}{2}\mathscr{J}_0 r(t) \cdot r(t) = \frac{1}{2}mh'(t)^2 + \frac{1}{2}\mathscr{J}(t)R(t) \cdot R(t). \tag{I.5}$$

I.1.1.2 En dimension 2

En dimension 2 nous devons faire quelques modifications ; en particulier le nombre de degrés de liberté du solide est diminué de moitié. La position $h(t)$ du centre de masse est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, la matrice de rotation du solide $Q(t)$ est alors un élément de $SO(2)$, la vitesse de rotation $r(t)$ est un scalaire défini par

$$(Q'Q^T)(t)x = r(t)x^\perp.$$

Ici la notation $x^\perp$ désigne $x^\perp := (-x_2, x_1)$, quand $x = (x_1, x_2)$.

La vitesse dans le solide est donnée par

$$u_{\mathscr{S}}(t,x) := h'(t) + r(t)(x - h(t))^\perp,$$

l'inertie $\mathscr{J}_0$ est un scalaire indépendant du temps et l'énergie cinétique du solide s'écrit alors

$$\mathscr{E}_{\mathscr{S}}(t) := \frac{1}{2}mh'(t)^2 + \frac{1}{2}\mathscr{J}_0 r(t)^2. \tag{I.6}$$

I.1.2 Modèles fluides considérés

Dans ce mémoire nous étudions le cas d'un solide immergé dans un fluide newtonien incompressible homogène, de densité $\rho_F = 1$, de telle sorte que le système fluide-corps rigide occupe un ensemble Ω de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ qui est soit un ouvert borné soit $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ tout entier. Le fluide occupe donc au temps t l'ouvert $\mathscr{F}(t) := \Omega \setminus \mathscr{S}(t)$ et initialement l'ouvert $\mathscr{F}_0 := \Omega \setminus \mathscr{S}_0$.

I.1.2.1 Les équations de Navier-Stokes et d'Euler

Suivant que nous prenons en compte la viscosité cinématique ou non, nous sommes amené à considérer soit les équations de Navier-Stokes soit les équations d'Euler. Plus précisément si nous désignons respectivement par

$$u : (t,x) \in \cup_{t\in[0,+\infty)}\{t\} \times \mathscr{F}(t) \to \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3 \text{ et } p : (t,x) \in \cup_{t\in[0,+\infty)}\{t\} \times \mathscr{F}(t) \to \mathbb{R}$$

la vitesse et la pression dans le fluide, ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = \nu\Delta u \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}(t), \tag{I.7}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}(t), \tag{I.8}$$

dans le cas visqueux, ce sont les équations de Navier-Stokes incompressible ; et

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}(t), \tag{I.9}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}(t), \tag{I.10}$$

dans le cas non-visqueux ou parfait, ce sont les équations d'Euler incompressible.

La différence tient donc dans le terme supplémentaire dans le membre de droite de (I.7) qui traduit l'effet dissipatif de la viscosité et où ν est un coefficient strictement positif. La contrainte d'incompressibilité est quant à elle traduite par les équations (I.8) et (I.10) qui sont des formes dégénérées de la loi de conservation de la masse.

Les équations d'Euler correspondent au cas limite où le coefficient ν est nul. Cependant cette limite est singulière, en particulier, parce que l'ordre du système dégénère, les différences de comportement des solutions peuvent être conséquentes, en particulier au voisinage d'un bord solide, ce qui est inévitable dans le contexte de ce mémoire.

I.1.2.2 Conditions d'interface

Une première différence réside en les conditions aux limites que nous prescrivons sur un bord solide. Commençons par évoquer le cas d'un bord fixe, cela est utile notamment dans le cas où nous considérons que le système est contenu dans un ouvert borné Ω.

Dans le cas des équations d'Euler, il y a peu d'équivoque : il est naturel de prescrire la condition de non-pénétration sur $\partial\Omega$: $u\cdot n = 0$, où $n(x)$ désigne la normale, disons unitaire sortante, du domaine fluide.

En revanche, pour les équations de Navier-Stokes, il s'agit d'avantage d'un choix. Les conditions les plus courantes sont

- la condition d'adhérence : $u = 0$,
- la condition de Navier $u\cdot n = 0$ et $(D(u)\cdot n)_{tan} = -\alpha u$, où $\alpha \geqslant 0$ est le coefficient de frottement, $D(u)$ est le tenseur des deformations
$$D(u) := \frac{1}{2}\Big(\nabla u + (\nabla u)^T\Big) = (\frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j))_{i,j}, \tag{I.11}$$
et l'indice "tan" indique que l'on considère la composante tangentielle. Notons que nous nous restreignons ici par souci de simplicité à un coefficient de frottement scalaire et constant, mais que nous pouvons facilement imaginer un contexte physique où α est une matrice qui varie avec la position x sur le bord.

Si nous considérons maintenant le cas du bord d'un solide $\mathscr{S}(t)$ en mouvement avec un champ de vitesse eulérien $u_{\mathscr{S}}(t,x)$, alors les conditions précédentes doivent être adaptées de la façon suivante :

- la condition de non-pénétration : $u\cdot n = u_{\mathscr{S}}\cdot n$,
- la condition d'adhérence : $u = u_{\mathscr{S}}$,
- la condition de Navier : $u\cdot n = u_{\mathscr{S}}\cdot n$ et $(D(u)\cdot n)_{tan} = -\alpha(u - u_{\mathscr{S}})$.

Notons que la normale $n = n(t,x)$ dépend ici évidemment encore de la position x sur le bord mais aussi du temps.

I.1.2.3 Energie cinétique d'un fluide

L'énergie d'un fluide se révéle utile à de nombreuses reprises dans la suite de ce mémoire. Elle s'écrit :

$$\mathscr{E}_{\mathscr{F}}(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathscr{F}(t)} u(t,x)^2 dx. \tag{I.12}$$

Notons cependant que considérer une énergie finie pour un fluide occupant un domaine plan non borné est assez restrictif. Pour illustrer ceci considérons le cas où le domaine fluide est le plan tout entier, c'est-à-dire $\mathscr{F}(t) := \mathbb{R}^2$, et introduisons la vorticité du fluide

$$\omega := \operatorname{rot} u := \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1.$$

La vitesse peut s'exprimer en fonction de la vorticité grâce à l'opérateur de Biot-Savart qui associe à toute fonction scalaire "raisonnable" g le champ de vecteurs

$$K_{\mathbb{R}^2}[g](x) := \int_{\mathbb{R}^2} H_{\mathbb{R}^2}(x-y)g(y)dy, \tag{I.13}$$

où

$$H_{\mathbb{R}^2}(x) := \frac{1}{2\pi}\frac{x^\perp}{|x|^2}.$$

Par conséquent $H_{\mathbb{R}^2}(x) := \nabla^\perp G_{\mathbb{R}^2}(x)$, où $G_{\mathbb{R}^2}$ est le potentiel newtonien $G_{\mathbb{R}^2}(x) := \frac{1}{2\pi}\ln(x)$ et $\nabla^\perp$ désigne le champ de vecteurs $\nabla^\perp := (-\partial_2, \partial_1)$.

Constatons alors, par un simple développement limité, que pour une fonction régulière à support compact g de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $K[g]$ est dans L^2 si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^2} g(x)dx = 0$.

Pour s'affranchir de cette dernière condition, en particulier lorsque nous considérons le cas des équations d'Euler, nous pouvons utiliser une des deux méthodes qui suivent :

– La première qui s'inspire de [28] et de [125] consiste à considérer pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, une fonction $g_\alpha \in C_c^\infty(]0,\infty[;\mathbb{R})$ telle que $2\pi \int_0^{+\infty} g_\alpha(r)rdr = \alpha$. Nous définissons alors $H_\alpha := K[g_\alpha(\|\cdot\|)]$ et l'espace

$$E_{\alpha,\mathbb{R}^2} := H_\alpha + L^2_\sigma(\mathbb{R}^2), \tag{I.14}$$

où $L^2_\sigma(\mathbb{R}^2)$ désigne l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Le cas d'énergie finie correspond donc à $\alpha = 0$, autrement dit : $E_{0,\mathbb{R}^2} = L^2_\sigma(\mathbb{R}^2)$. Si nous avons choisi g_α à symétrie radiale c'est que cela entraîne que H_α est une solution stationnaire des équations d'Euler, ce qui aide grandement à obtenir, via un lemme de Gronwall, une borne de la croissance en temps de la partie L^2 d'une solution des équations d'Euler.

– Une autre possibilité consiste à renormaliser l'énergie : introduisant la fonction courant ψ définie par $\psi := \int_{\mathbb{R}^2} G_{\mathbb{R}^2}(x-y)\omega(y)dy$, de sorte que $u = \nabla^\perp \psi$, nous avons par une intégration par parties formelle (c'est la raison du signe "$\sim$" plutôt qu'un "$=$" : il peut y avoir une contribution non nulle de l'infini qui invalide l'égalité)

$$\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} u\cdot\nabla^\perp\psi dx \sim -\int_{\mathbb{R}^2}\omega\psi dx = -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} G_{\mathbb{R}^2}(x-y)\omega(x)\omega(y)\,dxdy. \tag{I.15}$$

Cette dernière quantité a l'avantage d'être finie dans des cas où la vorticité n'est pas d'intégrale nulle.

Cette difficulté se pose également dans le cas d'un domaine extérieur c'est-à-dire si par exemple le domaine fluide est le complémentaire d'un compact connexe occupé par un solide. Nous utilisons d'ailleurs dans ce contexte des prolongements des deux méthodes ci-dessus dans ce qui suit.

I.1.2.4 Trajectoires des particules d'un fluide

Il peut être aussi utile de considérer le point de vue lagrangien quant à la dynamique du fluide, c'est-à-dire d'associer au champ de vecteurs vitesse u le flot η défini, quand c'est possible, comme solution de

$$\partial_t \eta(t,x) = u(t,\eta(t,x)) \text{ et } \eta(0,x) = x. \tag{I.16}$$

Alors $\eta(t,x)$ indique la position occupée au temps t par une particule de fluide initialement en x. C'est donc l'analogue pour le fluide de la fonction τ introduite en (I.1) pour la dynamique du solide. Notons qu'une conséquence de l'incompressibilité est qu'au moins formellement, pour tout t, la fonction $\eta(t,\cdot)$ préserve le volume et l'orientation.

I.1.3 Dynamique d'un solide immergé

Considérons maintenant la dynamique d'un solide immergé dans un fluide incompressible. Nous supposons que la seule force agissant sur le solide est la force exercée par le fluide à sa surface, de sorte que les lois newtoniennes de conservation des quantités de mouvement linéaire et angulaire s'écrivent :

$$mh''(t) = -\int_{\partial\mathcal{S}(t)} \Sigma n\, ds, \tag{I.17}$$

$$(\mathcal{J}R)'(t) = -\int_{\partial\mathcal{S}(t)} (x-h)\wedge\Sigma n\, ds, \tag{I.18}$$

ou, plus simplement,

$$\mathcal{J}_0 r'(t) = -\int_{\partial\mathcal{S}(t)} (x-h)^\perp\cdot\Sigma n\, ds$$

en dimension 2. Nous notons ds la mesure de surface sur $\partial\mathscr{S}(t)$. Evidemment cette mesure dépend du temps mais nous choisissons ici délibérément de ne pas mettre d'indice de temps pour ne pas trop alourdir les notations.

Dans le membre de droite des équations (I.17) et (I.18) apparaît la quantité Σ, c'est le tenseur de Cauchy, qui est défini par

$$\Sigma := \Sigma(u,p) := -pId + 2\nu D(u).$$

Dans le cas des équations d'Euler, le coefficient ν ci-dessus s'annule et nous constatons donc que seule la pression du fluide intervient dans les membres de droites des équations ci-dessus.

I.2 Problème de Cauchy en domaine non borné

Une difficulté dans l'analyse du problème est que le domaine occupé par le fluide dépend du temps. Lorsque le fluide n'est pas borné extérieurement, c'est-à-dire quand $\Omega = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, la situation est plus facile car nous pouvons alors réécrire le système dans un référentiel indépendant du temps par un changement de variable très simple, qui conserve en grande partie la structure du système.

I.2.1 Changement de variables dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Supposons que l'origine du repère initial est choisie de sorte que la position initiale h_0 du centre de masse vaut $h_0 = 0$ pour simplifier.

I.2.1.1 Cas de $\mathbb{R}^3$

Définissons

$$\ell(t) := Q(t)^T h'(t),\, \tilde{u}(t,x) := Q(t)^T u(t, Q(t)x + h(t)),\ \tilde{p}(t,x) := p(t, Q(t)x + h(t)),$$

et nous introduisons

$$\sigma := -\tilde{p}\,\mathrm{Id}_3 + 2\nu D(\tilde{u}),\ \text{où } D(\tilde{u}) := (\frac{1}{2}(\partial_j \tilde{u}_i + \partial_i \tilde{u}_j))_{i,j} \text{ et } \tilde{u}_{\mathscr{S}}(t,x) := \ell(t) + r(t) \wedge x.$$

Le système s'écrit maintenant, en omettant les tildes,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [(u - u_{\mathscr{S}}) \cdot \nabla]u + r \wedge u + \nabla p = \nu \Delta u \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}_0, \tag{I.19}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ pour } x \in \mathscr{F}_0, \tag{I.20}$$

$$m\ell' = -\int_{\partial\mathscr{S}_0} \sigma n\, ds + m\ell \wedge r, \tag{I.21}$$

$$\mathscr{J}_0 r' = -\int_{\partial\mathscr{S}_0} x \wedge \sigma n\, ds + (\mathscr{J}_0 r) \wedge r. \tag{I.22}$$

Les conditions aux limites sur l'interface fluide-solide ne sont, elles, pas affectées par ce changement de variables, que ce soit dans le cas de la condition d'adhérence ou de celui de la condition de Navier.

Dans le cas des équations d'Euler, nous obtenons en faisant $\nu = 0$ dans les équations précédentes, le système :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [(u - u_{\mathscr{S}}) \cdot \nabla]u + r \wedge u + \nabla p = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}_0, \tag{I.23}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}_0, \tag{I.24}$$

$$m\ell' = \int_{\partial\mathscr{S}_0} pn\, ds + m\ell \wedge r, \tag{I.25}$$

$$\mathscr{J}_0 r' = \int_{\partial\mathscr{S}_0} px \wedge n\, ds + (\mathscr{J}_0 r) \wedge r. \tag{I.26}$$

I.2.1.2 Cas de $\mathbb{R}^2$

Dans le cas de la dimension 2, le système "Navier-Stokes+solide" s'écrit, après le changement de variable analogue à celui de la section précédente,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [(u - u_{\mathscr{S}}) \cdot \nabla]u + ru^{\perp} + \nabla p = \nu \Delta u \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}_0, \tag{I.27}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}_0, \tag{I.28}$$

$$m\ell' = -\int_{\partial \mathscr{S}_0} \sigma n \, ds - mr\ell^{\perp}, \tag{I.29}$$

$$\mathscr{J}_0 r' = -\int_{\partial \mathscr{S}_0} x^{\perp} \cdot \sigma n \, ds. \tag{I.30}$$

et, en particulier lorsque $\nu = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [(u - u_{\mathscr{S}}) \cdot \nabla]u + ru^{\perp} + \nabla p = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}_0, \tag{I.31}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}_0, \tag{I.32}$$

$$m\ell' = \int_{\partial \mathscr{S}_0} pn \, ds - mr\ell^{\perp}, \tag{I.33}$$

$$\mathscr{J}_0 r' = \int_{\partial \mathscr{S}_0} px^{\perp} \cdot n \, ds. \tag{I.34}$$

où

$$u_{\mathscr{S}}(t,x) := \ell(t) + r(t)x^{\perp}.$$

I.2.2 Cas des équations de Navier-Stokes

Dans le cas des fluides visqueux, régis par les équations de Navier-Stokes incompressible, nous disposons de la théorie des solutions faibles de Leray, cf. [112, 113], qui utilise de manière cruciale l'énergie du système. Cette théorie s'adapte très bien au cas d'un solide immergé dans un fluide non borné. En particulier il est tout à fait notable que l'on puisse donner une formulation faible globale, au sens où les équations du solide et du fluide se trouvent condensées en une seule égalité variationnelle où la vitesse solution comme la vitesse test sont des vitesses solénoïdales définies dans tout l'espace avec la contrainte d'être rigides sur le domaine occupé par le solide.

Nous disposons alors des résultats d'existence de solutions à cette formulation faible donnés par les travaux de [100, 151, 158], du moins pour le cas où nous considérons la condition de Dirichlet sur le bord. Nous donnons dans la section II.1.1 une extension, assez directe, au cas de la condition de Navier obtenue dans [140] avec Gabriela Planas.

Dans le cas des conditions de Navier, ces solutions faibles bénéficient d'une remarquable propriété de régularité à savoir que les vitesses de translation et de rotation du solide sont H^1 en temps, cf. Section II.1.2. Cette propriété est un avatar du phénomène de masse ajoutée, pour lequel nous renvoyons le lecteur à Childress [29] et à Galdi [57]. Ce phénomène correspond à l'idée assez intuitive qu'un solide en mouvement dans un fluide incompressible semble avoir une inertie plus grande puisque le fluide environnant doit également être accéléré pour faire place au solide. Ce phénomène est crucial à plusieurs reprises dans ce mémoire.

Notons que nous retrouvons le cas des équations de Navier-Stokes dans un domaine fixe dans la limite où l'inertie du solide tend vers l'infini de sorte qu'il ne peut plus bouger, cf. Section II.1.3.

Notons qu'en dimension 2, ces solutions à la Leray sont uniques, y compris pour le cas d'un solide en mouvement et que nous considérons une condition de type Dirichlet ou Navier. La preuve est d'ailleurs sensiblement la même que dans les cas historiques traités par Leray d'un fluide remplissant tout le plan ou remplissant une cavité bornée imperméable fixe. Nous verrons par la suite que l'adaptation de ce théorème au cas où le système fluide-solide n'occupe qu'un domaine borné est plus délicate.

I.2.3 Cas des équations d'Euler

Pour les équations d'Euler, on ne bénéficie pas de l'effet régularisant de la viscosité. En conséquence, le traitement des non-linéarités est plus délicat et une démarche naturelle est de commencer par examiner les solutions classiques, puis de voir si la structure particulière des non-linéarités permet, par des propriétés de compacité, de construire des solutions plus faibles.

L'existence (localement en temps) et l'unicité de solutions classiques aux équations d'Euler sont connues depuis les travaux de Lichtenstein [114, 115, 116, 117, 118], Günter [84] et Wolibner [172] qui utilisent des espaces de Hölder $C^{l,\lambda}(\Omega)$ pour $l \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in (0,1)$, munis des normes :

$$\|u\|_{C^{l,\lambda}(\Omega)} := \sup_{|\alpha| \leqslant l} \big(\|\partial^{\alpha} u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|\partial^{\alpha} u(x) - \partial^{\alpha} u(y)|}{|x-y|^{r}} \big),$$

ou plus exactement les espaces de champs de vecteurs solénoïdaux de régularité Hölder, pour $l \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in (0,1)$:

$$C^{l,\lambda}_\sigma(\Omega) := \Big\{ u \in C^{l,\lambda}(\Omega) \Big/ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \Big\}.$$

Plus précisément nous avons le résultat suivant pour un fluide parfait incompressible remplissant un domaine régulier borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec un bord imperméable $\partial\Omega$.

Théorème 1. *Il existe $C_* = C_*(\Omega) > 0$ tel que, pour tout l dans $\mathbb{N}$ et λ dans $(0,1)$, pour tout u_0 dans $C^{l+1,\lambda}_\sigma(\Omega)$, il existe $T > T_*(\Omega, \|u_0\|_{C^{1,\lambda}(\Omega)}) := C_*/\|u_0\|_{C^{1,\lambda}(\Omega)}$ et une unique solution u dans $C_w([0,T], C^{l+1,\lambda}(\Omega))$ de*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &= 0, \text{ pour } x \in \Omega, \text{ pour } t \in [0,T], && \text{(I.35)}\\
\operatorname{div} u &= 0, \text{ pour } x \in \Omega, \text{ pour } t \in [0,T], && \text{(I.36)}\\
u|_{t=0} &= u_0, \text{ pour } x \in \Omega, && \text{(I.37)}\\
u\cdot n &= 0, \text{ pour } x \in \partial\Omega, \text{ pour } t \in [0,T]. && \text{(I.38)}
\end{aligned}$$

Ci-dessus, C_w désigne la continuité par rapport à la topologie faible-$*$ de $C^{l+1,\lambda}(\Omega)$.

Nous pourrions bien sûr aussi considérer d'autres types d'espaces comme, disons, les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$ pour $s > 5/2$ ou des espaces de Besov inhomogènes $B^s_{p,q}(\Omega)$, avec $1 \leqslant p,q \leqslant +\infty$ et avec $s > \frac{3}{p} + 1$ où $s \geqslant \frac{3}{p} + 1$ si $q = 1$ (de sorte que $B^s_{p,q}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $\mathrm{Lip}(\Omega)$). Nous renvoyons ici aux papiers plus récents [50, 105, 107].

Mentionnons aussi le travail de Bardos et Titi [11] qui montre que les équations d'Euler en 3d sont mal posées dans l'espace de Hölder $C^{0,\lambda}(\Omega)$, où $\lambda \in (0,1)$.

Le résultat ci-dessus n'est que local, l'existence globale en temps de solutions classiques en trois dimensions est une question ouverte.

En dimension deux, non seulement les solutions classiques existent globalement mais en plus, les équations d'Euler sont propices à une théorie de solutions plus faibles, comme l'a montré Yudovich en donnant un résultat d'existence et d'unicité pour une donnée initiale de vorticité bornée. La recherche de solutions faibles a ensuite été redynamisée, sous l'impulsion notamment de Di Perna et Majda, qui ont obtenu l'existence de solutions faibles à vorticité $L^1 \cap L^p$, avec $p > 1$.

Venons-en au système "Euler+solide". Pour des flots irrotationnels les premières études du mouvement d'un solide dans un fluide parfait remontent à D'Alembert, Kelvin et Kirchhoff.

Pour les fluides non irrotationnels citons les résultats d'Ortega, Rosier et Takahashi [137]-[138] en dimension deux avec énergie finie, de Rosier et Rosier [141] pour le cas d'un solide sphérique immergé dans $\mathbb{R}^3$ et plus récemment de Wang et Zang [170] qui traite le cas d'un solide de forme quelconque.

Dans la section II.2.1 nous évoquons un résultat établi dans l'appendice de [156] qui donne l'existence et l'unicité de solutions classiques pour un solide de forme quelconque, avec une méthode très proche de Lichtenstein [114, 115, 116, 117, 118], Günter [84] et Wolibner [172] en cela qu'elle utilise le transport de la vorticité.

Avec Olivier Glass dans [75] et avec Olivier Glass et Christophe Lacave dans l'appendice de [73] nous avons aussi défini des solutions plus faibles en dimension deux d'espace, adaptant au cas d'un solide immergé les travaux de Yudovich et de Di Perna-Majda pour un fluide seul. Autrement dit nous considérons des fluides dont la vorticité est $L^1 \cap L^p$ avec $p \in (1, +\infty]$.

Notons que ces travaux portent sur le cas où le système "fluide + solide" n'est pas borné extérieurement. A l'instar du cas d'un fluide seul occupant tout le plan cf. Section I.1.2.3, supposer que l'énergie cinétique est finie est alors assez restrictif. Nous verrons cependant que nous pouvons nous en affranchir en adaptant les techniques décrites dans la Section I.1.2.3.

Avec un peu de symétrie il est possible de descendre la régularité jusqu'au cas où la mesure est une vorticité diffuse, c'est le résultat de [154] qui adapte cette fois en quelque sorte le travail [43] de Delort dans le cas d'un fluide dans un domaine fixe. Une conséquence bénéfique de la symétrie est que l'énergie cinétique est finie, bien que nous considérons le cas d'un domaine non borné. En exploitant le phénomène de masse ajoutée il s'ensuit que l'accélération du solide est bornée. Une autre conséquence, cruciale, est la non concentration de la vorticité jusqu'au bord, qui provient des travaux [123, 124] de Xin, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes dans le cas où le solide est fixe.

I.3 Viscosité évanescente

Evidemment, on peut se demander si cela vaut la peine de traiter le cas non visqueux en invoquant l'argument qu'il correspond à une modélisation trop idéale pour être pertinente physiquement (les fluides sont toujours un peu visqueux, à part les superfluides !) surtout compte tenu des effets de couches limites qu'induit la viscosité aux voisinages des interfaces fluides/solides. La question est donc de savoir si le cas non visqueux correspond bien à une bonne approximation, en un sens à définir, du cas d'un fluide à faible viscosité.

I.3.1 Cas de la condition de Dirichlet

Même dans le cas d'une frontière solide fixe, une question naturelle comme celle de la convergence de la solution des équations de Navier-Stokes vers celle d'Euler dans $L^\infty_t L^2_x$ est encore ouverte. Dans le cas où la viscosité est encore relativement grande, la couche limite est laminaire et une description de type Prandtl est disponible mais cette description ne semble pas assez robuste en général pour décrire le passage à la limite, cf. [64, 86, 81]. D'un autre côté, un résultat par Kato [101] établit que la convergence a lieu dans l'espace d'énergie $L^\infty_t L^2_x$ si et seulement si le taux de dissipation d'énergie par dissipation visqueuse dans un voisinage tubulaire du bord d'épaisseur de l'ordre du coefficient de viscosité ν converge vers 0. Ce résultat indique en quelque sorte l'échelle de grandeur à laquelle il faudrait avoir une description correcte pour pouvoir déterminer si oui ou non il y a convergence.

Evidemment, dans le cas d'un corps rigide en mouvement dans un fluide, on s'attend à ce que la difficulté soit au moins aussi grande que dans le cas d'un bord fixe ; mais on peut se demander si la difficulté additionnelle que représente la dynamique du solide implique ou non une compréhension encore plus fine du comportement près de l'interface fluide-solide. Nous reviendrons sur cette question dans la Section III.1, avec des résultats relativement encourageants qui semblent indiquer que la difficulté de la question est sensiblement la même que les interfaces soient en mouvement ou non, puisqu'une condition analogue à celle dérivée par Kato dans le cas d'une frontière solide fixe permet aussi de passer à la limite dans le cas d'un corps rigide en mouvement.

I.3.2 Cas de la condition de Navier

Dans le cas de la condition de Navier, il est maintenant bien compris dans le cadre d'un bord fixe que la question de la convergence, quand la viscosité tend vers 0, est simplifiée par rapport au cas de la condition de Dirichlet, au moins quand le coefficient de friction n'est pas trop grand par rapport à la viscosité ; en particulier il y a convergence dans l'espace d'énergie, cf. par exemple [9, 12, 31, 95, 96, 128, 139]. Nous verrons dans la section III qu'un résultat similaire est vrai dans le cas d'un solide immergé. En fait nous prouvons même une convergence de la dynamique du solide dans l'espace de Sobolev H^1, la variable étant ici le temps. Ceci découle de la propriété de régularité des solutions à la Leray du cas de la condition de Navier mentionnée dans la Section I.2.2. C'est donc par ce biais une conséquence du phénomène de masse ajoutée.

I.4 Limite particulaire du système "Euler+solide"

Dans le cas où le solide est de petite taille il peut être tentant de chercher un modèle limite où le solide n'est plus qu'une particule ponctuelle. Nous envisageons aussi un modèle avec de nombreuses particules immergés dans un fluide parfait incompressible.

I.4.1 Cas d'un petit solide

Avec Olivier Glass et Christophe Lacave, nous étudions dans [73] la dynamique d'un corps immergé de petite taille et de masse non négligeable dans un fluide parfait incompressible. Plus précisément nous considérons le cas d'un corps de dimension 2 avec une masse et une circulation fixées, et nous montrons que dans la limite où le corps se réduit à un point, il apparaît comme un point vortex pour le fluide qui l'entoure, et l'accélération de sa position est donnée par la relation fondamentale de la dynamique de Newton avec une force qui est proportionnelle à la circulation et à la différence de vitesse, à un angle de $\pi/2$ près, ce qui ressemble à la force de Kutta-Joukowski de la théorie irrotationnelle. Le système complet, lui, peut se voir comme une variante du système d'Euler avec point vortex de Marchioro et Pulvirenti cf. [126], où le vortex a ici une inertie.

I.4.2 Limite de champ moyen

Avec Ayman Moussa [130], nous nous sommes intéressés à un prolongement du travail précédent où on ne considère plus seulement un corps immergé mais un très grand nombre, de sorte que l'on peut se décourager de suivre la trajectoire de chacun mais plutôt se focaliser sur la densité de la "phase dispersée" que constituent ces corps. Nous partons donc d'un système "fluide + N particules", qui généralise le modèle à une particule décrit dans la section précédente. En particulier ces particules sont ponctuelles, ont une masse strictement positive et apparaissent comme des points vortex pour le fluide ambiant. Ainsi les "particules solides" participent à la vorticité du spray qu'elles constituent avec le fluide ambiant. Tant que la fraction volumique de la phase dispersée et la probabilité d'une collision restent négligeables, la dynamique de la densité de ces particules peut être décrite par une équation de type Vlasov qui est couplée avec une équation de type Euler incompressible pour le fluide.

Nous donnons dans [130] une dérivation de ce modèle Euler-Vlasov comme une limite de champ moyen d'une régularisation du système, à l'instar de ce qu'avait fait Dobrushin, voir [49], pour les équations de Vlasov-Poisson. L'originalité du spray ainsi introduit réside en la nature du couplage qui se fait par des forces de type gyroscopique, si bien que le système a une structure hamiltonienne (par opposition aux modèles classiques de sprays non conservatifs où le couplage est dû à des effets de traînées).

Nous étudions aussi le problème de Cauchy pour ce système, aussi bien du point de vue des solutions faibles que fortes.

Enfin, nous montrons, par une technique d'énergie modulée adaptée des travaux de Brenier, cf. [17], que l'on obtient, à la limite où la masse des particules solides tend vers 0, une équation fluide où toutes les particules sont transportées à la même vitesse.

I.5 Problème de Cauchy en domaine borné

Venons-en à présent sur le problème de Cauchy pour le système "Navier-Stokes+solide" et le système "Euler+solide" dans le cas où le système occupe un ouvert borné fixé $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou 3. Dans ce cas, il n'y a plus de changement de variable aussi simple que dans la Section I.2.

I.5.1 Existence de solutions faibles du sytème "Navier-Stokes+solide"

L'existence de solutions faibles à la Leray dans le cas visqueux qui est due à [44, 32, 145, 53] dans le cas des conditions de Dirichlet et plus récemment à [66] dans le cas des conditions de Navier. Là encore, comme dans la Section I.2.2, la notion de solution repose sur une formulation faible globale et la preuve de l'existence de solution repose essentiellement sur l'énergie.

I.5.2 Le changement de variables d'Inoue-Wakimoto

Comme on l'a dit plus haut il n'y a plus de changement de variable aussi simple que dans la Section I.2.1. Cependant Inoue et Wakimoto ont introduit dans [97] un changement de variable qui en quelque sorte raccorde de manière régulière le changement de variable "simple" de la section I.2.1 au voisinage du solide à la transformation identité au voisinage du bord extérieur du système, tout en conservant le caractère solénoïdal des champs de vecteurs vitesses.

Comme nous en faisons usage exclusivement en dimension 2 dans ce mémoire, nous énonçons ce changement de variables uniquement dans ce cadre. Introduisons d'abord une notation pour les voisinages tubulaires que l'on utilise à plusieurs reprises. Pour $A \subset \mathbb{R}^2$ et $\delta > 0$, nous définissons

$$\mathscr{V}_\delta(A) := \Big\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\Big/\; \mathrm{dist}(x,A) \leqslant \delta \Big\}. \tag{I.39}$$

Proposition 1 ([76]). *Soit Ω un ouvert régulier connexe de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{S}_0$ une partie fermée régulière connexe et simplement connexe de Ω. Il existe un voisinage compact U de* Id *dans le groupe spécial euclidien $SE(2)$, $\delta > 0$ et $\Psi \in C^\infty(U; \mathit{Diff}(\overline{\Omega}))$ tel que $\Psi[\mathrm{Id}] = \mathrm{Id}$ et tel que pour tout $\tau \in U$,*

$$\Psi[\tau] \text{ préserve le volume,} \tag{I.40}$$

$$\Psi[\tau](x) = \tau(x) \text{ sur } \mathscr{V}_\delta(\mathscr{S}_0) \quad \text{et} \quad \Psi[\tau](x) = x \text{ sur } \mathscr{V}_\delta(\partial\Omega) \cap \overline{\Omega}. \tag{I.41}$$

Ci-dessus, $\mathrm{Diff}(\overline{\Omega})$ désigne l'ensemble des C^∞-difféomorphismes de $\overline{\Omega}$.

L'idée de la preuve est assez simple : pour préserver le caractère incompressible nous réalisons un cut-off au niveau de la fonction courant. Par ailleurs nous en déduisons le résultat suivant.

Corollaire 1 ([76]). *Quitte à réduire U si nécessaire on a pour un $C > 0$:*

$$\forall \tau, \tilde{\tau} \in U, \quad \|\Psi[\tau] \circ \{\Psi[\tilde{\tau}]\}^{-1} - \mathrm{Id}\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leqslant C \|\tau - \tilde{\tau}\|_{\mathbb{R}^3}, \tag{I.42}$$

et si $\tau_t, \tilde{\tau}_t \in C^1([0,T]; SE(2))$, alors pour tout $t_0 \in [0,T]$,

$$\left\| \left[\frac{d}{dt} \left(\Psi[\tau_t] \circ \{\Psi[\tilde{\tau}_t]\}^{-1} \right) \right]_{t=t_0} \right\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leqslant C \Big(\|\tilde{\tau}'_{t_0}\|_{\mathbb{R}^3} \|\tau_{t_0} - \tilde{\tau}_{t_0}\|_{\mathbb{R}^3} + \|\tau'_{t_0} - \tilde{\tau}'_{t_0}\|_{\mathbb{R}^3} \Big). \tag{I.43}$$

Pour éviter toute confusion précisons que
- nous injectons $SE(2) \subset \mathbb{R}^3$ de telle sorte que nous utilisons la norme dans $\mathbb{R}^3$ pour les éléments de $SE(2)$,
- la notation τ_t désigne $\tau_t := \tau(t, \cdot)$,
- $\{\Psi[\tilde{\tau}_t]\}^{-1}$ désigne l'inverse de $\Psi[\tilde{\tau}_t]$ par rapport à la variable x,
- τ'_t désigne la dérivée en temps de τ_t, autrement dit $\tau'_t := \partial_t \tau$.

I.5.3 Unicité en dimension 2

Une question naturelle est de savoir si nous avons encore, comme dans le cas sans solide, unicité en dimension 2 dans ce cadre. Nous répondrons à cette question pour le cas des conditions de Dirichlet dans la section V.1.2 en exposant un résultat obtenu avec Olivier Glass dans [76]. La preuve utilise justement, entre autres, le changement de variable d'Inoue-Wakimoto afin que, cherchant à comparer deux solutions, les deux champs de vitesse considérés soient rigides au même endroit. La réponse est cependant partielle au sens où l'unicité n'est assurée que tant qu'il n'y a pas de collision, ce qui semble dépendre de la géométrie, voir par exemple [90, 89, 65].

D'un autre côté les résultats de [91, 153] prouvent que de telles solutions faibles ne peuvent pas être uniques s'il y a une collision.

I.5.4 Cas des équations d'Euler

Avec Olivier Glass et Takéo Takahashi, nous donnons dans l'appendice de [78] une preuve que dans le cadre classique, le mouvement d'un solide immergé dans un fluide parfait incompressible est un problème bien posé, le système "fluide + solide" étant contenu dans un domaine borné de dimension 3. Notre analyse repose sur le point de vue lagrangien, qui consiste à suivre l'évolution des particules du fluide, et sur le transport de la vorticité. Elle donne non seulement l'existence et l'unicité d'une solution classique mais aussi la dépendance continue des données initiales. Ceci simplifiait et complétait l'analyse menée par Houot, San Martin et Tucsnak dans le travail [92].

Depuis l'article [6] d'Arnold, de nombreux travaux considèrent les fluides parfaits incompressibles avec un point de vue géométrique, réinterprétant les solutions des équations d'Euler incompressible comme les géodésiques d'une variété riemannienne de dimension infinie. Dans le travail [74] en collaboration avec Olivier Glass, nous avons appliqué cette idée au cas où un corps est immergé dans le fluide, le système "fluide+solide" étant contenu dans un domaine borné de dimension 3 comme dans [78] ; nous montrons l'équivalence des notions de solution classique du système d'équations aux dérivées partielles et de géodésique au sens où elles sont les points critiques d'une action, qui est l'intégrale en temps de l'énergie cinétique totale du système.

Dans [76], toujours avec Olivier Glass, nous étendons l'existence et l'unicité de solutions à la Yudovich des résultats précédents au cas où le système "fluide + solide" occupe un domaine borné plan. Comme dans la Section I.5.3 on utilise le changement de variable d'Inoue-Wakimoto pour montrer l'unicité.

I.6 Régularité des trajectoires du système "Euler+solide"

Une propriété qualitative, assez surprenante, du système "Euler+solide" est que la trajectoire du solide immergé peut être régulière même si le champ des vitesses dans le fluide n'est lui que très peu régulier. Commençons par traiter le cas des solutions classiques.

I.6.1 Solutions classiques

Dans l'article [78] nous montrons que la régularité du mouvement d'un corps solide dans un fluide parfait incompressible qui occupe un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ et dont la vitesse initiale du fluide est dans l'espace de Hölder $\boldsymbol{C}^{1,r}$ ne peut être limitée que par la régularité des bords (du corps solide et du domaine). En particulier, si les bords sont analytiques, alors le mouvement du corps solide est analytique (tant que la solution classique existe et que le corps solide ne touche pas le bord). De plus, dans ce cas, le mouvement dépend de manière $\boldsymbol{C}^\infty$ des données initiales. En fait, notre résultat établit aussi la régularité des trajectoires des particules du fluide, ce qui étend des résultats précédents de Chemin [26], [27], de Kato [104] et de Serfati [149, 148, 150] pour le cas d'un fluide tout seul.

I.6.2 Solutions faibles

Pour des solutions plus faibles, la situation, ne serait-ce que bibliographique, se dégrade un peu : même dans le cas d'un fluide tout seul, occupant le plan tout entier, il n'y a de résultat dans ce sens que pour des solutions à la Yudovich. Ce sont des résultats de Gamblin [61] et de Serfati [149, 148, 150]. Ils montrent que les trajectoires des particules du fluide sont de régularité Gevrey d'ordre 3.

Dans l'article [155], nous étendons ces résultats au cas où le fluide occupe un domaine borné (fixe) du plan. En particulier nous montrons que si le bord du domaine est analytique alors les trajectoires des particules du fluide sont Gevrey 3.

Avec Olivier Glass nous en tirons ensuite profit dans [75, 76] pour étendre nos résultats sur le système "fluide + solide"; plus précisément, nous montrons que pour un corps rigide immergé dans un fluide planaire non borné, avec une régularité du champ de vitesse fluide à la Yudovich, et les bords solides analytiques, les trajectoires, du solide et des particules du fluide, sont Gevrey 3.

Notons que dans ce chapitre, par souci de cohérence et de simplicité, on ne considère que le cas d'un domaine borné. Les résultats s'étendent cependant au cas d'un domaine non borné, avec une difficulté supplémentaire liée au contrôle des basses fréquences, cf. [75].

Chapitre II

Problème de Cauchy en domaine non borné

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'existence et à l'unicité de solutions aux systèmes "Euler+solide" et "Navier-Stokes+solide" en domaine non borné, en tirant profit du changement de variables de la section I.2.1. Nous considérons

– les équations (I.19)-(I.22) pour le cas des équations de Navier-Stokes en dimension 3,
– les équations (I.23)-(I.26) pour le cas des équations d'Euler en dimension 3,
– les équations (I.27)-(I.30) pour le cas des équations de Navier-Stokes en dimension 2,
– les équations (I.31)-(I.34) pour le cas des équations d'Euler en dimension 2,

avec des conditions aux limites et initiales adéquates.

Un certain nombre de résultats évoqués ici ont été obtenus dans des collaborations avec Gabriela Planas dans [140], avec Olivier Glass dans [77], avec Olivier Glass et Christophe Lacave dans [73], et seul dans [156, 154].

II.1 Cas des équations de Navier-Stokes

II.1.1 Existence de solutions

Comme mentionné en introduction nous donnons ici des énoncés qui généralisent la théorie de Leray, cf. [112, 113], au cas où un solide est en mouvement dans un fluide visqueux incompressible. Nous considérons en parallèle deux cas selon que nous considérons une condition de Dirichlet ou de Navier à l'interface fluide-solide. La première étape consiste à définir une notion de solution faible convenable. Une idée astucieuse, que l'on peut retrouver par exemple dans [100, 151], est de définir un champ de vitesse solénoïdal dans tout l'espace qui concatène la vitesse du fluide et celle du solide. Introduisons donc l'espace suivant :

$$\mathscr{H} := \{u \in L^2(\mathbb{R}^3)/ \ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \text{ et } D(u) = 0 \text{ dans } \mathscr{S}_0\}.$$

Rappelons que $D(u)$ est le tenseur des déformations défini en (I.11).

On peut montrer facilement (cf. par exemple le Lemme 1.1 de [159], p.18), que pour tout $u \in \mathscr{H}$, il existe un et un seul couple $(\ell_u, r_u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in \mathscr{S}_0$, $u(x) = \ell_u + r_u \wedge x$. Quand $u \in \mathscr{H}$, nous notons $u_{\mathscr{S}}$ sa restriction à $\mathscr{S}_0$. Nous munissons l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$ du produit scalaire suivant

$$(u,v)_{\mathscr{H}} := \int_{\mathscr{F}_0} u \cdot v \, dx + \int_{\mathscr{S}_0} \rho_{S_0} u \cdot v \, dx,$$

et on observe que quand u, v sont dans $\mathscr{H}$ on obtient :

$$(u,v)_{\mathscr{H}} = \int_{\mathscr{F}_0} u \cdot v \, dx + m\ell_u \cdot \ell_\psi + \mathscr{J}_0 r_u \cdot r_\psi, \tag{II.1}$$

en utilisant (I.2)-(I.3)-(I.4). Les espaces $L^2(\mathbb{R}^3)$ et $\mathscr{H}$ sont des espaces de Hilbert pour $(\cdot,\cdot)_{\mathscr{H}}$.

Introduisons aussi les espaces

$$\underline{\mathscr{V}}_D := \{u \in \mathscr{H}/ \ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx < +\infty\} \text{ et } \mathscr{V}_D := \{u \in \mathscr{H}/ \ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x)|^2 (1+|x|^2) dx < +\infty\},$$
$$\underline{\mathscr{V}}_N := \{u \in \mathscr{H}/ \ \int_{\mathscr{F}_0} |\nabla u(x)|^2 dx < +\infty\} \text{ et } \mathscr{V}_N := \{u \in \mathscr{H}/ \ \int_{\mathscr{F}_0} |\nabla u(x)|^2 (1+|x|^2) dx < +\infty\},$$

munis respectivement des normes

$$\|u\|_{\underline{\mathscr{V}}_D} := \|u\|_{\mathscr{H}} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3,dx)} \text{ et } \|u\|_{\mathscr{V}_D} := \|u\|_{\mathscr{H}} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3,(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}dx)},$$
$$\|u\|_{\underline{\mathscr{V}}_N} := \|u\|_{\mathscr{H}} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathscr{F}_0,dx)} \text{ et } \|u\|_{\mathscr{V}_N} := \|u\|_{\mathscr{H}} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathscr{F}_0,(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}dx)}.$$

Observons que $\underline{\mathscr{V}}_D \subset \underline{\mathscr{V}}_N$ et $\mathscr{V}_D \subset \mathscr{V}_N$.

Définissons maintenant pour tout (u,v,w) dans $\underline{\mathscr{V}}_N \times \underline{\mathscr{V}}_N \times \mathscr{V}_N$,

$$a_D(u,v) := -\int_{\mathscr{F}_0} D(u) : D(v), \tag{II.2}$$
$$a_N(u,v) := -\alpha \int_{\partial\mathscr{S}_0} (u-u_{\mathscr{S}})\cdot(v-v_{\mathscr{S}}) - \int_{\mathscr{F}_0} D(u) : D(v), \tag{II.3}$$
$$b(u,v,w) := m\det(r_u,\ell_v,\ell_w) + \det(\mathscr{J}_0 r_u, r_v, r_w) + \int_{\mathscr{F}_0} \Big(\big[[(u-u_{\mathscr{S}})\cdot\nabla w]\cdot\big] v - \det(r_u,v,w) \Big). \tag{II.4}$$

Le poids dans la définition de $\mathscr{V}_D$ et $\mathscr{V}_N$ a pour but de contrôler la contribution de la partie rotation de $u_{\mathscr{S}}$ dans l'avant-dernier terme de la définition de $b(u,v,w)$. Observons aussi que a_D ne dépend que de $\mathscr{S}_0$ alors que a_N dépend de $\alpha, \mathscr{S}_0$ et que b dépend de $m, \mathscr{J}_0, \mathscr{S}_0$.

Introduisons maintenant ce que l'on entend par solutions faibles à la Leray du système "Navier-Stokes+solide".

Définition 1. *Soit $u_0 \in \mathscr{H}$ et $T > 0$. On dit que*

$$u \in C_w([0,T];\mathscr{H}) \cap L^2(0,T;\underline{\mathscr{V}})$$

est une solution faible du système "Navier-Stokes+solide" associée à u_0 sur $[0,T]$, si pour tout $v \in H^1([0,T];\mathscr{H}) \cap L^\infty([0,T];\mathscr{V})$ et pour tout $t \in [0,T]$,

$$(u,v)_{\mathscr{H}}(t) - (u_0, v|_{t=0})_{\mathscr{H}} = \int_0^t \Big[(u,\partial_t v)_{\mathscr{H}} + 2\nu a(u,v) + b(u,u,v) \Big], \tag{II.5}$$

où

$$(\underline{\mathscr{V}},\mathscr{V},a) = \begin{cases} (\underline{\mathscr{V}}_D,\mathscr{V}_D,a_D) \text{ dans le cas des conditions d'adhérence,} \\ (\underline{\mathscr{V}}_N,\mathscr{V}_N,a_N) \text{ dans le cas des conditions de Navier.} \end{cases}$$

Ci-dessus la notation $C_w([0,T];\mathscr{H})$ fait référence à la continuité par rapport à la topologie faible de $\mathscr{H}$. Nous utilisons aussi dans la suite de manière équivalente la notation $C([0,T];\mathscr{H}-w)$.

Il résulte essentiellement de quelques intégrations par parties qu'une solution forte des équations (I.19)-(I.22) est aussi une solution faible.

Le résultat suivant établit l'existence de solutions globales faibles du système "Navier-Stokes+solide" en domaine non borné.

Théorème 2. *Soit $u_0 \in \mathscr{H}$ et $T > 0$. Alors il existe une solution faible u du système "Navier-Stokes+solide" dans $\mathbb{R}^3$ associée à u_0 sur $[0,T]$ dans $C_w([0,T];\mathscr{H}) \cap L^2(0,T;\underline{\mathscr{V}})$. De plus, cette solution satisfait l'inégalité d'énergie suivante : pour presque tout $t \in [0,T]$,*

$$\frac{1}{2}\|u(t,\cdot)\|^2_{\mathscr{H}} - 2\nu \int_0^t a(u,u) \leqslant \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{\mathscr{H}}. \tag{II.6}$$

Il a été obtenu par Serre, cf. Théorème 4.5 de [151] (et aussi [100, 158]), dans le cas des conditions de Dirichlet et dans [140] pour les conditions de Navier.

Les points cruciaux de la preuve sont que b est une forme trilinéaire continue sur $\underline{\mathscr{V}} \times \underline{\mathscr{V}} \times \mathscr{V}$ qui a la propriété suivante :

$$(u,v) \in \underline{\mathscr{V}} \times \mathscr{V} \text{ implique que } b(u,v,v) = 0, \tag{II.7}$$

et que d'un autre coté, a est une forme bilinéaire continue sur $\underline{\mathscr{V}} \times \underline{\mathscr{V}}$.

On peut montrer sans difficulté l'analogue suivant du Théorème 2 en dimension 2 :

Théorème 3. *Soit $u_0 \in \mathscr{H}$ et $T > 0$. Alors il existe une unique solution faible u du système "Navier-Stokes+solide" dans $\mathbb{R}^2$ associée à u_0 sur $[0,T]$ dans $C([0,T];\mathscr{H}) \cap L^2(0,T;\underline{\mathscr{V}})$. De plus, cette solution satisfait l'égalité d'énergie suivante : pour tout $t \in [0,T]$,*

$$\frac{1}{2}\|u(t,\cdot)\|^2_{\mathscr{H}} - 2\nu \int_0^t a(u,u) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{\mathscr{H}}. \tag{II.8}$$

Ci-dessus on a gardé les mêmes notations que précédemment pour des objets de dimension parfois différente. Notons par exemple que la forme trilinéaire définie en (II.4) pour le cas de la dimension 3 dégénère de la façon suivante en deux dimensions :

$$b(u,v,w) := \begin{bmatrix} -mr_u \ell_v^\perp \cdot \ell_w \\ 0 \end{bmatrix} + \int_{\mathscr{F}_0} \big([(u-u_{\mathscr{S}}) \cdot \nabla] w \big) \cdot v - r_u \int_{\mathscr{F}_0} v^\perp \cdot w. \tag{II.9}$$

Dans le reste de cette section on se restreint au cas de la dimension 3, mais les résultats analogues en dimension 2 sont aussi vrais. Nous considérons à l'interface fluide-solide la condition de Navier, et cette restriction semble en revanche plus essentielle. Les résultats qui suivent sont extraits de l'article [140] coécrit avec Gabriela Planas.

II.1.2 Une propriété de régularité dans le cas des conditions de Navier

Dans le cas des conditions de Navier, la dynamique du solide bénéficie d'une remarquable propriété de régularité énoncée dans la proposition ci-dessous.

Proposition 2 ([140]). *Soit $u_0 \in \mathscr{H}$ et $T > 0$. Soit une solution faible u donnée par le Théorème 2. Alors ℓ et r sont dans $H^1(0,T;\mathbb{R}^3)$.*

La preuve de cette propriété repose sur le phénomène de masse ajoutée. Dans la force qu'exerce la pression du fluide sur la paroi du solide, on peut isoler une contribution qui a pour effet d'augmenter, virtuellement, l'inertie du solide. Pour mettre ceci en équations, on introduit les fonctions Φ_i, souvent appelées potentiels de Kirchhoff, comme les solutions de :

$$-\Delta \Phi_i = 0 \quad \text{pour } x \in \mathscr{F}_0, \tag{II.10}$$

$$\Phi_i \to 0 \quad \text{pour } |x| \to +\infty, \tag{II.11}$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = K_i \quad \text{pour } x \in \partial \mathscr{S}_0, \tag{II.12}$$

où

$$K_i := \begin{cases} n_i & \text{si } i = 1,2,3, \\ [x \wedge n]_{i-3} & \text{si } i = 4,5,6. \end{cases} \tag{II.13}$$

Pour $i = 1,\dots,6$, on introduit la fonction v_i, que l'on appelle $i$ème gradient de potentiel de Kirchhoff étendu, définie par

$$v_i := \nabla \Phi_i \text{ dans } \mathscr{F}_0 \text{ et } v_i := \begin{cases} e_i & \text{si } i = 1,2,3, \\ e_{i-3} \wedge x & \text{si } i = 4,5,6, \end{cases} \text{ dans } \mathscr{S}_0.$$

Ces fonctions ne dépendent que de $\mathscr{S}_0$.

Le point clé ici est que ces fonctions v_i sont dans l'espace $\mathscr{V}_N$ des fonctions tests associé à la condition de Navier (en revanche elles ne sont pas dans l'espace $\mathscr{V}_D$ correspondant à la condition de Dirichlet). En les injectant dans la formulation faible et à l'aide de quelques intégrations par parties, on obtient

$$\mathscr{M} \begin{bmatrix} \ell \\ r \end{bmatrix}' = \big[2\nu a(u, v_i) + b(u,u,v_i) \big]_{i \in \{1,\dots,6\}}, \tag{II.14}$$

où $\mathscr{M}$ est la matrice 6×6 donnée par

$$\mathscr{M} := \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2, \text{ avec } \mathscr{M}_1 := \begin{bmatrix} m \mathrm{Id}_3 & 0 \\ 0 & \mathscr{J}_0 \end{bmatrix}, \text{ et } \mathscr{M}_2 := \left[\int_{\mathscr{F}_0} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j \, dx \right]_{i,j \in \{1,\dots,6\}}.$$

Pour finir de montrer la Proposition 2, on va montrer que chacun des termes du membre de droite de (II.14) est dans $L^2(0,T)$. Pour le premier cela découle directement de ce que a est une forme bilinéaire continue sur $\underline{\mathscr{V}}_N \times \underline{\mathscr{V}}_N$. En revanche pour le second le fait que b est une forme trilinéaire continue sur $\underline{\mathscr{V}}_N \times \underline{\mathscr{V}}_N \times \mathscr{V}_N$ ne suffit pas à conclure. Nous contournons cependant aisément cette difficulté en exploitant la très grande régularité des gradients de potentiels de Kirchhoff étendus. Plus précisément on introduit

$$\widehat{\mathscr{V}} := \{ \phi \in \mathscr{V} / \ \phi|_{\mathscr{F}_0} \in \mathrm{Lip}(\overline{\mathscr{F}_0}) \}, \text{ muni de la norme } \|\phi\|_{\widehat{\mathscr{V}}} := \|\phi\|_{\mathscr{V}} + \|\phi\|_{\mathrm{Lip}(\overline{\mathscr{F}_0})},$$

et on constate que b s'étend naturellement en une forme trilinéaire continue sur $\mathscr{H} \times \mathscr{H} \times \widehat{\mathscr{V}}$, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $(u,v,w) \in \mathscr{H} \times \mathscr{H} \times \widehat{\mathscr{V}}$,

$$|b(u,v,w)| \leqslant C \|u\|_{\mathscr{H}} \|v\|_{\mathscr{H}} \|w\|_{\widehat{\mathscr{V}}}. \tag{II.15}$$

Il suffit ensuite d'observer que les $(v_i)_{i \in \{1,\dots,6\}}$ sont dans $\widehat{\mathscr{V}}$ pour conclure.

De plus, on observe que

$$\big[b(u,u,v_i)\big]_{i\in\{1,\ \dots,6\}} = \begin{bmatrix} m\,r\wedge\ell \\ (\mathscr{J}_0 r)\wedge r \end{bmatrix} + \left[\int_{\mathscr{F}_0}\Big(\big[\big((u-u_{\mathscr{S}})\cdot\nabla\big)\nabla\Phi_i\big]\cdot u - \det(r_u,u,\nabla\Phi_i)\Big)\right]_{i\in\{1,\dots,6\}}, \tag{II.16}$$

ce qui nous est utile à plusieurs reprises dans la suite.

II.1.3 La limite d'inertie infinie

Notons que le Théorème 2 étend au cas d'un solide en mouvement des résultats antérieurs, en particulier ceux de [31, 96], à propos de l'existence de solutions de Leray dans le cas de conditions de Navier mais sur un bord fixe (avant même tout changement de variable !). Dans ce cas le système s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\nabla u + \nabla p = \nu\Delta u \quad \text{pour} \quad x\in\mathscr{F}_0, \tag{II.17}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{pour} \quad x\in\mathscr{F}_0, \tag{II.18}$$

$$u\cdot n = 0 \quad \text{pour} \quad x\in\partial\mathscr{S}_0, \tag{II.19}$$

$$(D(u)n)\wedge n = -\alpha u\wedge n \quad \text{pour} \quad x\in\partial\mathscr{S}_0, \tag{II.20}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{II.21}$$

et une solution faible au sens de Leray de (II.17)-(II.21) est par définition une fonction

$$u\in C_w([0,T];L^2_\sigma(\mathscr{F}_0))\cap L^2(0,T;H^1(\mathscr{F}_0)),$$

telle que

1. pour tout $v\in H^1(0,T;L^2_\sigma(\mathscr{F}_0))\cap L^4(0,T;H^1(\mathscr{F}_0))$, et pour tout $t\in[0,T]$,

$$\int_{\mathscr{F}_0} u(t,\cdot)\cdot v(t,\cdot)dx - \int_{\mathscr{F}_0} u_0\cdot v|_{t=0}dx = \int_0^t \Big[\int_{\mathscr{F}_0} u\cdot\partial_t v dx + 2\nu a^*(u,v) + b^*(u,u,v)\Big], \tag{II.22}$$

   où

$$a^*(u,v) := -\alpha\int_{\partial\mathscr{S}_0} u\cdot v - \int_{\mathscr{F}_0} D(u):D(v), \quad \text{et} \quad b^*(u,v,w) := \int_{\mathscr{F}_0}[u\cdot\nabla w]\cdot v,$$

2. pour tout $t\in[0,T]$,

$$\frac{1}{2}\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathscr{F}_0)} + 2\nu\int_{(0,t)\times\mathscr{F}_0}|D(u)|^2 + 2\alpha\nu\int_0^t\int_{\partial\mathscr{S}_0}|u|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathscr{F}_0)}. \tag{II.23}$$

Ici, $L^2_\sigma(\mathscr{F}_0)$ désigne l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle $L^2(\mathscr{F}_0)$ qui sont tangents à $\partial\mathscr{S}_0$.

Le résultat suivant montre que le cas avec un solide fixe peut être pensé comme la limite d'un solide d'inertie infinie, c'est-à-dire quand m et les valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$ de $\mathscr{J}_0$ convergent vers $+\infty$ avec $\lambda_i = O(\lambda_j)$ pour tout i,j. Cette dernière condition est assez naturelle si l'on pense que la densité du solide $\rho_{\mathscr{S}_0}$ est multipliée par un facteur qui converge vers $+\infty$ dans (I.2) et (I.4).

Théorème 4 ([140])**.** *Soit $u_0\in\mathscr{H}$ avec $\ell_0 = r_0 = 0$ et $T>0$. Nous considérons pour tout m et $\mathscr{J}_0$ une solution faible u dans $C_w([0,T];\mathscr{H})\cap L^2(0,T;\underline{\mathscr{V}})$ donnée par le Théorème 2. Alors dans la limite d'inertie infinie, $u|_{\mathscr{F}_0}$ converge, à une sous-suite près, dans $L^2(0,T;L^2_{loc}(\mathscr{F}_0))$ vers une solution faible de* (II.17)-(II.21) *et ℓ et r convergent vers* 0 *dans* $H^1(0,T;\mathbb{R}^3)$.

Ce théorème se montre assez facilement, la limite d'inertie infinie est une limite régulière : il n'y a pas de dégénérescence d'ordre dans le système par passage à la limite et la plupart des estimations a priori nécessaires pour l'existence sont uniformes par rapport aux grandes inerties. Notons quand même que notre définition de la limite d'inertie infinie requiert une certaine isotropie dans la manière dont l'inertie explose.

II.2 Cas des équations d'Euler

Cette section est consacrée au cas d'un fluide parfait incompressible, avec en premier lieu une étude des solutions classiques en dimension 3, où l'hypothèse d'énergie finie est assez naturelle. Là encore on retrouve dans la limite d'inertie infinie les équations d'Euler dans un domaine fixé.

Nous reprenons ensuite l'étude spécifiquement dans le cas de la dimension 2, sans l'hypothèse d'énergie finie qui est alors un peu moins naturelle, cf. Section I.1.2.3. Nous étudions aussi dans ce cas-là des solutions faibles.

II.2.1 Solutions classiques en dimension 3

Dans le cas non-visqueux, nous établissons dans l'appendice de [156] le résultat suivant.

Théorème 5 ([156])**.** *Soit $\lambda \in (0,1)$ et $u_0 \in \mathscr{H}$ tel que $u_0|_{\mathscr{F}_0} \in H^1 \cap C^{1,\lambda}$ et $\omega := \mathrm{rot}\, u_0|_{\mathscr{F}_0}$ à support compact. Alors il existe $T > 0$ et une unique solution u du système "Euler+solide" associée à cette donnée initiale dans $C^1([0,T];\mathscr{H})$ tel que $(\nabla u)|_{[0,T]\times\mathscr{F}_0} \in C([0,T];L^2(\mathscr{F}_0,(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}dx)) \cap C_{w*}([0,T];C^{0,\lambda}(\mathscr{F}_0))$. De plus, pour tout $t \in [0,T]$,*

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{\mathscr{H}} = \|u_0\|^2_{\mathscr{H}}. \tag{II.24}$$

Ce résultat étend le résultat [141] de Rosier et Rosier qui traite le cas où le solide est une boule, dans des espaces de type Sobolev et le travail récent [170] de Wang et Zang qui étend le résultat [141] à des solides de forme quelconque, encore une fois dans des espaces de type Sobolev, avec une approche à la Kato-Lai.

La méthode utilisée dans [156] repose, elle, sur la vorticité, dans l'esprit des travaux de Lichtenstein et de Wolibner [172]. Plus précisément on introduit la vorticité $\omega := \mathrm{rot}\, u$ et on constate que le système peut se reformuler sous la forme suivante :

$$\partial_t \omega + \big[(u - u_{\mathscr{S}})\cdot\nabla\big]\omega = (\omega\cdot\nabla)(u - u_{\mathscr{S}}) \quad \text{dans } [0,T]\times\mathscr{F}_0, \tag{II.25}$$

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\, u = \omega \quad \text{dans } [0,T]\times\mathscr{F}_0, \\ \mathrm{div}\, u = 0 \quad \text{dans } [0,T]\times\mathscr{F}_0, \\ u\cdot n = u_{\mathscr{S}}\cdot n \quad \text{on } [0,T]\times\partial\mathscr{S}_0, \\ u \to 0 \quad \text{pour } |x|\to\infty, \end{cases} \tag{II.26}$$

$$u_{\mathscr{S}}(t,x) := \ell(t) + r(t)\wedge x \text{ dans } [0,T]\times\mathbb{R}^3, \tag{II.27}$$

$$\mathscr{M}\begin{bmatrix}\ell \\ r\end{bmatrix}' = \big[b(u,u,v_i)\big]_{i\in\{1,\dots,6\}}, \tag{II.28}$$

où $\mathscr{M}$ et v_i sont introduits dans la Section II.1.2.

L'équation de vorticité (II.25) s'obtient facilement à partir de (I.23) et (I.24) alors que (II.28) est obtenue à partir de (II.7) et de quelques intégrations par parties. Notons que (II.28) peut être vu comme l'analogue non visqueux de (II.14), et rappelons que $b(u,u,v_i)$ peut être calculé grâce à la formule (II.16).

La partie existence du Théorème 5 est démontrée en appliquant le théorème du point fixe de Schauder, en prenant pour inconnus (ω,ℓ,r) et en utilisant les équations (II.25)-(II.28). Plus précisément on va introduire un opérateur dont les points fixes seront des solutions locales en temps du système. Cet opérateur associe à un triplet (ω,ℓ,r) un autre triplet $(\tilde{\omega},\tilde{\ell},\tilde{r})$ de la façon suivante. Etant donné (ω,ℓ,r), on introduit u comme solution de (II.26) où on rappelle que $u_{\mathscr{S}}$ est donné par $u_{\mathscr{S}}(t,x) := \ell(t) + r(t)\wedge x$. Ensuite on considère $\tilde{\omega}$ la solution de l'équation de transport linéaire :

$$\partial_t \tilde{\omega} + \big[(u - u_{\mathscr{S}})\cdot\nabla\big]\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}\cdot\nabla)(u - u_{\mathscr{S}}), \tag{II.29}$$

avec $\tilde{\omega}|_{t=0} = \omega_0$ pour donnée initiale. Enfin on définit $(\tilde{\ell},\tilde{r})$ par

$$\mathscr{M}\begin{bmatrix}\tilde{\ell} \\ \\ \tilde{r}\end{bmatrix}(t) = \mathscr{M}\begin{bmatrix}\ell_0 \\ \\ r_0\end{bmatrix} + \int_0^t \big[b(u,u,v_i)\big]_{i\in\{1,\dots,6\}}. \tag{II.30}$$

En comparant (II.25) à (II.29) et (II.28) à (II.30) on voit que les points fixes de cet opérateur sont bien des solutions locales en temps du système "Euler+solide" .

Pour utiliser le théorème du point fixe de Schauder, on va choisir un ensemble convexe $\mathscr{C}$ de triplets (ω,ℓ,r) tel que l'opérateur précédent, appelons-le $\mathscr{V}$, est continu et que $\mathscr{V}(\mathscr{C})$ soit un sous-ensemble compact de $\mathscr{C}$.

Pour montrer cette dernière propriété on a en tête d'appliquer le théorème d'Aubin-Lions pour la partie ω et le théorème d'Ascoli pour la partie (ℓ,r). Incluons donc dans notre définition de $\mathscr{C}$ une borne sur la dérivée en temps. Plus précisément pour $T > 0$, on va introduire

$$\begin{aligned}\mathscr{C} := \Big\{(\omega,\ell,r) \in C^0([0,T];C^{0,\lambda}(\mathscr{F}_0;\mathbb{R}^3)) \times W^{1,1}([0,T];\mathbb{R}^6) \ / \\ &i.\ \ \|\omega\|_{L^\infty(0,T;C^{0,\lambda}(\mathscr{F}_0))} \leqslant 4\|\omega_0\|_{C^{0,\lambda}(\mathscr{F}_0)}, \\ &ii.\ \ \mathrm{Supp}\,(\omega(t)) \subset \overline{B}(0,\overline{\rho}+1), \\ &iii.\ \ \partial_t\omega \in L^1(0,T;C^{-1,\lambda}(\mathscr{F}_0))) \quad \text{et} \quad \|\partial_t\omega\|_{L^1(0,T;C^{-1,\lambda}(\mathscr{F}_0)))} \leqslant 1, \\ &iv.\ \ \|\ell-\ell_0\|_{W^{1,1}(0,T)} \leqslant 1,\ \|r-r_0\|_{W^{1,1}(0,T)} \leqslant 1\Big\},\end{aligned}$$

où l'on a noté

$$\overline{\rho} := \min\{\rho > 0 \ / \ \mathrm{Supp}\,(\omega_0) \subset \overline{B}(0,\rho)\},$$

et nous munissons $\mathscr{C}$ de la topologie héritée de $L^\infty(0,T;C^{0,\tilde{\lambda}}(\mathscr{F}_0)\times\mathbb{R}^6)$ pour un $\tilde{\lambda}\in(0,\lambda)$. Il s'ensuit par des arguments classiques (essentiellement des estimations elliptiques et de transport) que pour T assez petit $\mathscr{V}:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ vérifie les propriétés requises.

La partie unicité du Théorème 5 se démontre, elle, directement par un argument d'énergie.

Avec Gabriela Planas, nous démontrons dans [140] pour le système "Euler+solide" l'analogue du Théorème 4, c'est-à-dire une dégénérescence, dans la limite d'inertie infinie, vers le système d'Euler incompressible dans $\mathscr{F}_0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=0 \quad \text{pour} \quad x\in\mathscr{F}_0, \tag{II.31}$$

$$\operatorname{div} u=0 \quad \text{pour} \quad x\in\mathscr{F}_0, \tag{II.32}$$

$$u\cdot n=0 \quad \text{pour} \quad x\in\partial\mathscr{S}_0, \tag{II.33}$$

$$u|_{t=0}=u_0. \tag{II.34}$$

Théorème 6 ([140])**.** *Soit $\lambda\in(0,1)$ et $u_0\in\mathscr{H}$ tel que $\ell_0=r_0=0$, $u_0|_{\mathscr{F}_0}\in H^1\cap C^{1,\lambda}$ et $\operatorname{rot} u_0|_{\mathscr{F}_0}$ à support compact. Soit $\underline{m}>0$ et $\beta>0$.*

Alors il existe $T>0$ tel que pour tout $m\geqslant\underline{m}$ et pour toute matrice $\mathscr{J}_0$ symétrique 3×3 avec des valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$ satisfaisant $\lambda_i\geqslant\beta$, la solution correspondante u du système "Euler+solide" donnée par le Théorème 5 est définie jusqu'au temps T.

De plus dans la limite d'inertie infinie, $u|_{\mathscr{F}_0}$ converge dans $L^\infty(0,T;C^{1,\tilde{\lambda}}(\mathscr{F}_0))$, pour toute $\tilde{\lambda}\in(0,\lambda)$, vers l'unique solution de (II.31)-(II.34) *et ℓ et r convergent vers 0 dans $C^1([0,T];\mathbb{R}^3)$.*

La preuve du Théorème 6 revient essentiellement à montrer que que les estimations obtenues dans la preuve du Théorème 5 sont uniformes dans la limite d'inertie infinie.

II.2.2 Solutions fortes et faibles en dimension 2

Dans cette section nous traitons spécifiquement le cas de la dimension 2 pour lequel des résultats plus généraux sont possibles.

II.2.2.1 Solutions à la Yudovich

Pour commencer, la stratégie précédente, fondée sur la reformulation (II.25)-(II.28) apporte déjà un résultat pour un cadre un peu plus vaste que celui des solutions classiques d'énergie finie. Pour voir cela, commençons par regarder quelles modifications doivent être apportées dans le cas de la dimension 2.

En dimension 2 la vorticité du fluide n'est qu'une quantité scalaire définie par $\omega:=\operatorname{rot} u=\partial_1u_2-\partial_2u_1$ et elle satisfait l'équation de transport

$$\partial_t\omega+\Big[(u-\ell-rx^\perp)\cdot\nabla\Big]\,\omega=0 \text{ pour } x\in\mathscr{F}_0. \tag{II.35}$$

En particulier le terme d'étirement qui apparaît dans le membre de droite (II.25) est nul en dimension 2. Le gain est important puisqu'en particulier toutes les normes L^p sont formellement conservées au cours du temps par les solutions de l'équation (II.35), ainsi que la vorticité totale

$$\alpha:=\int_{\mathscr{F}_0}\omega\,dx.$$

Par ailleurs le Théorème de Kelvin assure que la circulation

$$\gamma:=\int_{\partial\mathscr{S}_0}u\cdot\tau\,ds$$

autour du solide est également conservée au cours du temps.

D'un autre côté en ce qui concerne (II.28), nous avons déjà signalé en (II.9) comment la définition de la forme trilinéaire b devait être adaptée. De plus les potentiels de Kirchhoff ne sont plus qu'au nombre de trois, notons les Φ_i pour $i=1,2,3$, et sont définis comme les solutions respectives des problèmes elliptiques constitués des équations (II.10), avec les conditions aux limites (II.11) et

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial n}=K_i \quad \text{pour } x\in\partial\mathscr{S}_0, \text{ où } K_i:=\begin{cases} n_i & \text{si } i=1,2,\\ x^\perp\cdot n & \text{si } i=3.\end{cases}$$

Le $i$ème gradient de potentiel de Kirchhoff étendu est alors définie par

$$v_i:=\nabla\Phi_i \text{ dans } \mathscr{F}_0 \text{ et } v_i:=\begin{cases} e_i & \text{si } i=1,2,\\ x^\perp\cdot n & \text{si } i=3,\end{cases} \quad \text{dans } \mathscr{S}_0.$$

Désormais $\mathscr{M}$ désigne la matrice 3×3

$$\mathscr{M} := \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2, \text{ avec } \mathscr{M}_1 := \begin{bmatrix} m\,\mathrm{Id}_2 & 0 \\ 0 & \mathscr{J}_0 \end{bmatrix}, \text{ et } \mathscr{M}_2 := \left[\int_{\mathscr{F}_0} \nabla\Phi_i \cdot \nabla\Phi_j \, dx\right]_{i,j\in\{1,2,3\}}.$$

Enfin en ce qui concerne le système (II.26) on pourrait penser qu'il n'y a guère de changement mais il y a tout de même une différence cruciale avec le cas de la dimension 3, c'est que le domaine occupé par le fluide n'est plus simplement connexe en dimension 2 ce qui rend le système (II.26) sous-déterminé.

Cette indétermination est levée en considérant la circulation du fluide autour du solide. En effet il existe un et un seul champ de vecteurs régulier H qui tend vers 0 à l'infini et tel que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} H = 0 \quad & \text{pour } x \in \mathscr{F}_0, \\ \operatorname{rot} H = 0 \quad & \text{pour } x \in \mathscr{F}_0, \\ H\cdot n = 0 \quad & \text{pour } x \in \partial\mathscr{S}_0, \\ \int_{\partial\mathscr{S}_0} H\cdot\tau\, ds = 1. & \end{aligned}$$

De plus le champ de vecteurs H admet une fonction courant harmonique $\Psi_H(x)$, c'est-à-dire une fonction scalaire telle que $H = \nabla^\perp\Psi_H$, qui s'annule sur le bord $\partial\mathscr{S}_0$, et se comporte comme $\ln|x|$ quand x tend vers l'infini. De plus,

$$H = \mathscr{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), \nabla H = \mathscr{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right),\ x^\perp\cdot H^1 = \frac{1}{2\pi} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ et } (H)^\perp - x^\perp\cdot\nabla H^1 = \mathscr{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right).$$

Nous renvoyons ici à [109], [94].

Voyons donc maintenant comment résoudre le système

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0, \quad \text{pour } x\in\mathscr{F}_0, \\ \operatorname{rot} u = \omega \quad \text{pour } x\in\mathscr{F}_0, \\ u\cdot n = \left(\ell + r x^\perp\right)\cdot n \quad \text{pour } x\in\partial\mathscr{S}_0, \\ u \longrightarrow 0 \quad \text{quand } x\to\infty, \\ \int_{\partial\mathscr{S}_0} u\cdot\tau\, ds = \gamma, \end{cases} \tag{II.36}$$

où les membres de droite sont supposés donnés.

Nous introduisons la fonction de Green $G(x,y)$ associée à $\mathscr{F}_0$ et à la condition de Dirichlet. Nous notons alors $K(x,y) = \nabla^\perp G(x,y)$ qui est souvent appelé le noyau de l'opérateur de Biot-Savart $K[\omega]$ et qui agit sur une fonction scalaire raisonnable ω par la formule

$$K[\omega](x) = \int_{\mathscr{F}_0} K(x,y)\omega(y)\, dy.$$

Alors pour une large classe de fonctions ω il existe une unique solution de (II.36) et celle-ci est donnée par

$$u = K[\omega] + (\gamma+\alpha)H + \ell_1\nabla\Phi_1 + \ell_2\nabla\Phi_2 + r\nabla\Phi_3, \tag{II.37}$$

où ℓ_1 et ℓ_2 sont les coordonnées du vecteur ℓ et

$$\beta := \gamma + \alpha.$$

Il est parfois intéressant d'utiliser une représentation un petit peu différente, en utilisant la fonction de Green hydrodynamique

$$G_H(x,y) := G(x,y) + \Psi_H(x) + \Psi_H(y),$$

et l'opérateur de Biot-Savart hydrodynamique $K_H[\cdot]$ de noyau $K_H = K + \alpha H$, et qui par conséquent satisfait

$$\begin{aligned} \operatorname{div} K_H[\omega] = 0, \quad & \text{pour } \ x\in\mathscr{F}_0, \\ \operatorname{rot} K_H[\omega] = \omega, \quad & \text{pour } \ x\in\mathscr{F}_0, \\ K_H[\omega]\cdot n = 0, \quad & \text{pour } \ x\in\partial\mathscr{S}_0, \\ \int_{\partial\mathscr{S}_0} K_H[\omega]\cdot\tau\, ds = 0. & \end{aligned}$$

Alors l'unique solution u de (II.36) s'écrit

$$u = K_H[\omega] + \gamma H + \ell_1\nabla\Phi_1 + \ell_2\nabla\Phi_2 + r\nabla\Phi_3. \tag{II.38}$$

Le noyau $K_H(x,y)$ de l'opérateur de Biot-Savart hydrodynamique se comporte à l'infini comme $H_{\mathbb{R}^2}(x-y)$.

Nous voyons donc qu'il est naturel de considérer des vitesses dans la famille des espaces $(E_{\beta,\mathscr{F}_0})_{\beta\in\mathbb{R}}$ avec

$$E_{\beta,\mathscr{F}_0} := \beta H + L^2_\sigma(\mathscr{F}_0),$$

où $L^2_\sigma(\mathscr{F}_0)$ désigne l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle dans $L^2(\mathscr{F}_0)$. En fait il n'est pas difficile de voir que $E_{\beta,\mathscr{F}_0}$ est l'espace des restrictions à $\mathscr{F}_0$ des fonctions de $E_{\beta,\mathbb{R}^2}$.

Dans la proposition suivante nous montrons que la partie L^2 de u, c'est-à-dire $\tilde{u} := u - \beta H$, reste finie en tout temps (si elle l'est initialement).

Proposition 3 ([77]). *Il existe $C > 0$ (qui ne dépend que de $\mathscr{S}_0$, m, J, et β) tel que pour toute solution régulière (ℓ, r, v) du système "Euler+solide" dans $[0,T]$:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Big[(u - \ell - rx^\perp)\cdot\nabla\Big] u + ru^\perp + \nabla p = 0 \qquad x \in \mathscr{F}_0, \tag{II.39}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \qquad x \in \mathscr{F}_0, \tag{II.40}$$

$$u\cdot n = \Big(\ell + rx^\perp\Big)\cdot n \qquad x \in \partial\mathscr{S}_0, \tag{II.41}$$

$$m\ell'(t) = \int_{\partial\mathscr{S}_0} pn\,ds - mr\ell^\perp, \tag{II.42}$$

$$\mathscr{J}_0 r'(t) = \int_{\partial\mathscr{S}_0} x^\perp\cdot pn\,ds, \tag{II.43}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad x \in \mathscr{F}_0, \tag{II.44}$$

$$\ell(0) = \ell_0,\ r(0) = r_0. \tag{II.45}$$

la quantité suivante :

$$E(t) := \frac{1}{2}\left(m\ell(t)^2 + \mathscr{J} r(t)^2 + \int_{\mathscr{F}_0} \tilde{u}(t,\cdot)^2 dx\right),$$

satisfait

$$E(t) \leqslant E(0)e^{Ct} + e^{Ct} - 1.$$

Esquissons la preuve.

Démonstration. Par un petit calcul on arrive à l'expression suivante pour la dérivée en temps de $E(t)$:

$$\begin{aligned} E'(t) \quad = \quad & -\int_{\mathscr{F}_0} \tilde{u}\cdot\Big(\big[(u-\ell-rx^\perp)\cdot\nabla\big]\tilde{u}\Big) - \beta\int_{\mathscr{F}_0}\tilde{u}\cdot\big([\tilde{u}\cdot\nabla]H\big) + \beta\int_{\mathscr{F}_0}\tilde{u}\cdot(\ell\cdot\nabla H) - \beta r\int_{\mathscr{F}_0}\tilde{u}\cdot(H^\perp - x^\perp\cdot\nabla H) \\ & -\beta^2\int_{\mathscr{F}_0}\tilde{u}\cdot\big([H\cdot\nabla]H\big) =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

En intégrant par parties on obtient $I_1 = 0$, puisque $u - \ell - rx^\perp$ est un champ à divergence nulle tangent au bord.

D'un autre côté, on obtient qu'il existe $C > 0$ (qui ne dépend que de $\mathscr{S}_0$) tel que

$$|I_2| + |I_3| + |I_4| \leqslant C|\beta|\left(\int_{\mathscr{F}_0}\tilde{u}^2\,dx + \ell^2 + r^2\right).$$

Reste à traiter I_5. Tout d'abord comme H est irrotationnel sur $\mathscr{F}_0$, on a

$$\int_{\mathscr{F}_0}\tilde{u}\cdot\big([H\cdot\nabla]H\big) = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{F}_0}(\tilde{u}\cdot\nabla)|H|^2,$$

ce qui donne par intégration par parties, et en utilisant les conditions à l'interface,

$$\int_{\mathscr{F}_0}\tilde{u}\cdot\big([H\cdot\nabla]H\big)dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathscr{S}_0}(\tilde{u}\cdot n)|H|^2 ds = \frac{1}{2}\ell\cdot\int_{\partial\mathscr{S}_0}|H|^2 n\,ds + \frac{1}{2}r\int_{\partial\mathscr{S}_0}|H|^2 x^\perp\cdot n\,ds.$$

Nous utilisons alors le Lemme de Blasius (cf. e.g. [85, Lemma 5]), où nous identifions $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$.

Lemme 1 ([73]). *Soit $\mathscr{C}$ une courbe de Jordan régulière, $f := (f_1, f_2)$ et $g := (g_1, g_2)$ deux champs de vecteur réguliers tangents sur $\mathscr{C}$. Alors*

$$\int_{\mathscr{C}}(f\cdot g)n\,ds = i\left(\int_{\mathscr{C}}(f_1 - if_2)(g_1 - ig_2)\,dz\right)^*, \tag{II.46}$$

$$\int_{\mathscr{C}}(f\cdot g)(x^\perp\cdot n)\,ds = \Re\left(\int_{\mathscr{C}} z(f_1 - if_2)(g_1 - ig_2)\,dz\right). \tag{II.47}$$

où $(\cdot)^*$ désigne la conjugaison complexe.

En utilisant un développement en série de Laurent de $H = (H_1, H_2)$ on a

$$H_1(z) - iH_2(z) = \frac{1}{2i\pi z} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

où on identifie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $x+iy \in \mathbb{C}$. Le théorème des résidus de Cauchy donne alors $I_5 = 0$.

Le lemme de Gronwall permet alors de conclure. □

On peut néanmoins se demander s'il existe une quantité de type énergie qui est conservée. Rappelons que dans le cas d'un fluide occupant tout le plan il est possible de renormaliser l'énergie cf. (I.15). Ici la quantité qui va jouer ce rôle est

$$2\mathfrak{H} = X^T \mathscr{M} X - \int_{\mathscr{F}_0 \times \mathscr{F}_0} G_H(x,y)\omega(t,x)\omega(t,y)\,dx\,dy - 2\gamma \int_{\mathscr{F}_0} \omega(t,x)\Psi_H(x)\,dx, \tag{II.48}$$

où $X^T := (\ell_1, \ell_2, r)$.

En fait on peut s'apercevoir en intégrant par parties que la quantité correspond au début du développement du carré de la décomposition $u = \tilde{u} + \beta H$, c'est à dire

$$2\mathfrak{H} = X^T \mathscr{M} X + \int_{\mathscr{F}_0} \tilde{u}^2 dx + 2\beta \int_{\mathscr{F}_0} \tilde{u} \cdot H dx.$$

Nous avons alors en écho à la Proposition 3 le résultat suivant.

Proposition 4 ([73]). *Pour toute solution régulière (ℓ, r, v) du système "Euler+solide", la quantité $\mathfrak{H}$ est conservée au cours du temps.*

La stratégie de la Section II.2.1 permet d'obtenir le résultat suivant, qui étend au cas d'un solide immergé les résultats de Yudovich [173]. La position initiale du solide est, encore, évidemment supposée donnée.

Théorème 7 ([73]). *Soit $T > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $u_0 \in E_{\beta,\mathscr{F}_0}$ et $(\ell_0, r_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, tel que :*

$$u_0 \cdot n = (\ell_0 + r_0 x^\perp) \cdot n \text{ sur } \partial\mathscr{S}_0, \tag{II.49}$$

$$\omega_0 := \operatorname{rot} u_0 \in L^\infty_c(\overline{\mathscr{F}_0}). \tag{II.50}$$

Alors il existe une unique solution $(\ell, r, u) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) \times L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, E_{\beta,\mathscr{F}_0} \cap \mathscr{LL}(\mathscr{F}_0))$

De plus $\partial_t u, \nabla p \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, L^q(\mathscr{F}_0))$ pour tout $q \in (1, +\infty)$, pour tout $t > 0$, $\omega(t) := \operatorname{rot}(u(t)) \in L^\infty_c(\overline{\mathscr{F}_0})$, et les quantités $\|\omega(t,\cdot)\|_{L^q(\mathscr{F}_0)}$ (pour tout $q \in [1,\infty]$), $\mathfrak{H}$, α et γ sont conservées au cours du temps.

Enfin, si on suppose de plus que $u_0 \in C^{\lambda+1,\nu}(\mathscr{F}_0; \mathbb{R}^2)$ avec $\lambda \in \mathbb{N}$ et $\nu \in (0,1)$, alors u est $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; C^{\lambda+1,\nu}(\mathscr{F}_0))$.

Ci-dessus on a utilisé l'indice "c" dans la notation L^∞_c pour désigner le sous-espace des fonctions de L^∞ à support compact. Nous utilisons aussi dans la suite cette convention pour d'autres espaces.

La notation $\mathscr{LL}(\mathscr{F}_0)$ ci-dessus désigne l'espace des fonctions log-Lipschitz sur $\mathscr{F}_0$, c'est-à-dire des fonctions telles que

$$\|f\|_{\mathscr{LL}(\mathscr{F}_0)} := \|f\|_{L^\infty(\mathscr{F}_0)} + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|(x-y)(1 + \ln^- |x-y|)|} < +\infty. \tag{II.51}$$

Ce résultat est montré dans l'appendice de [73] et généralise l'article [137] d'Ortega, Rosier and Takahashi qui ne traitait que le cas des solutions classiques d'énergie finie. Il résulte donc comme précédemment de l'application du théorème de Schauder mais cette fois à l'ensemble

$$\begin{aligned}
\mathscr{C} := \Big\{ (\omega, \ell, r) \in L^\infty(0,T; L^\infty_c(\mathscr{F}_0)) \times W^{1,1}([0,T]; \mathbb{R}^3) \ / \\
& i. \ \ \|\omega\|_{L^\infty(0,T;L^1(\mathscr{F}_0))} \leqslant \|\omega_0\|_{L^1(\mathscr{F}_0)}, \ \|\omega\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\mathscr{F}_0))} \leqslant \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathscr{F}_0)}, \\
& \qquad \text{et } \int_{\mathscr{F}_0} w(t,x)\,dx = \int_{\mathscr{F}_0} w_0(x)\,dx, \ \forall t \in [0,T], \\
& ii. \ \ \operatorname{Supp}(\omega(t)) \subset \overline{B}(0, \overline{\rho} + 1), \\
& iii. \ \ \partial_t \omega \in L^1(0,T; W^{-1,3}(\mathscr{F}_0)) \ \text{ et } \ \|\partial_t \omega\|_{L^1(0,T;W^{-1,3}(\mathscr{F}_0))} \leqslant 1, \\
& iv. \ \ \|\ell - \ell_0\|_{W^{1,1}(0,T)} \leqslant 1, \ \|r - r_0\|_{W^{1,1}(0,T)} \leqslant 1 \Big\},
\end{aligned}$$

muni de la topologie de $L^\infty(0,T; L^p(\mathscr{F}_0)) \times C^0([0,T]; \mathbb{R}^3)$ pour un $p \in (2, +\infty)$.

II.2.2.2 Solutions à vorticité L^p, $p > 1$

Voyons maintenant comment définir des solutions avec encore moins de régularité. Nous utilisons encore une fois une formulation faible globale. Comme nous ne voulons toujours pas nous restreindre aux solutions d'énergie finie, nous introduisons l'espace

$$\mathscr{H}_{loc} := \left\{ u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2);\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ et } \exists!(\ell_u, r_u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} / \ \forall x \in \mathscr{S}_0,\ u(x) = \ell_u + r_u x^\perp \right\}.$$

Nous introduisons aussi l'espace $\tilde{\mathscr{H}}$ des fonctions v dans $\mathscr{H}$ dont la restriction $v|_{\overline{\mathscr{F}_0}}$ à la fermeture du domaine fluide appartient à l'espace $C^1_c(\overline{\mathscr{F}_0})$, et pour $T > 0$, $\tilde{\mathscr{H}}_T$ l'espace des fonctions v dans $C^1([0,T];\mathscr{H})$ dont la restriction $v|_{[0,T]\times\overline{\mathscr{F}_0}}$ à la fermeture du domaine fluide appartient à l'espace $C^1_c([0,T]\times\overline{\mathscr{F}_0})$.

Quand $(u,v) \in \mathscr{H} \times \tilde{\mathscr{H}}$, nous désignons par

$$(v,u)_{\mathscr{H}} := \int_{\mathbb{R}^2} (\rho \mathbf{1}_{\mathscr{S}_0} + \mathbf{1}_{\mathscr{F}_0})\, u \cdot v = m\,\ell_u \cdot \ell_v + \mathscr{J}_0 r_u r_v + \int_{\mathscr{F}_0} u \cdot v,$$

où la notation $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A et ρ désigne la densité dans le solide.

Définition 2. *Soit $u_0 \in \mathscr{H}$ et $T > 0$. Nous disons que $u \in C([0,T];\mathscr{H} - w)$ est une solution faible du système "Euler+solide" dans $[0,T]$ associée à la donnée initiale u_0 si pour toute fonction test $v \in \tilde{\mathscr{H}}_T$,*

$$(v(T,\cdot), u(T,\cdot))_{\mathscr{H}} - (v(0,\cdot), u_0)_{\mathscr{H}} = \int_0^T \left[(\partial_t v, u)_{\mathscr{H}} + b(u,u,v) \right] dt.$$

On dit aussi dans ce cas que (ℓ, r, u) est une solution faible du système "Euler+solide" dans $[0,T]$ associée à la donnée initiale u_0.

Constatons qu'une solution classique est une solution faible.

Nous avons alors le résultat suivant qui étend au cas d'un solide immergé les résultats de Di Perna et Majda [48] et de Lions [119].

Théorème 8 ([75, 73, 77])**.** *Soit $\beta \in \mathbb{R}$, $p \in (1,+\infty)$ et $T > 0$. Pour tout $u_0 \in E_{\beta,\mathscr{F}_0}$, $(\ell_0, r_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, satisfaisant* (II.49) *et $\omega_0 := \operatorname{rot} u_0 \in L^p_c(\mathscr{F}_0)$, il existe une solution faible telle que $\omega \in L^\infty(0,T;(L^1 \cap L^p)(\mathscr{F}_0))$ et $(\ell, r) \in C^1(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$.*

Si de plus $p > 2$ alors on peut construire une telle solution de sorte que u soit dans $C^0(\mathbb{R}^+, W^{1,p}(\mathscr{F}_0))$ avec $\partial_t u, \nabla p \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, L^q(\mathscr{F}_0))$ pour tout $q \in (1,p]$. De plus pour tout $t > 0$, $w(t) := \operatorname{rot}(u(t)) \in L^p_c(\overline{\mathscr{F}_0})$, et les quantités $\|w(t,\cdot)\|_{L^q(\mathscr{F}_0)}$ (pour tout $q \in [1,p]$), $\mathfrak{H}$, α et γ sont conservés au cours du temps.

Pour démontrer ce résultat nous utilisons une stratégie très générale qui consiste à régulariser la donnée initiale de sorte que l'on ait une suite de données initiales régulières auxquelles nous pouvons associer des solutions classiques, puis à exploiter les propriétés de compacité qu'entraînent des estimations a priori uniformes par rapport au paramètre de régularisation, pour pouvoir passer à la limite dans l'équation, ou du moins dans sa formulation faible. Le point clé est que, grâce à l'effet de masse ajoutée exprimé par la reformulation (II.28), le contrôle de la partie L^2 de l'énergie suffit à contrôler l'accélération du solide.

Signalons aussi le résultat [168] de Wang et Xin qui traite le cas où la vorticité initiale est dans $L^1 \cap L^p$ avec $p \in (\frac{4}{3}, +\infty]$ (mais pas nécessairement à support compact) et la vitesse initiale est d'énergie finie.

Enfin la question de l'unicité de ces solutions faibles est, comme dans le cas d'un fluide seul, encore ouverte.

II.2.2.3 Solutions à la Delort

Supposons cette fois que le solide $\mathscr{S}_0$ occupe initialement le disque unité fermé et est de densité uniforme $\rho > 0$. En particulier la vitesse angulaire du solide reste constante au cours du temps (parce que le membre de droite de (II.43) s'annule) et n'apparaît pas dans les autres équations. Signalons que l'on pourrait aussi considérer un solide qui occupe un domaine fermé régulier simplement connexe symétrique par rapport à l'axe horizontal, et qui n'est pas autorisé à tourner (par exemple parce que un opérateur extérieur applique un couple de force qui empêche toute rotation, ou parce que l'inertie angulaire est infinie).

Nous cherchons ici à étendre un résultat de Delort dans [43] qui a prouvé l'existence globale de solutions faibles aux équations d'Euler incompressible quand la vorticité initiale est une mesure Radon borné à support compact avec un signe distingué et est dans H^{-1}.

Comme la régularité de la pression est très faible dans le résultat de Delort, on pourrait être pessimiste quant aux chances d'étendre son résultat au cas d'un solide immergé, puisque la dynamique de ce dernier est précisément déterminée par les forces qu'exercent la pression sur sa frontière.

Là encore nous contournons cette difficulté grâce à la formulation faible globale, où la pression disparaît.

Le désavantage de cette formulation est qu'elle utilise des fonctions tests qui ne s'annulent pas à l'interface fluide-solide, ce qui est inusuel dans l'approche de Delort, où la formulation faible utilise des fonctions tests à support compact dans le domaine ouvert occupé par le fluide et où la condition aux limites est prescrite au sens de la trace.

Cependant dans l'article [123], les auteurs traitent du cas d'une vorticité initiale qui est une mesure de Radon H^{-1} à support compact avec un signe distingué dans le demi-plan supérieur ouvert, à laquelle nous surperposons sa réflection impaire dans le demi-plan inférieur. La vitesse initiale correspondante possède alors une symétrie miroir par rapport à l'axe horizontal. Pour montrer l'existence d'une solution à ce problème, ils sont conduits à introduire une autre notion de solution faible, dite couplée au bord, qui repose sur une formulation faible en vorticité avec des fonctions tests qui s'annulent sur le bord, mais sans que leurs dérivées s'annulent nécessairement. Ils ont ensuite étendu dans [124] leur analyse au cas d'un fluide occupant l'extérieur d'un domaine compact symétrique lui aussi par rapport à l'axe des abscisses.

Dans cette section nous allons adapter leur approche au cas d'un solide en mouvement, en particulier nous supposons que les vitesse initiales ℓ_0 et u_0 ont la propriété de symétrie miroir par rapport à l'axe horizontal. Ici la propriété de symétrie miroir signifie que pour tout $x=(x_1,x_2)\in\mathscr{F}_{0,\pm}$, $(u_1,u_2)(\tilde{x})=(u_1,-u_2)(x)$ avec $\tilde{x}:=(x_1,-x_2)\in\mathscr{F}_{0,\mp}$.

Pour la vitesse solide $\ell_0\in\mathbb{R}^2$ cela signifie qu'elle est de la forme $\ell_0=(\ell_{0,1},0)$. Intéressons nous maintenant à la vitesse fluide. Soit

$$\mathscr{F}_{0,\pm}:=\{x\in\mathscr{F}_0/\ \pm x_2>0\} \text{ et } \Gamma_\pm:=\partial\mathscr{F}_{0,\pm}.$$

Cette hypothèse a deux conséquences importantes. En premier lieu la vorticité ω est impaire par rapport à la variable x_2 et par conséquent son intégrale sur le domaine fluide $\mathscr{F}_0$ s'annule. Aussi la circulation de la vitesse initiale autour du solide s'annule. Dans un tel cas il est naturel de considérer des solutions d'énergies finies. Dans ce contexte on a des formules explicites pour de nombreuses fonctions de la section précédente : les potentiels de Kirchhoff sont

$$(\Phi_1^1,\Phi_2^1)=2\pi(H^1)^\perp,\quad \Phi_3=0,$$

le champ harmonique est donné par

$$H(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{x^\perp}{|x|^2}=H_{\mathbb{R}^2}(x),$$

la fonction de Green-Dirichlet $G(x,y)$ est

$$G(x,y):=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x-y|}{|x-y^*|\,|y|},\ \text{où } y^*:=\frac{y}{|y|^2},$$

le noyau de Biot-Savart est

$$K(x,y):=H(x-y)-H(x-y^*),\tag{II.52}$$

et la vitesse est donnée par la décomposition $u=K[\omega]+\ell_1\nabla\Phi_1=K_{\mathscr{H}}[\omega]+\ell_1\nabla\Phi_1$. L'énergie cinétique totale du système s'écrit alors $m\ell^2+\int_{\mathscr{F}_0}u^2dx<+\infty$.

Précisons ce que l'on entend par l'action de l'opérateur de Biot-Savart sur une mesure.

Pour un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^2$ nous notons $\mathscr{M}(X)$ l'ensemble des mesures de Radon bornées sur X, $\mathscr{M}_+(X)$ l'ensemble des mesures positives sur X, $\mathscr{M}_c(X)$ l'ensemble des mesures à support compact dans X.

A $\omega\in\mathscr{M}(\overline{\mathscr{F}_0})$ nous associons $K[\omega]\in C_c^\infty(\overline{\mathscr{F}_0})'$ par la formule

$$\forall f\in C_c^\infty(\overline{\mathscr{F}_0}),\quad <K[\omega],f>:=-\int_{\overline{\mathscr{F}_0}}\int_{\overline{\mathscr{F}_0}}G(x,y)\,\mathrm{rot}\,f(x)\,dx\,d\omega(y).\tag{II.53}$$

Nous disons pour faire court d'une mesure ω qu'elle est SM si elle est à symétrie miroir, c'est-à-dire si pour tout $\phi\in C_c(\mathscr{F}_0;\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathscr{F}_0}\phi(x)d\omega(x)=-\int_{\mathscr{F}_0}\phi(\tilde{x})d\omega(x).$$

Nous pouvons définir maintenant proprement les données de Cauchy que nous allons considérer dans cette section.

Soit $\ell_{0,1}\in\mathbb{R}$ et $\ell_0=(\ell_{0,1},0)$. Soit $\omega_{0,+}\in\mathscr{M}_{c,+}(\mathscr{F}_{0,+})$ et $\omega_{0,-}$ la mesure correspondante dans $\mathscr{F}_{0,-}$ obtenue par réflexion impaire. Introduisons alors $\omega_0:=\omega_{0,+}+\omega_{0,-}$ qui est dans $\mathscr{M}(\mathscr{F}_0)$ et qui est SM. Nous lui associons la vitesse correspondante $u_0:=K[\omega_0]+\ell_{0,1}\nabla\Phi_1$.

Ecrivons maintenant une formulation faible globale adéquate pour ce problème. Nous prenons

$$\mathscr{H}=\left\{u\in L^2(\mathbb{R}^2);\quad \mathrm{div}\,u=0\quad \text{in } \mathbb{R}^2,\ \nabla u=0\quad \text{in } \mathscr{S}_0\right\},$$

qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u,v)_\rho:=\int_{\mathbb{R}^2}(\rho\mathbf{1}_{\mathscr{S}_0}+\mathbf{1}_{\mathscr{F}_0})u\cdot v=m\ell_u\cdot\ell_v+\int_{\mathscr{F}_0}u\cdot v\,dx,$$

où $\ell_u\in\mathbb{R}^2$ est la restriction de u à $\mathscr{S}_0$.

Désignons par $\|\cdot\|_\rho$ la norme associée à $(\cdot,\cdot)_\rho$. Introduisons aussi $\mathscr{H}_T$ l'ensemble des fonctions u dans $C^1([0,T];\mathscr{H})$ dont la restriction $u|_{[0,T]\times\overline{\mathscr{F}_0}}$ à la fermeture du domaine fluide est dans $C_c^1([0,T]\times\overline{\mathscr{F}_0})$.

Définition 3. *Soit $u_0 \in \mathscr{H}$ et $T > 0$. On dit que $u \in C([0,T];\mathscr{H} - w)$ est une solution faible du système "Euler+solide" dans $[0,T]$ si pour toute fonction test $v \in \mathscr{H}_T$,*

$$(v(T,\cdot),u(T,\cdot))_\rho - (v(0,\cdot),u_0)_\rho = \int_0^T (\frac{\partial v}{\partial t},u)_\rho \, dt + \int_0^T \int_{\mathscr{F}_0} u \cdot [((u-\ell_u)\cdot\nabla)\,v] \, dx dt.$$

Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 9 ([154]). *Soit $u_0 \in \mathscr{H}$ comme décrit précédemment. Soit $T > 0$. Alors il existe une solution faible du système "Euler+solide" associée à la donnée initiale $u_0 \in \mathscr{H}$ dans $[0,T]$. De plus cette solution préserve la symétrie mirroir et satisfait l'inégalité d'énergie : pour tout $t \in [0,T]$, $\|u(t,\cdot)\|_\rho \leqslant \|u_0\|_\rho$. De plus l'accélération ℓ' du solide est bornée sur $[0,T]$.*

En fait de manière légèrement plus précise la preuve donne une borne de $\|\ell'\|_{L^\infty(0,T)}$ qui ne dépend que de la masse m et de l'énergie initiale $\|\overline{u}_0\|_\rho$, mais pas de T. Cette borne est obtenue en exploitant l'effet de masse ajoutée. Le point clé est alors de passer à la limite dans la contribution, non-linéaire, de la convection à la formulation faible. Lorsqu'on considère une fonction test tangente au bord il est possible de suivre une stratégie "à la Delort" c'est-à-dire de réexprimer cette contribution en terme de la vorticité, de symétriser et d'utiliser un argument de non-concentration de la vorticité jusqu'au bord du solide. Nous complétons alors la preuve en montrant que pour une fonction test non-tangente au bord, il existe un relèvement de sa valeur au bord du solide par un champ de vecteurs solénoïdal régulier à support compact et variant arbitrairement lentement. Celui-ci conduit à une erreur arbitrairement petite dans la formulation faible.

Notons aussi que la solution faible du système "Euler+solide" donnée par le théorème ci-dessus satisfait une propriété d'unicité fort-faible, qui permet notamment d'appliquer le Théorème 1 de [143], et d'en déduire que l'unicité est vraie au moins pour un ensemble générique de données initiales dans $\mathscr{H}$ au sens de sa topologie faible.

Quand la masse m du solide tend vers l'infini on peut s'attendre à ce que le solide ne puisse plus bouger de sorte que le système "Euler+solide" dégénère en le système d'Euler dans $\mathscr{F}_0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [u\cdot\nabla]\,u + \nabla q = 0 \qquad x \in \mathscr{F}_0, \tag{II.54}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \qquad x \in \mathscr{F}_0, \tag{II.55}$$

$$u \cdot n = 0 \qquad x \in \partial\mathscr{S}_0, \tag{II.56}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad x \in \mathscr{F}_0. \tag{II.57}$$

Le résultat suivant justifie cette intuition pour les solutions faibles obtenues dans le Théorème 9. Dans ce cas nous obtenons à la limite des solutions de (II.54)–(II.57) au sens de la définition suivante.

Définition 4. *Soit $u_0 \in L^2_\sigma(\mathscr{F}_0)$ et $T > 0$. On dit que $u \in C([0,T];L^2_\sigma(\mathscr{F}_0) - w)$ est une solution faible de* (II.54)–(II.57) *dans $[0,T]$ si pour toute fonction test $v \in C^1_{c,\sigma}([0,T]\times\overline{\mathscr{F}}_0;\mathbb{R}^2)$,*

$$\int_{\mathscr{F}_0} v(T,\cdot)\cdot u(T,\cdot)\,dx - \int_{\mathscr{F}_0} v(0,\cdot)\cdot u_0\,dx = \int_0^T\int_{\mathscr{F}_0} \frac{\partial v}{\partial t}\cdot u\,dx dt + \int_0^T\int_{\mathscr{F}_0} u\cdot[(u\cdot\nabla)\,v]\,dx dt.$$

Nous notons ici $C^1_{c,\sigma}(\overline{\mathscr{F}_0})$ (respectivement $C^1_{c,\sigma}([0,T]\times\overline{\mathscr{F}_0})$) le sous-espace des champs de vecteurs dans $C^1_c(\overline{\mathscr{F}_0},\mathbb{R}^2)$ (resp. $C^1_c([0,T]\times\overline{\mathscr{F}_0},\mathbb{R}^2)$) qui sont à divergence nulle et tangents à $\partial\mathscr{F}_0$ (resp. tangents à $\partial\mathscr{F}_0$ pour tout $t \in [0,T]$) et $L^2_\sigma(\mathscr{F}_0)$ désigne la fermeture de $C^1_{c,\sigma}(\overline{\mathscr{F}_0})$ pour la topologie L^2.

Observons que dans la Définition 4 nous ne demandons pas aux fonctions tests de s'annuler sur un voisinage du bord, elles ne sont que tangentes, ce qui rend la définition plus contraignante que la définition utilisée dans les papiers de Delort ou de Schochet [43, 147] où la condition au bord (II.56) n'est prescrite qu'au sens de la trace. C'est l'équivalent pour la formulation vitesse de la notion de "solution couplée au bord" introduite en formulation vorticité dans [123] et [124].

Théorème 10 ([154]). *Soit $u_0 \in \mathscr{H}$ comme dans Théorème 9. Supposons de plus que $\ell_0 = 0$. Soit $T > 0$. Pour toute masse $m > 0$, on considère une solution faible u^m comme donnée par le Théorème 9. Alors il existe une suite $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $+\infty$ tel que $(u^{m_k})_k$ converge dans $C([0,T];\mathscr{H} - w)$ vers u avec $\ell = 0$ et u est une solution faible de* (II.54)–(II.57) *dans $[0,T]$. De plus $(\ell^{m_k})_k$ converge vers 0 dans $W^{1,\infty}([0,T])$.*

Ce résultat étend le Théorème 6 à des solutions plus irrégulières mais à une géométrie plus particulière.

Chapitre III

Viscosité évanescente

Ce chapitre est consacré à la convergence du système “Navier-Stokes+solide” vers le système “Euler+solide” en domaine non borné.

Nous nous intéressons dans un premier temps au cas où une condition de type Dirichlet est considérée à l'interface entre le fluide et le solide puis au cas de la condition de Navier.

Les résultats qui suivent sont en partie tirés de collaborations avec Dragos Iftimie [96], avec Gabriela Planas [140] et aussi de l'article [156].

III.1 Un théorème conditionnel dans le cas de la condition d'adhérence

Dans [156] nous montrons le résultat suivant

Théorème 11 ([156]). *Soit $c > 0$, u_0 et $T > 0$ comme dans le Théorème 5. Supposons que $(u_0^\nu)_{\nu>0}$ soit une suite dans $\mathscr{H}$ convergente vers u_0 quand $\nu \to 0$.*

Notons u^ν la solution du système “Navier-Stokes+solide” associée à u_0 donnée par le Théorème 2 et par u la solution du système “Euler+solide” donnée par le Théorème 5.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes, quand $\nu \to 0$:

$$u^\nu \to u \text{ dans } C([0,T];\mathscr{H}), \tag{III.1}$$

$$\nu \int_{(0,T)\times\Gamma_{c\nu}} |D(u^\nu)|^2\, dx\, dt \to 0, \tag{III.2}$$

$$\nu \int_{(0,T)\times\Gamma_{c\nu}} |\operatorname{rot} u^\nu|^2\, dx\, dt \to 0, \tag{III.3}$$

$$\nu \int_{(0,T)\times\Gamma_{c\nu}} |\nabla u^\nu|^2\, dx\, dt \to 0, \tag{III.4}$$

$$u^\nu(t,\cdot) \rightharpoonup u(t,\cdot) \text{ dans } \mathscr{H} - w, \text{ pour tout } t \in [0,T], \tag{III.5}$$

où $\Gamma_{c\nu} := \{x \in \mathscr{F}_0 /\ d(x) < c\nu\}$ avec $d(x) := dist(x, \partial\mathscr{S}_0)$.

Il y a bien sûr un résultat similaire en dimension 2. Cependant l'hypothèse que l'énergie est finie est un peu moins naturelle en dimension 2.

Donnons quelques éléments sur la preuve du Théorème 11. La partie difficile consiste à montrer qu'une hypothèse de dissipation, que ce soit (III.2), (III.3) ou (III.4), implique (III.1). La stratégie, qui suit celle adoptée par Kato dans le cas d'un bord fixe, est la suivante : nous partons avec l'idée d'utiliser la solution d'Euler comme fonction test dans la formulation variationnelle du problème visqueux. Comme nous considérons une solution d'Euler régulière, cela fait penser à l'unicité fort-faible. Cependant la solution donnée par les équations d'Euler ne vérifie pas la condition de Dirichlet sur le bord du solide, ce n'est donc pas une fonction test admissible. Pour corriger ceci nous introduisons une couche limite, c'est-à-dire une vitesse solénoïdale localisée au voisinage de la frontière du solide, pour assurer que la somme de la solution du système sans viscosité et de cette couche limite satisfait la condition aux limites. Nous avons ici un peu de liberté quant à la construction de cette couche limite mais la question centrale ici est de savoir quelle épaisseur nous avons intêret à choisir. Le juste équilibre ménage la chèvre et le chou, avec (chèvre, chou) = (convection, dissipation). Plus précisément il est d'autant plus aisé de contrôler le terme convectif que l'épaisseur est petite, mais c'est le contraire pour le terme dissipatif. Il ressort de l'analyse que l'épaisseur doit être de l'ordre de la viscosité, et on comprend alors pourquoi apparaissent les ensembles $\Gamma_{c\nu}$ dans l'énoncé ci-dessus.

Exposons ici les détails de la construction de la couche limite. Nous utilisons les notations de Landau $o(1)$ et $O(1)$ dans la limite $\nu \to 0^+$.

Proposition 5 ([156]). *Sous les hypothèses du Théorème 11 il existe $v_F \in C([0,T];\mathscr{H})$, supporté dans $\Gamma_{c\nu}$, tel que*

$$\begin{aligned} v_F &= O(1) \text{ dans } C([0,T]\times\mathbb{R}^3),\\ v_F &= O(\nu^{\frac{1}{2}}) \text{ dans } C([0,T];\mathscr{H}),\\ \partial_t v_F &= O(\nu^{\frac{1}{2}}) \text{ dans } C([0,T];\mathscr{H})\\ \|\nabla v_F\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Gamma_{c\nu}))} &= O(\nu^{-\frac{1}{2}}),\\ d(x)v_F &= O(\nu) \text{ dans } L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3),\\ u - v_F &\in H^1([0,T];\mathscr{H})\cap L^\infty([0,T];\mathscr{V}_D). \end{aligned}$$

Démonstration. Afin d'assurer le caractère solénoïdal du champ de vecteurs construit, nous utilisons une idée qui prolonge celle évoquée après la Proposition 1, à savoir réaliser un cut-off au niveau de la fonction courant. Comme nous traitons ici du cas de la dimension 3, nous substituons à la fonction courant un 2-tenseur antisymétrique. En effet d'après [101], Lemma A1, il existe un 2-tenseur antisymétrique $a_F(t,x)$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^3$ tel que,

$$\operatorname{div} a_F = u - u_{\mathscr{S}} \text{ et } a_F = 0 \text{ sur } \partial\mathscr{S}_0. \tag{III.6}$$

Rappelons que pour un 2-tenseur antisymétrique a, $\operatorname{div} a$ désigne le champ de vecteurs $\operatorname{div} a := (\sum_k \partial_k a_{jk})_k$. Ensuite nous introduisons une fonction régulière $\xi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tel que $\xi(0) = 1$ et $\xi(r) = 0$ pour $r \geqslant 1$. Nous définissons

$$z(x) := \xi(\frac{d(x)}{c\nu}) \text{ et } v_F \text{ par } v_F := \operatorname{div}(z a_F) \text{ dans } \mathscr{F}_0 \text{ et } v_F := 0 \text{ dans } \mathscr{S}_0.$$

Pour vérifier que v_F a les propriétés désirées, introduisons

$$a_F^\flat(t,x) := \frac{1}{d(x)} a_F(t,x),\ \tilde{\xi}(r) := r\xi'(r) \text{ et } \tilde{z}(x) := \tilde{\xi}(\frac{d(x)}{c\nu}).$$

Alors, dans $\mathscr{F}_0$,

$$v_F = z \operatorname{div} a_F + \tilde{z} a_F^\flat \nabla d. \tag{III.7}$$

Tout d'abord z et $\tilde{z}$ sont supportés dans $\Gamma_{c\nu}$ et donc v_F aussi. De plus, en utilisant (III.6) et que pour $x \in \partial\mathscr{S}_0$, $z(x) = 1$ et $\tilde{z}(x) = 0$, on a

$$v_F|_{\mathscr{F}_0} = u - u_{\mathscr{S}} \text{ sur } \partial\mathscr{S}_0. \tag{III.8}$$

Observons que pour tout 2-tenseur antisymétrique régulier a le champ de vecteurs $\operatorname{div} a$ est à divergence nulle puisque $\operatorname{div}\operatorname{div} a = \sum_j \sum_k \partial_j a_{jk} = 0$. Ainsi nous obtenons $v_F \in C([0,T];\mathscr{H})$.

De plus $u - v_F$ est H^1 dans $\mathscr{F}_0$ et dans $\mathscr{S}_0$. En utilisant encore (III.8) nous obtenons que $u - v_F$ est continue à travers $\partial\mathscr{S}_0$. Ainsi $u - v_F \in L^\infty([0,T];\mathscr{V}_D)$.

Les autres estimations suivent facilement de (III.7) si l'on observe que v_F est une modulation lente (par rapport à ν) de z et $\tilde{z}$ par des fonctions régulières. □

III.2 Cas des conditions de Navier

Avec Gabriela Planas nous obtenons dans [140] le résultat suivant :

Théorème 12 ([140]). *On a :*

1. *Avec les notations du Théorème 2 et du Théorème 5, et supposant que u_0^ν converge vers u_0 dans $\mathscr{H}$ quand ν tend vers 0 et que α soit une fonction de ν qui satisfait $\alpha\nu$ converge vers 0 quand ν tend vers 0, alors u^ν converge vers u dans $L^\infty(0,T;\mathscr{H})$, $\sqrt{\nu}\|u^\nu|_{\mathscr{F}_0}\|_{L^2(0,T;H^1(\mathscr{F}_0))}$ et $\sqrt{\alpha\nu}\|u^\nu - u^\nu_{\mathscr{S}}\|_{L^2((0,T)\times\partial\mathscr{S}_0)}$ convergent vers 0, où $T > 0$ est le temps de vie de la solution régulière u du système non-visqueux.*
2. *De plus (ℓ^ν, r^ν) converge vers (ℓ, r) dans $H^1(0,T;\mathbb{R}^6)$.*
3. *Supposons que $u_0^\nu = u_0$ et que $\alpha > 0$ ne dépende pas de ν, alors il existe $C > 0$ (qui dépend de T) tel que*

$$\|u^\nu - u\|_{L^\infty(0,T;\mathscr{H})} + \sqrt{\nu}\|u^\nu - u\|_{L^2(0,T;H^1(\mathscr{F}_0))} \leqslant C(1+\alpha)\nu^{3/4}. \tag{III.9}$$

Commençons par quelques remarques.

Tout d'abord mentionnons les références [34, 129, 9] qui montrent qu'il est pertinent de considérer un coefficient de friction qui dépend de la viscosité, en dérivant cette condition de la condition d'accommodation au niveau des équations de Boltzmann.

La première partie du Théorème étend les résultats antérieurs [95, 139, 9, 169] où le cas d'une frontière fixe était envisagé.

La seconde partie du Théorème 12 montre que la convergence de la dynamique du solide est même meilleure que celle donnée par l'espace d'énergie dans la première partie, puisque cette dernière ne donne qu'une convergence de (ℓ^ν, r^ν) vers (ℓ, r) que dans $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^6)$. Ce résultat s'appuie sur la propriété de régularité exprimée par la Proposition 2 et donc sur le phénomène de masse ajoutée.

Si nous nous concentrons sur la dépendance en la viscosité, l'estimée (III.9) dit que u^ν converge fortement vers u dans $L^\infty(0,T;L^2(\mathscr{F}_0))$ avec un taux de $O(\nu^{3/4})$ et dans $L^2(0,T;H^1(\mathscr{F}_0))$ avec un taux de $O(\nu^{1/4})$. Nous retrouvons ainsi le taux optimal de convergence, par rapport à ν, trouvé dans [96] dans le cas où les conditions de Navier sont prescrites sur un bord fixe.

Donnons quelques éléments de preuve.

Introduisons les différences $w^\nu := u^\nu - u$, $w_0^\nu := u_0^\nu - u_0$ pour la donnée initiale et $w_{\mathscr{S}}^\nu := u_{\mathscr{S}}^\nu - u_{\mathscr{S}}$.

Nous développons $\|w^\nu(t,\cdot)\|_{\mathscr{H}}^2$ en

$$\|w^\nu(t,\cdot)\|_{\mathscr{H}}^2 = \|u^\nu(t,\cdot)\|_{\mathscr{H}}^2 + \|u(t,\cdot)\|_{\mathscr{H}}^2 + 2(u^\nu, u)_{\mathscr{H}}(t).$$

Pour majorer les deux premiers termes nous utilisons alors l'inégalité d'énergie (II.6) pour la solution de Navier-Stokes et l'égalité d'énergie (II.24) pour la solution d'Euler. Il reste ensuite le double-produit, pour lequel nous utilisons la formulation faible de Navier-Stokes avec la fonction test $v = u$. Il est ici crucial de considérer le cas de conditions de Navier, car u ne serait en général pas une fonction test admissible dans la formulation faible de Navier-Stokes associée à la condition de Dirichlet.

Cette procédure donne :

$$\|w^\nu(t,\cdot)\|_{\mathscr{H}}^2 \quad \leqslant \quad \|w_0^\nu\|_{\mathscr{H}}^2 - 2\int_0^t \Big[-2\nu a(u,w^\nu) + b(w^\nu, w^\nu, u)\Big] ds,$$

soit encore

$$\|w^\nu(t,\cdot)\|_{\mathscr{H}}^2 + 4\alpha\nu\int_0^t\int_{\partial\mathscr{S}_0}|w^\nu - w_{\mathscr{S}}^\nu|^2 + 4\nu\int_0^t\int_{\mathscr{F}_0}|D(w^\nu)|^2 \leqslant \|w_0^\nu\|_{\mathscr{H}}^2 - 2\int_0^t \Big[-2\nu a(u,w^\nu) + b(w^\nu, w^\nu, u)\Big] ds. \tag{III.10}$$

Il suffit alors d'utiliser les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, (II.15) et finalement le lemme de Gronwall pour finir de montrer la première partie du théorème.

Notons à ce propos que dès lors que u converge vers u^E dans $L^\infty(0,T;\mathscr{H})$ il suit directement de (II.6), de (II.24) et l'inégalité de Korn que $\sqrt{\nu}\|u|_{\mathscr{F}_0}\|_{L^2(0,T;H^1(\mathscr{F}_0))}$ et $\sqrt{\alpha\nu}\|u - u_{\mathscr{S}}\|_{L^2((0,T)\times\partial\mathscr{S}_0)}$ convergent vers 0.

La seconde partie en découle alors directement en utilisant les reformulations (II.14) et (II.28) de la dynamique du solide, et (II.16).

Enfin, pour ce qui est de la dernière partie, indiquons seulement l'idée de départ qui est de retravailler la partie visqueuse du membre de droite de (III.10) en intégrant par parties de façon à faire porter une dérivée de plus sur la solution non-visqueuse u.

III.3 Perspective

Dans le cas de la dimension deux nous avons vu dans la section I.1.2.3 que l'énergie cinétique du fluide peut être infinie dans des cas très naturels, c'est par exemple le cas si la vorticité est une masse de Dirac. Différents auteurs ont développé une théorie de Cauchy pour les équations de Navier-Stokes en dimension deux quand la vorticité est une mesure de Radon finie, cf. [38, 68, 103, 58, 59]. Il pourrait donc être intéressant de voir s'il est possible d'étendre le Théorème 3 à ce contexte. Il existe déjà quelques travaux sur le cas d'un solide fixe, notamment les travaux récents de [93, 60] qui étudient le comportement asymptotique en temps grand. Il se pourrait que dans les cas d'énergie finie, on ne puisse pas approcher des dynamiques intéressantes des équations d'Euler en prenant les équations de Navier-Stokes, même avec la condition de Kato ou les conditions de Navier. En particulier dans le chapitre suivant, cf. Théorème 13, nous verrons qu'un petit solide immergé dans un fluide parfait incompressible d'énergie finie peut avoir une dynamique très singulière. On peut alors se demander s'il existe des solutions de Navier-Stokes qui convergent vers les solutions non triviales du Théorème 13.

Chapitre IV

Limite particulaire du système "Euler+solide"

Dans ce chapitre, nous considérons uniquement le cas de la dimension 2 et nous supposons que le fluide est régi par les équations d'Euler. Ces hypothèses permettent de mettre en valeur le rôle de la circulation dans la dynamique d'un solide immergé.

Nous nous appuierons notamment dans ce chapitre sur des résultats obtenus dans des collaborations avec Olivier Glass et Christophe Lacave dans [73] et avec Ayman Moussa dans [130].

IV.1 Cas d'un petit solide

Dans cette section on considère le mouvement d'un petit solide dans un fluide idéal plan, et on se demande quel est le comportement limite du système quand le solide se réduit à un point. Considèrons donc $h_0 \in \mathbb{R}^2$ et $\mathscr{S}_0$ un domaine fixe, fermé non vide régulier connexe, et pour $\varepsilon > 0$ nous notons $\mathscr{S}_0^\varepsilon$ le domaine donné par : $\mathscr{S}_0^\varepsilon - h_0 = \varepsilon(\mathscr{S}_0 - h_0)$. Prenons $\mathscr{S}_0^\varepsilon$ comme domaine initialement occupé par le solide, et $\mathscr{F}_0^\varepsilon := \mathbb{R}^2 \setminus \mathscr{S}_0^\varepsilon$ celui occupé par le fluide. Il faut aussi prescrire des données initiales pour les vitesses fluides et solides. On pourrait être tenté de les prendre indépendantes de ε pour isoler l'influence de la taille du solide. Cependant ces vitesses doivent être compatibles à l'interface entre le fluide et le solide, et cette interface dépend de ε. Une manière de préserver une certaine uniformité en ε est de faire appel à la vorticité. Nous avons besoin ici d'assez peu de régularité, plus précisément nous nous donnons une vorticité initiale $\omega_0 \in L^p_c(\mathbb{R}^2)$ avec $p \in (2, +\infty]$. Nous nous fixons aussi γ, $r_0 \in \mathbb{R}$, et $\ell_0 \in \mathbb{R}^2$ indépendamment de ε. Il existe alors, pour chaque ε, un unique champ de vecteurs vitesse $u_0^\varepsilon \in C^0(\overline{\mathscr{F}_0^\varepsilon}; \mathbb{R}^2)$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div} u_0^\varepsilon = 0, \ \operatorname{rot} u_0^\varepsilon = \omega_0^\varepsilon \text{ dans } \mathscr{F}_0^\varepsilon, \\ u_0^\varepsilon \cdot n = (\ell_0 + r_0(x - h_0)^\perp) \cdot n \text{ sur } \partial \mathscr{S}_0^\varepsilon, \\ \lim_{|x| \to \infty} |u_0^\varepsilon(x)| = 0, \ \int_{\partial \mathscr{S}_0^\varepsilon} u_0^\varepsilon \cdot \tau \, ds = \gamma, \end{cases}$$

où $\omega_0^\varepsilon := \omega_{0|\mathscr{F}_0^\varepsilon}$. Nous nous intéressons à un régime particulier où la masse m_ε et l'inertie $\mathscr{J}_\varepsilon$ du solide sont de la forme

$$m_\varepsilon = m \text{ et } \mathscr{J}_\varepsilon = \varepsilon^2 \mathscr{J}_0,$$

où m et $\mathscr{J}_0$ sont des constantes fixées. C'est le cas par exemple pour un solide homogène avec une masse constante quand $\varepsilon \to 0^+$.

Comme on l'a vu au Chapitre 2, nous sommes assurés, pour chaque ε, de l'existence d'une solution $(h^\varepsilon, r^\varepsilon, u^\varepsilon)$ du système "Euler+solide", c'est-à-dire des équations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 & \qquad \text{pour } x \in \mathscr{F}^\varepsilon(t), \\
\operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \qquad \text{pour } x \in \mathscr{F}^\varepsilon(t), \\
u^\varepsilon \cdot n = u^\varepsilon_{\mathscr{S}} \cdot n & \qquad \text{pour } x \in \partial \mathscr{S}^\varepsilon(t), \\
\lim_{|x| \to \infty} |u^\varepsilon| = 0, & \\
m (h^\varepsilon)''(t) \quad = & \quad \int_{\partial \mathscr{S}^\varepsilon(t)} p^\varepsilon n \, ds, \\
\mathscr{J}_\varepsilon (r^\varepsilon)'(t) \quad = & \quad \int_{\partial \mathscr{S}^\varepsilon(t)} (x - h^\varepsilon(t))^\perp \cdot p^\varepsilon n \, ds, \\
u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon & \qquad \text{pour } x \in \mathscr{F}_0^\varepsilon, \\
h^\varepsilon(0) = h_0, \ (h^\varepsilon)'(0) = \ell_0, & \qquad r^\varepsilon(0) = r_0.
\end{aligned}$$

Nous nous intéressons à la limite du système quand $\varepsilon \to 0^+$. Dans [73] nous obtenons le résultat suivant où $\theta^\varepsilon(t)$ désigne l'angle de rotation du solide que l'on prend nul à $t = 0$, c'est-à-dire

$$\theta^\varepsilon = \int_0^t r^\varepsilon(s)ds.$$

Théorème 13 ([73])**.** *Quand $\varepsilon \to 0^+$, à une sous-suite près,*
- *$(h^\varepsilon, \varepsilon\theta^\varepsilon)$ converge vers $(h,0)$ faiblement-$*$ dans $W^{2,\infty}(0,T;\mathbb{R}^2)$,*
- *ω^ε converge vers ω dans $C([0,T];L^p(\mathbb{R}^2)-w)$ (resp. dans $C([0,T];L^\infty(\mathbb{R}^2)-w*)$ si $p = +\infty$),*
- *u^ε converge vers $\tilde{u} + \dfrac{\gamma}{2\pi}\dfrac{(x-h(t))^\perp}{|x-h(t)|^2}$ dans $C([0,T];L^q_{loc}(\mathbb{R}^2))$ pour $q < 2$,*
- *on a*

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\left[\tilde{u} + \frac{\gamma}{2\pi}\frac{(x-h(t))^\perp}{|x-h(t)|^2}\right]\omega\right) = 0 \quad \textit{dans} \quad [0,T]\times\mathbb{R}^2, \tag{IV.1}$$

$$mh''(t) = \gamma\Big(h'(t) - \tilde{u}(t,h(t))\Big)^\perp, \tag{IV.2}$$

$$\omega|_{t=0} = \omega_0,\ h(0) = h_0,\ h'(0) = \ell_0, \tag{IV.3}$$

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\omega(t,y)\,dy. \tag{IV.4}$$

Ci-dessus la convergence de ω^ε et de u^ε doit être comprise comme la convergence de leur extension par 0 à l'intérieur du solide.

L'équation (IV.1) décrit l'évolution de la vorticité du fluide : celle-ci est transportée par une vitesse qui est obtenue en appliquant la loi usuelle de Biot-Savart dans le plan, mais à une vorticité qui est la somme de celle du fluide et d'un point vortex placé à la position $h(t)$ où le solide se rétrécit, avec une amplitude égale à la circulation γ autour du solide.

L'équation (IV.2) signifie que la particule est accélérée par une force similaire à la force de portance mises en lumière par Kutta et Joukowski pour la théorie irrotationnelle : la particule est accélérée dans une direction perpendiculaire à la différence de vitesse entre sa vitesse et la vitesse virtuelle du fluide à l'endroit occupée par la particule (obtenue par la loi de Biot-Savart dans le plan appliquée à la vorticité du fluide), avec un facteur de proportionalité égale à la circulation γ autour de la particule. Nous renvoyons ici aux livres de Childress [29] et de Marchioro et Pulvirenti [126] pour une discussion de la force de Kutta-Joukowski, et à l'article de Grotta-Ragazzo, Koiller et Oliva [82].

Comme le système "Euler+solide" est conservatif il est naturel de s'attendre à ce que le système limite (IV.1)–(IV.4) le soit aussi. En fait nous pouvons reformuler les équations (IV.1)–(IV.4) comme un système hamiltonien de la forme

$$\frac{d}{dt}F = \{F, \mathfrak{H}\},$$

où $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson, F une fonctionnelle régulière test et $\mathfrak{H}$ est l'énergie renormalisée définie par :

$$2\mathfrak{H} = m|h'(t)|^2 - \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|\omega(t,x)\omega(t,y)\,dx\,dy - 2\gamma\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2\pi}\ln|x-h(t)|\omega(t,x)\,dx. \tag{IV.5}$$

Nous reviendrons sur ce point de vue dans la section IV.2.4 avec un peu plus de précision.

La preuve du Théorème 13 est assez complexe. Essayons d'en expliquer brièvement les grandes lignes.

Commençons par réécrire le système avec le changement de variables de la section I.2.1 qui fixe le domaine occupé par le solide. Nous établissons ensuite diverses estimations a priori, en particulier pour la vorticité et pour l'énergie cinétique totale du système. Pour cette dernière il s'agit d'une énergie renormalisée car l'énergie sous sa forme la plus usuelle n'est pas finie dans ce contexte (si bien que sa conservation n'apporte aucune information !). Un des soucis de cette renormalisation est que la quantité conservée obtenue n'est plus la somme de contributions positives. Puisqu'en l'occurrence on espère en tirer un contrôle de la vitesse du solide, il est nécessaire de contrôler par un autre argument les contributions dues au fluide. Il s'avère que c'est le contrôle de la taille du support de la vorticité qui est crucial, et comme celle-ci peut être en retour estimée par les vitesses fluides et solides, on réalise vite que l'on a un système d'inégalités qui se combinent pour donner d'assez bonnes estimations a priori.

Nous travaillons ensuite l'expression des forces de pression qui agissent sur le solide, en découplant des effets dus à la masse ajoutée, à la circulation et à la partie distribuée de la vorticité du fluide. Comme c'est un travail bien compris dans la littérature dans le cas de fluides irrotationnels, nous essayons de nous en rapprocher en introduisant une approximation irrotationnelle bien choisie du champ de vitesse fluide. Les contributions de l'écart à l'approximation sur la frontière du solide sont de plus en plus négligeable au fur et à mesure que le solide se rétrécit.

L'idée est alors comme dans la théorie irrotationnelle d'appliquer le lemme de Blasius, cf. Lemme 1, qui exploite les structures holomorphes sous-jacentes à ce cadre.

Cependant un certain nombre de soucis liés à la rotation se posent encore à la sortie de cette étape. Par chance, nous parvenons, grâce à un lemme de phase stationnaire/instationnaire, à découpler suffisamment ces effets de la rotation des équations pour passer à la limite.

Pour finir cette section donnons quelques commentaires sur le rôle de la masse m dans le système limite (IV.1)–(IV.4). Comme m est supposé être strictement positif dans le Théorème 13, il est naturel d'envisager de discuter les deux limites $m \to +\infty$ et $m \to 0$.

Le premier cas est le plus simple. Nous montrons assez facilement le résultat suivant :

Proposition 6. *Soit $p \in (2,+\infty]$, $h_0 \in \mathbb{R}^2$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\ell_0 := 0$, ω_0 dans $L^p_c(\mathbb{R}^2)$ et $T > 0$. Pour tout $m > 0$, on considère (h^m, ω^m) une solution du système limite* (IV.1)–(IV.4) *donnée par le Théorème 13. Quand $m \to +\infty$, à une sous-suite près, h^m converge vers h_0 faiblement-$*$ dans $W^{2,\infty}(0,T;\mathbb{R}^2)$ et ω^m converge vers ω dans $C([0,T];L^p(\mathbb{R}^2) - w)$ (resp. dans $C([0,T];L^\infty(\mathbb{R}^2) - w*)$ si $p = +\infty$), et*

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\left[\tilde{u} + \frac{\gamma}{2\pi} \frac{(x-h_0)^\perp}{|x-h_0|^2} \right] \omega \right) = 0 \quad \text{dans} \quad [0,T] \times \mathbb{R}^2,$$
$$\omega|_{t=0} = \omega_0,$$
$$\tilde{u}(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega(t,y)\, dy.$$

Ce dernier système a déjà été obtenu par Iftimie, Lopes-Filho et Nussenzveig-Lopes dans [94] comme limite du système d'Euler en dehors d'un obstacle fixe qui rétrécit en un point. On peut donc considérer le Théorème 13 comme une extension de leur résultat au cas d'un solide de masse finie en mouvement.

Un problème ouvert qui semble difficile est d'étendre l'analyse précédente au cas où la densité du solide est fixée quand ε tend vers 0 de telle façon que la masse du solide tend vers 0. Formellement, lorsqu'on y annule la masse, les équations (IV.1)–(IV.4) se réduisent au système "Euler+point vortex" de Marchiorro et Pulvirenti [126], mais cette limite est très singulière puisque l'on réduit l'ordre du système, et il semble que des oscillations très rapides, dues aux forces gyroscopiques mises en jeu, se développent.

Dans le contexte des équations de Navier-Stokes, cette problèmatique d'un solide petit et lèger a été étudiée dans [41] pour un disque maintenu en translation ; mais la dynamique limite est alors beaucoup moins singulière puisque lorsque le disque se réduit à un point, sa trajectoire est celle qu'aurait une particule du fluide au même endroit.

Une question intermédiaire peut-être plus raisonnable serait de faire tendre la masse vers 0 sur le système limite, où le solide est donc ponctuel. La question peut alors se reformuler comme un prolongement de la théorie du centre guide, si l'on imagine que la force de Kutta-Joukowski est la force de Lorentz associée à un champ magnétique constant dans le champ perpendiculaire au plan d'étude. La question de la convergence de la dynamique du particule quand la masse tend vers 0 a été traitée dans ce contexte par Kruskal [110] et Berkowitz et Gardner [13]. Evidemment dans le cas du système (IV.1)–(IV.4) le couplage avec les équations d'Euler devrait compliquer les choses.

IV.2 Limite de champ moyen

Généralisons maintenant le système (IV.1)–(IV.4) au cas de N particules ponctuelles de masse m_i, de circulation γ_i et de position $h_i(t)$, pour $i = 1,...,N$, en mouvement dans un fluide parfait incompressible plan :

$$\partial_t \omega + \operatorname{div}_x(\omega u) = 0, \tag{IV.6}$$

$$u(t,x) = K[\omega](t,x) + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j H(x - h_j(t)), \tag{IV.7}$$

$$m_i h_i''(t) = \gamma_i \Big(h_i'(t) - v_i(t, h_i(t)) \Big)^\perp, \tag{IV.8}$$

$$v_i(t,x) = K[\omega](t,x) + \sum_{j \neq i} \gamma_j H(x - h_j(t)), \tag{IV.9}$$

$$\omega|_{t=0} = \omega_0, \ h_i(0) = h_{i,0}, \ h_i'(0) = h_{i,1}. \tag{IV.10}$$

Soulignons que dans (IV.9) l'auto-interaction est omise puisque l'indice de sommation ne parcourt que les $j \neq i$. La dérivation du système (IV.6)-(IV.10) à partir du mouvement de N corps solides dans un fluide parfait incompressible plan, quand les solides rétrécissent jusqu'à devenir des particules ponctuels, est l'objet d'un article en préparation.

Encore une fois si les masses m_i sont nulles le système ci-dessus dégénère en le système "Euler+ points vortex" de Marchioro et Pulvirenti.

Dans cette section nous nous intéressons à une limite de type champ moyen, ce qui veut dire que nous considérons le "scaling" suivant :

$$
\begin{aligned}
\partial_t \omega + \mathrm{div}_x(\omega u) = 0,\\
u(t,x) = K[\omega](t,x) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} H(x - h_j(t)),\\
h_i''(t) = \Big(h_i'(t) - v_i(t,h_i(t))\Big)^{\perp},\\
v_i(t,x) = K[\omega](t,x) + \frac{1}{N}\sum_{j\neq i} H(x - h_j(t)),\\
\omega|_{t=0} = \omega_0,\ h_i(0) = h_{i,0},\ h_i'(0) = h_{i,1},
\end{aligned}
$$

à la limite où $N \to +\infty$.

IV.2.1 Limite de champ moyen d'une régularisation du système

Suivant l'approche initiée par Dobrushin [49] (mentionnons aussi Braun et Hepp [20], Neunzert [135] et plus récemment Hauray et Jabin [87]) dans le cas du système de Vlasov-Poisson, nous régularisons le système en substituant à K et H la loi de Biot-Savart régularisée

$$
\widetilde{K}[g](x) := \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{H}(x-y)g(y)dy,
$$

où $\widetilde{H}$ est dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ avec $\widetilde{H}(0) = 0$.

Introduisons alors la mesure empirique

$$
f(t) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{(h_i(t),h_i'(t))}
$$

et constatons qu'elle vérifie

$$
\begin{aligned}
\partial_t \omega + \mathrm{div}_x(\omega u) &= 0, &\text{(IV.11)}\\
\partial_t f + \mathrm{div}_x(f\xi) + \mathrm{div}_\xi(f(\xi-u)^{\perp}) &= 0, &\text{(IV.12)}
\end{aligned}
$$

où

$$
u := \widetilde{K}[\omega+\rho] \text{ et } \rho := \int_{\mathbb{R}^2} f d\xi. \tag{IV.13}
$$

Ce système décrit une phase de particules dispersées en mouvement dans un fluide parfait incompressible, en utilisant une approche couplée fluide/cinétique. Le fluide est en effet décrit par des quantités macroscopiques ω et u qui dépendent du temps t et de la variable d'espace x alors que les particules dispersées sont représentées par une densité de probabilité de présence qui dépend de t et de x mais aussi de la vitesse ξ dans $\mathbb{R}^2$ de la particule. L'équation (IV.15) définit la vitesse dans le fluide. Cette vitesse couple l'équation de Vlasov (IV.11) et l'équation d'Euler (IV.12) : le fluide donne une accélération aux particules et celles-ci contribuent à la vorticité du spray.

A l'instar de la régularisation du système de Vlasov-Poisson, le système (IV.11)-(IV.12)-(IV.13) est bien posé dans l'espace des mesures.

Théorème 14 ([130]). *(a) Soit (ω_0, f_0) dans $\mathscr{M}_1(\mathbb{R}^2)\times\mathscr{P}_1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$. Alors il existe une solution (ω_t, f_t) et une seule dans $C([0,\infty);\mathscr{M}_1(\mathbb{R}^2)\times\mathscr{P}_1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)-w)$ de* (IV.11)-(IV.12)-(IV.13) *avec (ω_0, f_0) comme donnée initiale.*

(b) De plus on a la propriété de stabilité suivante. Soit deux solutions $\mu_1 := (\omega_1, f_1)$ et $\mu_2 := (\omega_2, f_2)$ du système (IV.11)-(IV.12)-(IV.13) *associées aux données initiales $\mu_0^1 := (\omega_0^1, f_0^1)$ et $\mu_0^2 := (\omega_0^2, f_0^2)$ dans $\mathscr{M}_1(\mathbb{R}^2)\times\mathscr{P}_1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$. Alors, pour tout $t \geqslant 0$,*

$$
W_1(\mu_1(t),\mu_2(t)) \leqslant e^{2Ct} W_1(\mu_0^1,\mu_0^2), \tag{IV.14}
$$

où $C>0$ dépend seulement de $\|\widetilde{H}\|_{\mathrm{Lip}}$ et de $|\omega_0|(\mathbb{R}^2)$.

(c) Enfin, si $(\omega_0, f_0) \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2)\times\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$, alors la solution correspondante (ω_t, f_t) appartient à $L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty);\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2)\times\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2))$.

Ci-dessus $\mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des mesures bornées déjà utilisé dans la section II.2.2.3, $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ désigne le sous-ensemble des mesures de probabilité, pour tout $p\in[1,\infty[$, $\mathscr{M}_p(\mathbb{R}^d)$ (respectivement $\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$) désigne le sous-espace des mesures de Radon signées (resp. des mesures de probabilité) qui ont un moment d'ordre p fini et W_1 désigne la distance de Wasserstein. La preuve du Théorème 14 repose essentiellement sur les propriétés maintenant bien comprises de cette distance (cf. [3, 164]) notamment la dualité de Kantorovitch. Nous pouvons alors déduire du Théorème 14 le résultat suivant à propos de la limite de champ moyen du système (IV.11)-(IV.12)-(IV.13).

Corollaire 2 ([130])**.** *Soit* $(\omega_0,f_0)\in\mathscr{M}_1(\mathbb{R}^2)\times\mathscr{P}_1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$. *Soit* $(h_i^0,h_i^1)_{i\in\mathbb{N}^*}\in(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}^*}$ *tel que*

$$f_0^N:=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{(h_i^0,h_i^1)}\in\mathscr{P}_1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2),$$

satisfait $W_1(f_0^N,f_0)\to 0$ *quand* $N\to+\infty$. *Soit* $\mu_N:=(\omega^N,f^N)_{N\in\mathbb{N}^*}$, $\mu:=(\omega,f)$ *les solutions respectivement associées à* $(\omega_0,f_0^N)_{N\in\mathbb{N}^*}$, (ω_0,f_0). *Alors pour tout* $t>0$, *pour tout* $N\geqslant 1$,

$$f^N(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{(h_{i,N}(t),h'_{i,N}(t))},$$

où

$$\begin{aligned}h''_{i,N}(t) &= \Big(h'_{i,N}(t)-\widetilde{u}^N(t,h_{i,N}(t))\Big)^{\perp},\\ \widetilde{u}^N &= \widetilde{K}[\omega^N]+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\widetilde{H}(\cdot-h_{j,N}(t)),\\ (h_{i,N}(0),h'_{i,N}(0)) &= (h_i^0,h_i^1);\end{aligned}$$

et pour tout $T>0$, $\mu_N\to\mu$ *quand* $N\to+\infty$ *dans* $C([0,T];\mathscr{M}_1(\mathbb{R}^2)\times\mathscr{P}_1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)-w)$.

Nous pouvons aussi énoncer un résultat similaire pour le cas où non seulement f mais aussi la vorticité ω est discrétisée.

Malheureusement les résultats précédents semblent pour l'instant hors de portée si l'on ne régularise pas le système. Il est cependant légitime de conjecturer que l'on obtient à la limite un système composé des équations (IV.11)-(IV.12) où u est cette fois donné par

$$u:=K[\omega+\rho]\text{ et }\rho:=\int_{\mathbb{R}^2}f\,d\xi. \tag{IV.15}$$

IV.2.2 Une comparaison avec d'autres modèles de spray

De nombreux exemples de couplage entre une équation fluide et une équation cinétique ont été étudiés depuis les travaux de [22, 171] ; il est donc intéressant d'essayer de positionner le système précédent à l'aune de cette littérature.

En premier lieu notons que le système (IV.11)-(IV.12)-(IV.15) décrit le comportement d'un spray fin, suivant ici la terminologie de [136], c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'interaction (ni collisions, ni coalescences) entre les particules de sorte que l'équation cinétique est linéaire en f (u étant donné) et de plus la fraction volumique occupée par le spray est négligée.

Pour comparer notre système avec ceux de la littérature, commençons par le réexprimer dans une formulation vitesse :

$$\begin{aligned}\partial_t u+\operatorname{div}_x(u\otimes u)+\nabla p &= (\rho u-j)^{\perp}, && \text{(IV.16)}\\ \operatorname{div}_x u &= 0 && \text{(IV.17)}\\ \partial_t f+\operatorname{div}_x(f\xi)+\operatorname{div}_\xi(f(\xi-u)^{\perp}) &= 0, && \text{(IV.18)}\end{aligned}$$

où $\rho:=\int_{\mathbb{R}^2}f\,d\xi$ et $j:=\int_{\mathbb{R}^2}f\xi\,d\xi$.

D'un autre côté le système $(7)-(9)$ de [8] s'écrit, avec nos notations et avec les adaptations qui s'imposent dans le cadre d'un fluide incompressible homogène,

$$\begin{aligned}\partial_t u+\operatorname{div}_x(u\otimes u)+\nabla p &= j-\rho u, && \text{(IV.19)}\\ \operatorname{div}_x u &= 0, && \text{(IV.20)}\\ \partial_t f+\operatorname{div}_x(f\xi)+\operatorname{div}_\xi(f(u-\xi)) &= 0. && \text{(IV.21)}\end{aligned}$$

Ce dernier modèle peut aussi se voir comme le modèle $(1)-(3)$ de [23] où le terme de diffusion dans l'équation cinétique a été supprimé.

Nous constatons donc que le modèle (IV.19)-(IV.21) fait intervenir le terme de force de traînée $(j-\rho u)$ alors que le modèle (IV.16)-(IV.18) fait intervenir le terme de force gyroscopique $-(j-\rho u)^{\perp}$, ce qui ne semblait pas encore avoir été envisagé jusque là.

IV.2.3 Problème de Cauchy

Dans cette section nous donnons des résultats d'existence et d'unicité de solutions au problème (IV.11)-(IV.12)-(IV.15).

Théorème 15 ([130]). *1) Si* $(\omega_0, f_0) \in (L^{\frac{4}{3}} \cap L^1)(\mathbb{R}^2) \times (L^\infty \cap L^1)(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ *et* $\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} f_0(x,\xi)|\xi|^2 dxd\xi < +\infty$*, alors pour tout* $T > 0$ *il existe au moins une solution faible*

$$(\omega, f) \in \bigcap_{p\in[1,\infty[} C\Big([0,T]; L^{4/3}(\mathbb{R}^2) \times L^p(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)\Big)$$

des équations (IV.11)-(IV.12)-(IV.15)*. De plus pour tout* $t \in [0,T]$, $\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} f(t,x,\xi)|\xi|^2 dxd\xi < +\infty$.

2) Si ω_0 *est dans* $W^{1,1}(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ *et* f_0 *est dans* $W^{1,1}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}_+)$ *et vérifie*

$$(1+|\xi|^2)^{\gamma/2}(|f_0| + |Df_0|) \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2),$$

pour un réel $\gamma > 2$*, alors, pour tout* $T > 0$*, il existe une solution*

$$(\omega, f) \in L^\infty([0,T]; W^{1,1}(\mathbb{R}^2)) \times L^\infty([0,T]; W^{1,1}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2))$$

des équations (IV.11)-(IV.12)-(IV.15) *qui, de plus, satisfait*

$$(1+|\xi|^2)^{\gamma/2}(|f_0| + |Df_0|) \in L^\infty([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)).$$

3) Si ω_0 *est dans* $(L^\infty \cap L^1)(\mathbb{R}^2)$ *et* f_0 *est dans* $\mathscr{M}_2^+(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ *alors, pour tout* $T > 0$ *il existe au plus une solution*

$$(\omega, f) \in C\Big([0,T]; (L^\infty \cap L^1)(\mathbb{R}^2) - w* \times \mathscr{M}^+(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)\Big)$$

des équations (IV.11)-(IV.12)-(IV.15) *telle que* ρ *est dans* $L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^2)$.

La première partie du théorème se démontre classiquement par compacité en utilisant d'une part des estimations a priori qui utilisent les propriétés de transport et l'évolution de l'énergie cinétique de la phase dispersée, et d'autre part une suite de solutions approchées qui sont obtenues comme solutions exactes de régularisés du système.

La deuxième partie s'inspire du travail de Degond [42] sur les solutions classiques de l'équation de Vlasov-Poisson en deux dimensions.

La troisième partie du théorème étend les résultats [173] de Yudovich sur les équations d'Euler incompressible et [122] de Loeper à propos du système de Vlasov-Poisson. Elle se démontre en suivant la même méthode que Loeper dans [122] c'est-à-dire en utilisant des propriétés de transport optimal. Notons que cette partie unicité s'applique en particulier à des solutions monocinétiques.

IV.2.4 Structure hamiltonienne

Le but de cette section est d'exhiber la structure hamiltonienne des équations (IV.11)-(IV.12), suivant [5]. Nous serons très formel ici, en laissant de côté les questions de régularité et de décroissance. On s'imagine donc des fonctions (ω, f) régulières en t, x, ξ et rapidement décroissantes à l'infini. En premier lieu nous munissons la variété $\mathfrak{P}$ des couples (ω, f) d'une structure de Poisson, c'est-à-dire que nous munissons $\mathfrak{P}$ d'un crochet $\{\cdot,\cdot\}$ qui agit sur les fonctionnelles $F : \mathfrak{P} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^\infty$ bilinéaires et antisymétriques, en satisfaisant les identités de Jacobi et de Leibniz. Ici nous définissons pour tout couple de fonctionnelles F, G sur $\mathfrak{P}$,

$$\{F,G\} := \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} f\ \nabla_\xi F_f \cdot \nabla_\xi^\perp G_f + \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} f\ \{F_f, G_f\}_{x,\xi} + \int_{\mathbb{R}^2} w\ \nabla_x F_w \cdot \nabla_x^\perp G_w,$$

où F_ω et F_f désignent les gradients par rapport à ω et f d'une fonctionnelle F dans L^2, et le crochet $\{\cdot,\cdot\}_{x,\xi}$ désigne

$$\{f,g\}_{x,\xi} := \nabla_x f \cdot \nabla_\xi g - \nabla_\xi f \cdot \nabla_x g.$$

Soit

$$2\mathfrak{H} = \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \xi^2 f(t,x,\xi) dxd\xi - \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} G(x-y)(\omega+\rho)(t,x)(\omega+\rho)(t,y) dxdy, \quad \text{avec } \rho := \int_{\mathbb{R}^2} f d\xi.$$

Proposition 7 ([130]). *Quand* (ω, f) *sont solutions des équations* (IV.11)-(IV.12) *alors toute fonctionnelle régulière* F *vérifie l'équation différentielle ordinaire* $\frac{d}{dt}F = \{F, \mathfrak{H}\}$*, où* F *et* $\mathfrak{H}$ *désignent respectivement pour* $F(\omega, f)$ *et* $\mathfrak{H}(\omega, f)$.

IV.2.5 Particules légères

Une question naturelle est de savoir ce qui se passe quand nous faisons tendre vers 0 la masse des particules immergées dans le fluide. Cela revient à regarder le comportement, quand $\varepsilon \to 0^+$ du système

$$\partial_t \omega^\varepsilon + \mathrm{div}_x(\omega^\varepsilon u^\varepsilon) = 0, \tag{IV.22}$$

$$\partial_t f^\varepsilon + \mathrm{div}_x(f^\varepsilon \xi) + \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}_\xi(f^\varepsilon(\xi - u^\varepsilon)^\perp) = 0, \tag{IV.23}$$

où

$$u^\varepsilon := K[\omega^\varepsilon + \rho^\varepsilon] \text{ et } \rho^\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^2} f^\varepsilon d\xi. \tag{IV.24}$$

Dans la dernière partie de l'article [130], nous montrons que le système ci-dessus dégénère vers les équations d'Euler incompressible. Commençons par donner un argument heuristique. En passant à la limite dans (IV.23) nous devinons que la densité de particules f^ε va se localiser autour de la vitesse $\xi = u$ de sorte que $j^\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^2} f^\varepsilon \xi d\xi$ converge vers ρu, où ρ et u désignent les limites respectives attendues de ρ^ε et u^ε. Par conséquent le membre de droite de l'équation (IV.16) s'annule, ce qui donne

$$\partial_t u + \mathrm{div}_x(u \otimes u) + \nabla p = 0 \text{ et } \mathrm{div}_x u = 0. \tag{IV.25}$$

Ce problème est très proche de celui de la limite gyrocinétique considerée par Brenier dans [17] avec ici la difficulté supplémentaire du couplage avec les équations d'Euler incompressible. La stratégie de [17] utilise une énergie modulée et les solutions dissipatives au sens de Lions, cf. [119].

Commençons par donner la définition de ces dernières dans le contexte des flots d'énergie infinie c'est-à-dire pour une vitesse initiale dans l'espace $E_{\alpha,\mathbb{R}^2}$ défini en (I.14).

Définition 5. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in E_{\alpha,\mathbb{R}^2}$. On dit qu'un champ de vecteurs $u \in L^\infty((0,T);E_{\alpha,\mathbb{R}^2})$ est une solution dissipative des équations d'Euler incompressible* (IV.25) *avec u_0 comme donnée initiale si pour tout champ de vecteurs $v \in C([0,T];E_{\alpha,\mathbb{R}^2})$, tel que $A(v) := \partial_t v + v \cdot \nabla v \in L^1((0,T);L^2(\mathbb{R}^2))$, et $D(v) \in L^1((0,T);L^2(\mathbb{R}^2))$ et pour presque tout $t \in [0,T]$,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(t,x) - v(t,x)|^2 dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} |u_0(x) - v(0,x)|^2 dx \exp \int_0^t 2\|\mathrm{d}(v(\theta))\| d\theta$$
$$+2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} A(v)(s,x)(v-u)(s,x) \exp\left\{\int_s^t 2\|\mathrm{d}(v(\theta))\| d\theta\right\} dxds,$$

où $\|\mathrm{d}(v(\theta))\|$ est le supremum en x du rayon spectral de $D(v)(\theta,x)$.

Cette définition étend celle de [119] et [17] au cas d'énergie infinie. La propriété clé de ces solutions est le principe d'unicité fort-faible suivant : si $\widetilde{u}$ est une solution régulière de (IV.25) avec u_0 comme donnée initiale alors $u = \widetilde{u}$. Ceci s'obtient facilement en remarquant que comme $A(\widetilde{u})$ (respectivement $\widetilde{u} - u$) est un gradient (resp. un champ à divergence nulle) alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^2} A(\widetilde{u})(\widetilde{u} - u)dx$ s'annule. Le résultat suivant, obtenu avec Ayman Moussa dans [130] justifie la limite formelle évoquée ci-dessus.

Théorème 16 ([130])**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in E_{\alpha,\mathbb{R}^2}$. Soit $(\omega^\varepsilon, f^\varepsilon)_\varepsilon$ des solutions régulières, avec f^ε suffisamment décroissante quand $|\xi|$ tend vers $+\infty$, des équations* (IV.22)-(IV.23)-(IV.24) *correspondant à des données initiales $(\omega_0^\varepsilon, f_0^\varepsilon)_\varepsilon$ régulières à support compact et telles que $(\omega_0^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et $\left(\rho_0^\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^2} f_0^\varepsilon d\xi\right)_\varepsilon$ est bornée dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ et que quand $\varepsilon \to 0^+$,*

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |\xi|^2 f_0^\varepsilon(x,\xi) dx d\xi \to 0, \ \int_{\mathbb{R}^2} |u_0^\varepsilon - u_0|^2 dx \to 0, \ \text{où } u_0^\varepsilon := K[\omega_0^\varepsilon + \rho_0^\varepsilon].$$

Alors, à une extraction de sous-suite près, la suite $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ converge dans $L^\infty((0,T);E_{\alpha,\mathbb{R}^2} - w)$ vers une solution dissipative des équations d'Euler incompressible avec condition initiale u_0.

Notons que le Théorème 16 et le principe d'unicité fort-faible énoncé ci-dessus impliquent qu'en particulier si u_0 est régulier avec une vorticité bornée alors toute la suite $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers l'unique solution régulière des équations d'Euler incompressible avec condition initiale u_0.

La preuve de ce théorème s'inspire grandement de la méthode utilisée par Brenier dans [17].

IV.2.6 Perspectives

Une perspective naturelle concerne l'étude des états stationnaires du système (IV.11)-(IV.12)-(IV.15). En particulier il serait intéressant de voir s'il est possible d'adapter à ce système l'analyse de la structure locale de l'ensemble des états stationnaires menée récemment par Choffrut et Šverák dans [30] pour les équations d'Euler incompressible en deux dimensions.

De plus, parmi les états stationnaires, ceux qui possèdent une propriété de stabilité sont particulièrement intéressants puisque plus facilement observables physiquement. Au vu de la structure hamiltonienne mise en évidence dans (IV.2.4) on peut espérer prouver l'existence de tels états stationnaires stables grâce à la méthode utilisée par Arnold pour les équations d'Euler cf. [5] et dont les prolongements ont aussi donné des résultats pour Vlasov-Poisson cf. [19, 121]. Rappelons qu'il y a parfois des obstructions géométriques à ce que la méthode d'Arnold s'applique cf. [126, 142], et il semble que dans le cas du système (IV.11)-(IV.12)-(IV.13) il est nécessaire de se placer dans le cadre d'un domaine borné pour trouver des situations où la méthode s'applique. Il faudrait donc au préalable développer un peu de théorie, au moins de solutions faibles, pour le système (IV.11)-(IV.12)-(IV.13) posé en domaine borné.

Une autre question intéressante serait de dériver et d'étudier des sprays plus épais, où la fraction volumique de la phase dispersée est plus conséquente. En dimension 3 cela a été fait notamment dans [88, 99]. Comme l'extérieur d'une boule est simplement connexe en dimension 3 il n'y a pas d'équivalent de la force de Kutta-Joukowski et ce sont les effets de masse ajoutée qui deviennent prépondérants. En dimension 2 il y a aussi l'interaction des champs harmoniques liés aux circulations, pour laquelle il y a sûrement lieu de s'inspirer de [98].

Chapitre V

Problème de Cauchy en domaine borné

Dans ce chapitre nous revenons sur le problème de Cauchy pour le système “Navier-Stokes+solide” et le système “Euler+solide” mais cette fois dans le cas où le système occupe un ouvert borné fixé $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou 3. Commençons encore une fois par l'existence de solutions faibles à la Leray dans le cas visqueux. Nous établissons ensuite que ces solutions sont uniques en dimension deux, au moins tant qu'il n'y a pas de collision. Enfin nous étudions le cas non visqueux.

Une partie de ce qui suit est extrait de collaborations avec Olivier Glass dans [76] et dans [74], avec Olivier Glass et Takéo Takahashi dans [78].

V.1 Cas des équations de Navier-Stokes

V.1.1 Existence de solutions faibles à la Leray

Nous considérons ici le cas de la dimension 3 pour fixer les notations mais nous avons bien sûr des résultats similaires en deux dimensions, avec même quelques améliorations.

Nous nous restreignons ici au cas des conditions de Dirichlet. Rappelons donc les équations qui régissent le système :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}(t), \tag{V.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}(t), \tag{V.2}$$

$$u = u_{\mathscr{S}} \quad \text{pour} \quad x \in \partial \mathscr{S}(t), \tag{V.3}$$

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \partial\Omega, \tag{V.4}$$

$$m\ell'(t) = -\int_{\partial \mathscr{S}(t)} \Sigma n \, ds, \tag{V.5}$$

$$(\mathscr{J} r)'(t) = -\int_{\partial \mathscr{S}(t)} (x - h(t)) \wedge \Sigma n \, ds. \tag{V.6}$$

Notons que l'on choisit dorénavant la notation $r(t)$ pour la vitesse angulaire qui est notée $R(t)$ dans le premier chapitre. Aussi nous choisissons ici de noter $\ell(t) := h'(t)$ au lieu de $\ell(t) := Q(t)^T h'(t)$ dans la Section I.2.1, de sorte que la vitesse solide s'écrit ici $u_{\mathscr{S}}(t,x) := \ell(t) + r(t) \wedge (x - h(t))$.

Ainsi lorsque les données initiales sont prescrites, en particulier un sous-ensemble fermé borné connexe et simplement connexe $\mathscr{S}_0 \subset \mathbb{R}^3$ avec une frontière régulière, $\mathscr{F}_0 := \mathbb{R}^3 \setminus \mathscr{S}_0$ et h_0 la position initiale du centre de masse ; et que $(\ell, r) \in C([0,T]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ sont connus, on définit $Q \in C^1([0,T]; SO(3))$ par

$$Q(0) = Id \text{ et, pour tout } x \in \mathbb{R}^3, \ Q'(t)x = r(t) \wedge Q(t)x,$$

pour tout t dans $[0,T]$, $h(t)$ par $h(t) := h_0 + \int_0^t \ell(s) ds$, pour tout t dans $[0,T]$ et pour tout $x \in \mathscr{S}_0$, $\tau(t,x) := h(t) + Q(t)(x - h(0))$ et enfin, pour tout t dans $[0,T]$, $\mathscr{F}(t) := \tau(t,\cdot)(\mathscr{F}_0)$.

Dans la suite, nous utilisons parfois les notations $\mathscr{S}^{\ell,r}$, $\mathscr{F}^{\ell,r}$ et $\tau^{\ell,r}$ respectivement pour $\mathscr{S}$, $\mathscr{F}$ et τ, pour insister sur la dépendance en ℓ, r décrite ci-dessus.

Comme précédemment nous va commencer par donner une formulation faible globale qui englobe à la fois les équations dans le fluide et les équations du solide. Nous prolongeons la vitesse u par

$$\overline{u}(t,x) := u_{\mathscr{S}}(t,x) \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{S}(t), \tag{V.7}$$

de sorte que u est défini sur Ω tout entier. Il est d'ailleurs plus commode d'utiliser ce prolongement pour décrire la régularité du champ des vitesses puisque le domaine Ω ne dépend pas du temps.

On dit que u est *compatible* avec (ℓ, r) quand $u(t,\cdot)$ est dans $H^1(\Omega)$ pour presque tout t et que (V.7) est vraie dans $\mathscr{F}(t) = \mathscr{F}^{\ell,r}(t)$.

Il est aussi utile d'étendre la densité initiale $\rho_{\mathscr{S}_0}(x)$ définie a priori uniquement dans le solide, c'est-à-dire pour x dans $\mathscr{S}_0$, au domaine Ω tout entier :

$$\rho_0(x) = \rho_{\mathscr{S}_0} \text{ dans } \mathscr{S}_0 \quad \text{et} \quad \rho_0(x) = 1 \text{ dans } \mathscr{F}_0. \tag{V.8}$$

Ensuite étant donné un mouvement solide (ℓ, r), nous définissons la densité du solide comme suit

$$\rho_{\mathscr{S}}(t,x) = \rho_{\mathscr{S}_0}((\tau^{\ell,r}(t,\cdot))^{-1}(x)) \text{ dans } \mathscr{S}^{\ell,r}(t) \quad \text{et} \quad \rho_{\mathscr{S}(t)}(x) = 0 \text{ dans } \mathscr{F}^{\ell,r}(t), \tag{V.9}$$

et la densité $\rho(t,x)$ dans $[0,T]\times\Omega$ comme

$$\rho(t,x) = \rho_{\mathscr{S}}(t,x) \text{ dans } \mathscr{S}^{\ell,r}(t) \quad \text{et} \quad \rho(x) = 1 \text{ dans } \mathscr{F}^{\ell,r}(t). \tag{V.10}$$

Définition 6 ([44, 32, 145, 53])**.** *Soit $u_0 \in L^2(\mathscr{F}_0;\mathbb{R}^3)$ et $(\ell_0, r_0) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ satisfaisant* (V.13)*. On dit que*

$$(\ell, r, u) \in C([0,T];\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3) \times [C_w([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))]$$

est une solution faible de (V.1)-(V.6) *associée à la donnée initiale (ℓ_0, r_0, u_0) si u est à divergence nulle,*

$$u \quad \textit{est compatible avec } (\ell, r), \tag{V.11}$$

et que pour tout champ de vecteurs à divergence nulle $\phi \in C_c^\infty([0,T]\times\Omega;\mathbb{R}^3)$ tel que $D(\phi)(t,x) = 0$ quand $t \in [0,T]$ et $x \in \mathscr{S}^{\ell,r}(t)$, on ait, quand ρ est donné par (V.10) *:*

$$\int_\Omega \rho_0 u_0 \cdot \phi|_{t=0} - \int_\Omega (\rho u \cdot \phi)|_{t=T} + \int_{(0,T)\times\Omega} \rho u \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + (u \otimes u - 2D(u)) : D(\phi) = 0. \tag{V.12}$$

Nous avons le résultat suivant, cf. [44, 32, 145, 53].

Théorème 17. *Pour tout $u_0 \in L^2(\mathscr{F}_0;\mathbb{R}^3)$ et $(\ell_0, r_0) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ satisfaisant*

$$\operatorname{div} u_0 = 0 \textit{ dans } \mathscr{F}_0, \ u_0\cdot n = (\ell_0 + r_0 \wedge (x-h_0))\cdot n \textit{ sur } \partial\mathscr{S}_0, \ u_0 \cdot n = 0 \textit{ sur } \partial\Omega, \tag{V.13}$$

pour tout $T > 0$, il existe une solution faible

$$(\ell, r, u) \in C([0,T];\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3) \times [C_w([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))],$$

de (V.1)-(V.6) *avec donnée initiale (ℓ_0, r_0, u_0). De plus, pour tout $t \in [0,T]$,*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho(t,\cdot)|u(t,\cdot)|^2\,dx + 2\int_{(0,t)\times\Omega} \rho(s,x) D(u)(s,x) : D(u)(s,x)\,dx\,ds \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_0(x)|u_0(x)|^2\,dx. \tag{V.14}$$

Evidemment nous avons un théorème analogue en deux dimensions avec en plus deux précisions : $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ et il y a égalité dans (V.14). Ceci peut se montrer comme dans le cas d'un fluide seul cf. par exemple [119, p. 87].

Récemment Gérard-Varet et Hillairet ont adapté ce théorème au cas des conditions de Navier, cf. [66]. Il serait intéressant de savoir si leurs solutions bénéficient d'une propriété de régularité comme celle mise en évidence dans le cas non borné dans la Proposition 2.

V.1.2 Unicité des solutions faibles à la Leray

Comme Leray a montré l'unicité des solutions faibles des équations de Navier-Stokes dans le cas de la dimension 2, il est naturel de se demander si cela est encore vrai dans le cas où un solide est immergé dans le fluide.

Rappelons d'abord la forme que prennent les équations (V.1)-(V.6) en deux dimensions :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \Delta u + \nabla p = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}(t), \tag{V.15}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{F}(t), \tag{V.16}$$

$$u = u_{\mathscr{S}} \quad \text{pour} \quad x \in \partial\mathscr{S}(t), \tag{V.17}$$

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \partial\Omega, \tag{V.18}$$

$$m\ell'(t) = -\int_{\partial\mathscr{S}(t)} \Sigma n\,ds, \tag{V.19}$$

$$\mathscr{J}_0 r'(t) = -\int_{\partial\mathscr{S}(t)} (x-h)^\perp \cdot \Sigma n\,ds, \tag{V.20}$$

où $h(t) = h_0 + \int_0^t \ell(s)ds$ et nous considérons comme dans le chapitre précédent $\theta(t) = \int_0^t r(s)ds$ l'angle de rotation du solide depuis l'instant initial.

Théorème 18 ([76]). *Supposons que* Ω *soit un ouvert de* $\mathbb{R}^2$. *Soit* $T>0$ *et* (ℓ,r,u) *une solution à la Leray comme dans la section précédente. Supposons que pour tout* $t\in[0,T]$, $\text{dist}(\mathscr{S}(t),\partial\Omega)>0$. *Soit* $(\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{u})$ *une autre solution faible de* (V.1)-(V.6) *sur* $[0,T]$ *associée à la même donnée initiale. Alors* $(\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{u})=(\ell,r,u)$.

Le résultat étend celui de [157] où il est supposé de plus que la vitesse initiale du fluide est H^1. Dans ce même article la question de l'unicité dans le cadre général des solutions faibles était d'ailleurs posée comme ouverte, tout comme dans la conclusion de l'article [41].

Le théorème 18 apporte donc une réponse positive tant qu'il n'y a pas de collision.

Notons que pour certaines géométries on peut déterminer si une collision arrive ou pas, voir par exemple [90, 89, 65].

D'un autre côté les résultats de [91, 153] prouvent que de telles solutions faibles ne peuvent pas être uniques s'il y a une collision.

Il serait intéressant de savoir si un résultat similaire est possible dans le cas de la condition de Navier ou pour les modèles de fluides non newtoniens ou encore pour la nage d'un poisson. Pour ces cas-là l'existence de solutions faibles est déjà connue respectivement grâce aux travaux de [66], de [56] et de [134].

Donnons quelques éléments de la preuve du théorème ci-dessus. La première étape consiste à établir une estimation a priori pour les solutions à la Leray.

V.1.2.1 Estimations a priori

Commençons par donner quelques estimations a priori sur les solutions du Théorème 17. Considérons donc une solution (ℓ,r,u) donnée par le Théorème 17 sur $[0,T]$, avec $T>0$ et on utilisons les notations $\mathscr{F}(t)$, $\mathscr{S}(t)$, h, θ et $u_{\mathscr{S}}(t,x):=\ell(t)+r(t)(x-h(t))^{\perp}$ comme précédemment.

Introduisons aussi pour $T>0$, la notation

$$\mathscr{F}_T:=\cup_{t\in[0,T]}\{t\}\times\mathscr{F}(t). \tag{V.21}$$

Enfin supposons que $\text{dist}(\mathscr{S}(t),\partial\Omega)>0$ sur $[0,T]$.

Le point clé de la preuve est l'estimation suivante, qui utilise l'effet régularisant de la viscosité.

Proposition 8 ([76]). *On a*

$$tu\in L^{\frac{4}{3}}(0,T;W^{2,\frac{4}{3}}(\mathscr{F}(t))),\quad (t\partial_t u,t\nabla p)\in L^{\frac{4}{3}}(\mathscr{F}_T;\mathbb{R}^4).$$

Ci-dessus la notation $L^{\frac{4}{3}}(0,T;W^{2,\frac{4}{3}}(\mathscr{F}(t)))$ désigne l'espace des fonctions définies pour tout t dans le domaine fluide $\mathscr{F}(t)$, et qui peuvent s'étendre en des fonctions de $L^{\frac{4}{3}}(0,T;W^{2,\frac{4}{3}}(\Omega))$.

Ebauche de preuve de la Proposition 8. La preuve repose de manière cruciale sur le système auxiliaire suivant d'inconnue $(\mathfrak{l},\mathfrak{r},v)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\Delta v+\nabla q=g\quad\text{pour}\quad x\in\mathscr{F}(t), \tag{V.22}$$

$$\operatorname{div}v=0\quad\text{pour}\quad x\in\mathscr{F}(t), \tag{V.23}$$

$$v=v_{\mathscr{S}}\quad\text{pour}\quad x\in\partial\mathscr{S}(t), \tag{V.24}$$

$$v=0\quad\text{pour}\quad x\in\partial\Omega, \tag{V.25}$$

$$m\mathfrak{l}'(t)=-\int_{\partial\mathscr{S}(t)}\Sigma(v,q)n\,ds+mg_1, \tag{V.26}$$

$$\mathscr{J}\mathfrak{r}'(t)=-\int_{\partial\mathscr{S}(t)}\Sigma(v,q)n\cdot(x-h(t))^{\perp}\,ds+\mathscr{J}g_2, \tag{V.27}$$

$$v_{\mathscr{S}}(t,x):=\mathfrak{l}+\mathfrak{r}(x-h(t))^{\perp}, \tag{V.28}$$

où g, g_1 et g_2 sont des termes sources et où les domaines fluides et solides $\mathscr{F}(t)$ et $\mathscr{S}(t)$ sont prescrits. En fait, $\mathscr{F}(t)$ et $\mathscr{S}(t)$ sont associés à la solution (ℓ,r,u) ci-dessus. On a toujours

$$h(t)=\int_0^t\ell\quad\text{et}\quad u_{\mathscr{S}}(t,x):=\ell(t)+r(t)(x-h(t))^{\perp}.$$

Expliquons comment ce système entre en jeu. En utilisant les équations (V.1)-(V.6) nous obtenons que $(\mathfrak{l},\mathfrak{r},v):=(t\ell,tr,tu)$ est solution de (V.22)-(V.28), en un sens faible avec données initiales nulles et pour termes sources

$$g:=u-t(u\cdot\nabla)u\quad\text{et}\quad(g_1,g_2):=(\ell,r)\in L^{\frac{4}{3}}(0,T;\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}).$$

En utilisant que Ω est borné, l'inégalité de Hölder et le théorème de plongement de Sobolev nous obtenons facilement $((u\cdot\nabla)u,u)\in L^{\frac{4}{3}}(\mathscr{F}_T,\mathbb{R}^4)$, et donc $g\in L^{\frac{4}{3}}(\mathscr{F}_T;\mathbb{R}^2)$.

Or nous avons le résultat suivant d'existence de solutions régulières au système (V.22)-(V.28).

Lemme 2 ([76]). *Il existe une unique solution de* (V.22)-(V.27) *sur* $[0,T]$ *avec données initiales nulles qui satisfait*

$$v \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;W^{2,\frac{4}{3}}(\mathscr{F}(t))), \quad (\partial_t v, \nabla q) \in L^{\frac{4}{3}}(\mathscr{F}_T;\mathbb{R}^4), \quad (\mathfrak{l},\mathfrak{r}) \in W^{1,\frac{4}{3}}((0,T);\mathbb{R}^3).$$

Le Lemme 2 est une adaptation de [62, Théorème 2.4].

Finalement nous prouvons un résultat d'unicité pour les solutions faibles du système (V.22)-(V.28) de telle sorte que $(\mathfrak{l},\mathfrak{r},v)$ satisfait donc aussi les estimées données par le Lemme 2, ce qui termine la preuve de la Proposition 8. □

V.1.2.2 Méthode d'énergie

Revenons maintenant à la preuve du Théorème 18. Considérons (ℓ_1,r_1,u_1) et (ℓ_2,r_2,u_2) deux solutions au sens du Théorème 17 sur $[0,T]$. Les quantités qui leur sont respectivement associées comme précédemment sont elles-aussi affublées d'un indice 1 ou 2.

Montrons que ces deux solutions coïncident au moins quand T est petit.

Définissons

$$\tilde{u}_2(t,x) := [d\varphi_t(x)]^{-1} \cdot u_2(t,\varphi_t(x)), \; x \in \mathscr{F}_1(t),$$

qui est à divergence nulle sur $\mathscr{F}_1(t)$; ceci est une conséquence du fait que φ_t préserve le volume.

Définissons

$$\tilde{p}_2(t,x) := p_2(t,\varphi_t(x)), \; x \in \mathscr{F}_1(t), \;\text{ et }\; \tilde{\ell}_2 := d(\tau_1 \circ \tau_2^{-1}) \cdot \ell_2 = Q_1 \cdot Q_2^{-1} \cdot \ell_2,$$

et

$$\hat{u}(t,x) := u_1(t,x) - \tilde{u}_2(t,x) \;\text{ et }\; \hat{p}(t,x) := p_1(t,x) - \tilde{p}_2(t,x) \text{ dans } \mathscr{F}_1(t), \tag{V.29}$$

$$\hat{h} := h_1 - h_2, \; \hat{\theta} := \theta_1 - \theta_2, \; \hat{\ell} := \ell_1 - \tilde{\ell}_2 \;\text{ et }\; \hat{r} := r_1 - r_2. \tag{V.30}$$

Nous réécrivons alors l'équation de Navier-Stokes pour ces nouvelles inconnues puis nous prenons la différence avec celle satisfaite par (ℓ_1,r_1,u_1). Cela donne :

$$\partial_t \hat{u} + (u_1 \cdot \nabla)\hat{u} + (\hat{u} \cdot \nabla)\tilde{u}_2 + \nabla \hat{p} - \Delta \hat{u} = \tilde{f} \;\text{ dans }\; \mathscr{F}_1(t), \tag{V.31}$$

où la i-ème composante de $\tilde{f}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{f}^i \;=\; & (\partial_k\varphi^i - \delta_{ik})\partial_t\tilde{u}_2^k + \partial_k\varphi^i\,\partial_l\tilde{u}_2^k(\partial_t\psi^l) + (\partial_k\partial_t\varphi^i)\tilde{u}_2^k + (\partial_{kl}^2\varphi^i)(\partial_t\psi^l)\,\tilde{u}_2^k \\ & + \tilde{u}_2^l\,\partial_l\tilde{u}_2^k(\partial_k\varphi^i - \delta_{ik}) + (\partial_{lk}^2\varphi^i)\,\tilde{u}_2^l\,\tilde{u}_2^k + \partial_k\tilde{p}_2\,(\partial_i\psi^k - \delta_{ik}) \\ & - \partial_j\psi^m(\partial_{mk}^2\varphi^i)\,\partial_l\tilde{u}_2^k\,\partial_j\psi^l - (\partial_k\varphi^i\partial_j\psi^m\partial_j\psi^l - \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{jl})\partial_{ml}^2\tilde{u}_2^k - \partial_k\varphi^i\,\partial_l\tilde{u}_2^k(\partial_j^2\psi^l) \\ & - \partial_j\psi^m(\partial_{mlk}^3\varphi^i)\,\partial_j\psi^l\,\tilde{u}_2^k - (\partial_{lk}^2\varphi^i)\,\partial_{jj}^2\psi^l\,\tilde{u}_2^k - (\partial_{lk}^2\varphi^i)\,\partial_j\psi^l\,\partial_j\psi^m\,\partial_m\tilde{u}_2^k. \end{aligned}$$

On peut être un peu pessimiste face à tous ces termes mais le point positif est que tous les facteurs entre parenthèses sont petits (disons en norme C^1) quand $\|\varphi_t - \mathrm{Id}\|_{C^3(\overline{\Omega})} + \|\partial_t\varphi_t\|_{C^1(\overline{\Omega})}$ est petit.

D'un autre côté, nous avons les conditions aux bords et les équations solides suivantes :

$$\hat{u} = \hat{\ell}(t) + \hat{r}(t)(x - h_1(t))^\perp \;\text{ pour }\; x \in \partial\mathscr{S}_1(t), \tag{V.32}$$

$$\hat{u} = 0 \;\text{ pour }\; x \in \partial\Omega, \tag{V.33}$$

$$m\hat{\ell}' = -\int_{\partial\mathscr{S}_1(t)} \Sigma(\hat{u},\hat{p})n_1\,ds + m\hat{r}\tilde{\ell}_2^\perp, \tag{V.34}$$

$$\mathscr{J}\hat{r}'(t) = -\int_{\partial\mathscr{S}_1(t)} \Sigma(\hat{u},\hat{p})n_1 \cdot (x - h_1(t))^\perp\,ds. \tag{V.35}$$

Multiplions maintenant (V.31) par $\hat{u}$ et intégrons sur $\mathscr{F}_1(t)$, nous en déduisons que pour presque tout t,

$$\int_{\mathscr{F}_1(t)} (\partial_t\hat{u} + (u_1\cdot\nabla)\hat{u})\cdot\hat{u}\,dx + \int_{\mathscr{F}_1(t)} \hat{u}\cdot(\hat{u}\cdot\nabla)\tilde{u}_2\,dx + \int_{\mathscr{F}_1(t)} \hat{u}\cdot\nabla\hat{p}\,dx - \int_{\mathscr{F}_1(t)} \hat{u}\cdot\Delta\hat{u}\,dx = \int_{\mathscr{F}_1(t)} \hat{u}\cdot\tilde{f}\,dx. \tag{V.36}$$

Ceci peut sembler formel mais cette procédure peut être rigoureusement justifiée notamment grâce à la régularité obtenue dans la Proposition 8. Mais

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{F}_1(t)} (\partial_t\hat{u} + (u_1\cdot\nabla)\hat{u})\cdot\hat{u}\,dx \;&=\; \frac{d}{dt}\int_{\mathscr{F}_1(t)} \frac{|\hat{u}|^2}{2}\,dx, \\ \int_{\mathscr{F}_1(t)} \hat{u}\cdot\nabla\hat{p}\,dx - \int_{\mathscr{F}_1(t)} \hat{u}\cdot\Delta\hat{u}\,dx \;&=\; 2\int_{\mathscr{F}_1(t)} D(\hat{u}):D(\hat{u})\,dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(m|\hat{\ell}|^2 + \mathscr{J}|\hat{r}|^2\big) - m\hat{r}\hat{\ell}\cdot\tilde{\ell}_2^\perp, \end{aligned} \tag{V.37}$$

grâce à (V.34)-(V.35). Le dernier terme dans le membre droite de (V.37) n'est pas difficile à estimer.

Maintenant pour le second terme, nous procédons comme dans la preuve de Leray pour un fluide seul, en utilisant que

$$\left| \int_{\mathscr{F}_1(t)} \hat{u} \cdot (\hat{u} \cdot \nabla)\tilde{u}_2 \, dx \right| \leqslant \|\nabla \tilde{u}_2\|_{L^2} \|\hat{u}\|_{L^4}^2 \leqslant C \|\nabla \tilde{u}_2\|_{L^2}^2 \|\hat{u}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla \hat{u}\|_{L^2}^2,$$

où les normes sont sur $\mathscr{F}_1(t)$.

Pour ce qui est du terme de droite dans (V.36), nous obtenons après quelques inégalités qu'il existe $C > 0$ ne dépendant que de la géométrie tel que

$$\left| \int_0^T \int_{\mathscr{F}_1(t)} \hat{u} \cdot \tilde{f} \, dx dt \right| \leqslant \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\mathscr{F}_1(t)} |\nabla \hat{u}|^2 \, dx dt + C \int_0^T \mathscr{B}(t) \Big[\max_{\tau \in [0,t]} \|\hat{u}(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathscr{F}_1(t))}^2 + \max_{[0,t]} |(\hat{h}, \hat{\theta}, \hat{\ell}, \hat{r})|^2 \Big] \, dt. \quad \text{(V.38)}$$

où

$$\mathscr{B}(t) := \|\tilde{u}_2\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathscr{F}_1(t)))} (1 + \|\nabla \tilde{u}_2(t,\cdot)\|_{L^2(\mathscr{F}_1(t))}) + \|\tilde{u}_2\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathscr{F}_1(t)))}^{1/2} \|\nabla \tilde{u}_2(t)\|_{L^2(\mathscr{F}_1(t))}^{1/2} \|t \nabla \tilde{u}_2(t)\|_{L^4(\mathscr{F}_1(t))}$$
$$+ \big(\|t \partial_t \tilde{u}_2\|_{L^{4/3}(\mathscr{F}_1(t))} + \|t \tilde{u}_2\|_{W^{2,4/3}(\mathscr{F}_1(t))} + \|t \nabla \tilde{p}_2\|_{L^{4/3}(\mathscr{F}_1(t))} \big)^{4/3} \in L^1(0,T).$$

Finalement il reste à absorber les termes en $\nabla \hat{u}$ par le premier terme du membre de droite de (V.37) (puisque $\int_{\mathscr{F}_1(t)} |\nabla \hat{u}|^2 \, dx \leqslant 2 \int_{\mathscr{F}_1(t)} |D(\hat{u})|^2 \, dx$), et à intégrer en temps pour déduire que pour $T > 0$ assez petit,

$$m |\hat{\ell}(T)|^2 + \mathscr{J} |\hat{r}(T)|^2 + \|\hat{u}(T)\|_{L^2(\mathscr{F}_1(T))}^2 \leqslant C \int_0^T \mathscr{B}(t) \Big[\max_{\tau \in [0,t]} \|\hat{u}(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathscr{F}_1(t))}^2 + \max_{[0,t]} |(\hat{h}, \hat{\theta}, \hat{\ell}, \hat{r})(t)|^2 \Big] \, dt.$$

Observons alors que

$$\frac{d}{dt} \big(|\hat{h}|^2 + |\hat{\theta}|^2 \big) \leqslant C \big(|\hat{\ell}|^2 + |\hat{r}|^2 + |\hat{h}|^2 + |\hat{\theta}|^2 \big).$$

Nous concluons alors par le lemme de Gronwall.

V.2 Cas des équations d'Euler

Considérons maintenant le cas des équations d'Euler, en commençant par l'étude des solutions classiques.

V.2.1 Solutions classiques

Nous avons dans le cas présent d'un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ un résultat analogue au résultat donné dans Théorème 5 dans le cas d'un domaine non borné. Introduisons

$$\tilde{C}_\sigma^{l,\lambda}(\mathscr{F}_0, h_0) := \Big\{ (\ell_0, r_0, u_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times C^{l,\lambda}(\mathscr{F}_0) \Big/ \operatorname{div} u_0 = 0 \text{ dans } \mathscr{F}_0,$$
$$u_0 \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } u_0 \cdot n = (\ell_0 + r_0 \wedge (x - h_0)) \cdot n \text{ sur } \partial\mathscr{S}_0 \Big\}.$$

Théorème 19 ([78])**.** *Soit $(l, \lambda) \in \mathbb{N} \times (0,1)$ et un sous-ensemble borné régulier connexe $\mathscr{S}_0 \subset \Omega$. Soit $\rho_{\mathscr{S}_0} \in L^\infty(\mathscr{S}_0)$ une fonction strictement positive. Notons m la masse, h_0 la position du centre de gravité de $\mathscr{S}_0$, $\mathscr{J}_0$ la matrice d'inertie initiale et $\mathscr{F}_0 := \Omega \setminus \mathscr{S}_0$. Alors il existe une constante $C_* = C_*(\Omega, \mathscr{S}_0, \rho_{\mathscr{S}_0}) > 0$ telle que ce qui suit est vrai. Soit (ℓ_0, r_0, u_0) dans $\tilde{C}_\sigma^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}_0, h_0)$. Alors il existe*

$$T > T_*(\Omega, \mathscr{S}_0, \rho_{\mathscr{S}_0}, \|u_0\|_{C^{1,\lambda}(\mathscr{F}_0)} + \|\ell_0\| + \|r_0\|) := \frac{C_*}{\|u_0\|_{C^{1,\lambda}(\mathscr{F}_0)} + \|\ell_0\| + \|r_0\|}, \quad \text{(V.39)}$$

tel que le système "Euler+solide" :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0 \quad pour \quad x \in \mathscr{F}(t), \tag{V.40}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad pour \quad x \in \mathscr{F}(t), \tag{V.41}$$

$$u \cdot n = u_{\mathscr{S}} \cdot n \quad pour \quad x \in \partial \mathscr{S}(t), \tag{V.42}$$

$$u \cdot n = 0 \quad pour \quad x \in \partial \Omega, \tag{V.43}$$

$$mh''(t) = \int_{\partial \mathscr{S}(t)} p n \, ds, \tag{V.44}$$

$$(\mathscr{J} r)'(t) = \int_{\partial \mathscr{S}(t)} p\,(x - h(t)) \wedge n \, ds, \tag{V.45}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \;\; h|_{t=0} = h_0, \;\; h'|_{t=0} = \ell_0, \;\; r|_{t=0} = r_0. \tag{V.46}$$

admette une unique solution

$$(h, r, u) \in C^1([0,T]) \times C([0,T]) \times L^\infty([0,T]; C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}(t))).$$

De plus $(h,r) \in C^2([0,T]) \times C^1([0,T])$*,* $u \in C_w([0,T]; C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}(t)))$ *et* $u \in C([0,T]; C^{l+1,\lambda'}(\mathscr{F}(t)))$*, pour* $\lambda' \in (0, \lambda)$ *; et la même chose est vraie pour* $\partial_t u$ *au lieu de* u *avec* l *à la place de* $l+1$*.*

Insistons sur le fait que le temps de vie donné par (V.39) ne dépend que de la norme $C^{1,\lambda}(\mathscr{F}_0)$, quelle que soit la valeur de l dans $\mathbb{N}$. Cependant le temps de vie peut être aussi limité par la géométrie, en particulier par une collision entre le solide et le bord extérieur $\partial\Omega$. En fait en dimension deux une telle collision est la seule limitation possible du temps de vie des solutions classiques.

Le résultat ci-dessus est extrait de l'appendice de l'article [78] écrit en collaboration avec Olivier Glass et Takéo Takahashi. Notons que dans [92] Houot, San Martin et Tucsnak avaient obtenu un résultat similaire dans des espaces de type Sobolev, par une méthode différente.

Il serait intéressant de savoir s'il est possible de montrer un résultat comparable dans le cas d'un fluide compressible, et toujours non visqueux, de sorte que l'on doive considérer les équations d'Euler compressible plutôt que leur version incompressible. Le problème rentre alors dans la catégorie des problèmes mixtes hyperboliques caractéristiques qui sont maintenant bien compris au moins pour le cas d'un bord fixe notamment grâce aux travaux de Schochet [146] et de Guès [83]. Ici il s'agit d'un problème à frontière libre mais indéformable.

Ebauche de preuve de Théorème 19. Un point clé est encore une fois d'utiliser le phénomène de masse ajoutée pour en quelques sorte "trigonaliser" le système composé des différents ordres en temps des dynamiques du fluide et du solide. Ici nous exploitons ce phénomène d'une manière un peu différente de ce qui a pu être fait dans les chapitres précédents.

Préliminairement nous introduisons une fonction ρ_Ω définie dans un voisinage de $\partial\Omega$ comme la distance signée à $\partial\Omega$, négative à l'intérieur de Ω. Introduisons aussi une fonction $\rho_{\mathscr{S}(t)}$ définie dans un voisinage de la frontière du bord du solide $\partial\mathscr{S}(t)$ comme la distance signée à $\partial\mathscr{S}(t)$ positive à l'intérieur de $\mathscr{S}(t)$.

Observons que la pression du fluide p peut se réécrire sous la forme suivante (où encore une fois $\ell(t) := h'(t)$),

$$\nabla p = \nabla \mu - \nabla \left(\left(\Phi_i \right)_{i=1\ldots6} \cdot \begin{bmatrix} \ell \\ r \end{bmatrix}' \right), \tag{V.47}$$

où Φ_i et μ sont les solutions de :

$$\begin{cases} -\Delta\Phi_i = 0 & \text{dans } \mathscr{F}(t), \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = K_i & \text{sur } \partial\mathscr{S}(t), \end{cases} \quad \text{avec} \quad K_i := \begin{cases} n_i & \text{si } i = 1,2,3, \\ [(x - h(t)) \wedge n]_{i-3} & \text{si } i = 4,5,6, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta\mu = \operatorname{tr}\{\nabla u \cdot \nabla u\} & \text{pour } x \in \mathscr{F}(t), \\ \frac{\partial \mu}{\partial n} = -\nabla^2 \rho_\Omega(u,u) & \text{pour } x \in \partial\Omega, \\ \frac{\partial \mu}{\partial n} = \nabla^2 \rho_{\mathscr{S}(t)} \{u - u_{\mathscr{S}}, u - u_{\mathscr{S}}\} - n \cdot \big(r \wedge (2u - u_{\mathscr{S}} - \ell)\big), & \text{pour } x \in \partial\mathscr{S}(t). \end{cases}$$

Les fonctions Φ_i ci-dessus sont les potentiels de Kirchhoff dans le cas borné, à comparer avec ceux déjà introduits en (II.10)-(II.12) dans le cas d'un domaine non borné.

Les équations du solide peuvent alors être réécrites sous la forme

$$\mathscr{M} \begin{bmatrix} \ell \\ r \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 \\ (\mathscr{J} r) \wedge r \end{bmatrix} + \left[\int_{\mathscr{F}(t)} \nabla\mu \cdot \nabla\Phi_i \, dx \right]_{i \in \{1,\ldots,6\}}, \tag{V.48}$$

où

$$\mathscr{M}(t) := \begin{bmatrix} m\,\mathrm{Id}_3 & 0 \\ 0 & \mathscr{J} \end{bmatrix} + \left[\int_{\mathscr{F}(t)} \nabla\Phi_i \cdot \nabla\Phi_j \, dx \right]_{i,j\in\{1,\ldots,6\}}.$$

De plus la matrice de masse ajoutée $\mathscr{M}$ est symétrique définie positive. Notons que comme dans la Section II.1.2 la matrice de masse ajoutée dépend de la masse, de l'inertie et de la géométrie mais aussi ici du temps à travers cette dernière.

Puisqu'il n'y a plus de dérivée en temps dans le membre de droite de (V.48) cela nous suggère de considérer l'évolution du fluide comme un problème auxiliaire à résoudre pour comprendre la dynamique du solide. Nous procédons donc en deux temps : nous étudions d'abord le problème avec le mouvement du solide prescrit, puis nous reviendrons à l'étude de l'équation du solide (V.48).

Nous commençons par montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème avec le mouvement du solide prescrit.

Proposition 9 ([78]). *Soit $l \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (0,1)$, $T_1 > 0$ et un fermé régulier connexe $\mathscr{S}_0 \subset \Omega$. Alors il existe une constante $C_* = C_*(\Omega, \mathscr{S}_0) > 0$ telle que l'on a ce qui suit. Soit $(\ell, r) \in C^0([0,T_1];\mathbb{R}^6)$ tel que*

$$\text{pour tout } t \in [0,T_1], \quad d(\tau^{\ell,r}(t)[\mathscr{S}_0], \partial\Omega) > 0. \tag{V.49}$$

Soit u_0 dans $C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}_0)$ tel que

$$\operatorname{div} u_0 = 0 \text{ dans } \mathscr{F}_0, \quad u_0 \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad \text{et } u_0 \cdot n = [\ell_0 + r_0 \wedge (x - h_0)] \cdot n \text{ sur } \partial\mathscr{S}_0. \tag{V.50}$$

Alors pour

$$T = \min\left(T_1, \frac{C_*}{\|u_0\|_{C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}_0)} + \|(\ell,r)\|_{C^0([0,T];\mathbb{R}^6)}} \right), \tag{V.51}$$

le problème (V.40)-(V.46) *(où la position du solide $\mathscr{S}(t)$ est associée à (ℓ,r) et donc prescrite) admet une unique solution u dans $L^\infty(0,T;C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}(t)))$, qui de plus est $C_w([0,T];C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}(t)))$, et on a une propriété similaire pour $\partial_t u$ avec l au lieu de $l+1$.*

Ebauche de preuve de Proposition 9. Nous utilisons le transport de la vorticité et le théorème de point fixe de Banach-Picard. Plus précisément nous introduisons l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathscr{C} := \Big\{ \eta \in C^0([0,T];C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}_0;\mathbb{R}^3)) \ \Big/ \\ &\text{i. } \forall t \in [0,T],\ \eta(t,\cdot) \text{ est un difféomorphisme qui préserve le volume de } \overline{\mathscr{F}_0} \text{ vers } \overline{\mathscr{F}(t)}, \\ &\quad \text{applique } \partial\Omega \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \partial\mathscr{S}_0 \text{ sur } \partial\mathscr{S}(t), \\ &\text{ii. } \|\eta - \mathrm{Id}\|_{C^0([0,T];C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}_0))} \leqslant \frac{1}{2} \Big\},\end{aligned}$$

et nous considérons l'application $\mathscr{T} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ suivante. Etant donné $\eta \in \mathscr{C}$, définissons $\omega : \mathscr{F}_T \to \mathbb{R}^3$ par

$$\omega(t,x) = (\nabla\eta)(t,\eta^{-1}(t,x)) \cdot \omega_0(\eta^{-1}(t,x)), \tag{V.52}$$

où $\omega_0 := \operatorname{rot} u_0$ est la vorticité initiale dans $\mathscr{F}_0$. Rappelons que la notation $\mathscr{F}_T$ est définie en (V.21). Notons de même $\partial\mathscr{S}_T := \cup_{t\in[0,T]} \{t\} \times \partial\mathscr{S}(t)$.

Ensuite nous définissons le champ de vitesses $u : \mathscr{F}_T \to \mathbb{R}^3$ comme la solution du système div-rot suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} u = \omega \text{ dans } \mathscr{F}_T, \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \mathscr{F}_T, \\ u \cdot n = 0 \text{ sur } [0,T] \times \partial\Omega, \\ u \cdot n = u_{\mathscr{S}} \cdot n \text{ sur } \partial\mathscr{S}_T, \\ \oint_{\eta(\Gamma_i)} u \cdot d\tau = \oint_{\Gamma_i} u_0 \cdot d\tau \text{ pour tout } i = 1 \ldots g, \end{cases}$$

Enfin définissons le flot $\tilde{\eta}(t,x)$ associé à u, qui pour chaque t envoie $\mathscr{F}_0$ sur$\mathscr{F}(t)$. Posons alors

$$\mathscr{T}(\eta) := \tilde{\eta}. \tag{V.53}$$

Quelques inégalités, qui reposent essentiellement sur la règle de Faà di Bruno, permettent de montrer que $\mathscr{T}$ est contractant pour des temps assez petit. $\square$

Ensuite nous montrons que la vitesse lagrangienne de la solution de Proposition 9 dépend de manière Lipschitz du mouvement solide prescrit.

Proposition 10 ([78])**.** *Il existe $K>0$ tel que pour (ℓ_1,r_1), (ℓ_2,r_2) dans $C^0([0,T_1];\mathbb{R}^6)$ satisfaisant* (V.49)*, $\ell_1(0)=\ell_2(0)$, $r_1(0)=r_2(0)$, et $\|(\ell_1,r_1)\|_{C^0([0,T];\mathbb{R}^6)}$, $\|(\ell_2,r_2)\|_{C^0([0,T];\mathbb{R}^6)}\leqslant M$, pour tout $u_0\in C^{l+1,r}(\mathscr{F}_0)$ satisfaisant* (V.50) *(avec à la fois (ℓ_1,r_1) et (ℓ_2,r_2)), on a ce qui suit. Soit u_1, u_2 les solutions correspondantes données par la Proposition 9 sur $[0,T]$ avec*

$$T=\min\left(T_1,\frac{C_*}{\|u_0\|_{C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}_0)}+M}\right), \tag{V.54}$$

et η^1, η^2 les flots associés. Alors on a

$$\|\eta_1-\eta_2\|_{L^\infty([0,T];C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}_0))}+T\|u_1(t,\eta_1(t,x))-u_2(t,\eta_2(t,x))\|_{L^\infty([0,T];C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}_0))}\leqslant KT\|(\ell_1,r_1)-(\ell_2,r_2)\|_{C^0([0,T];\mathbb{R}^6)}. \tag{V.55}$$

Cette dernière proposition permet d'utiliser une seconde fois le théorème de point fixe de Banach-Picard pour traiter cette fois la dynamique du solide.

Introduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{D}:=\Big\{(\ell,r)\in C^0([0,T];\mathbb{R}^6)\ \Big/\ & \\ &\text{i. } \tau^{\ell,r} \text{ satisfait } d\left(\tau^{\ell,r}(t)(\mathscr{S}_0),\partial\Omega\right)\geqslant\frac{d}{3},\\ &\text{ii. } \|(\ell,r)-(\ell_0,r_0)\|_{C^0([0,T];\mathbb{R}^6)}\leqslant\|u_0\|_{C^{l+1,r}}+\|(\ell_0,r_0)\|_{\mathbb{R}^6}\Big\}.\end{aligned}$$

et l'opérateur $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{D}$ défini de la façon suivante. A $(\ell,r)\in\mathscr{D}$, nous associons $Q(t)$, $\mathscr{S}(t)$ et $\mathscr{F}(t)$ comme au début du chapitre. Considérons $\eta\in C^0([0,T];C^{l+1,r}(\mathscr{F}_0))$ donné par Proposition 9, et les fonctions u, $\mathscr{J}$, $(\Phi_i)_{i=1\dots6}$, μ et $\mathscr{M}(t)$ associées. Alors nous définissons $\mathscr{A}(\ell,r):=(\tilde{\ell},\tilde{r})$ comme

$$\begin{bmatrix}\tilde{\ell}\\ \tilde{r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ell_0\\ r_0\end{bmatrix}+\int_0^t\mathscr{M}^{-1}(s)\left\{\begin{bmatrix}0\\ \mathscr{J}(s)r(s)\wedge r(s)\end{bmatrix}+\left[\int_{\mathscr{F}(t)}\nabla\mu\cdot\nabla\Phi_i\,dx\right]_{i\in\{1,\dots,6\}}\right\}ds, \tag{V.56}$$

de sorte qu'un point fixe donne bien une solution au problème. Le caractère contractant de l'opérateur $\mathscr{A}$ en temps petit découle essentiellement de la Proposition 10.

□

En fait nous obtenons aussi avec cette méthode un résultat sur la dépendance continue des solutions par rapport aux données initiales. Pour l'énoncer, introduisons pour $R>0$,

$$\tilde{C}^{l,\lambda}_{\sigma,R}(\mathscr{F}_0,h_0):=\left\{(\ell_0,r_0,u_0)\in\tilde{C}^{l,r}_{\sigma}(\mathscr{F}_0,h_0)\ \Big/\ \|u_0\|_{C^{l,\lambda}(\mathscr{F}_0)}+\|\ell_0\|+\|r_0\|<R\right\}. \tag{V.57}$$

Proposition 11. *Soit $R>0$. Dans le contexte du Théorème 19, considérons (ℓ_0^1,r_0^1,u_0^1) et (ℓ_0^2,r_0^2,u_0^2) dans $\tilde{C}^{l+1,\lambda}_{\sigma,R}(\mathscr{F}_0,h_0)$. Soit $T=T_*(\Omega,\mathscr{S}_0,\rho_{\mathscr{S}_0},R)$. Considérons (ℓ^1,r^1,u^1) et (ℓ^2,r^2,u^2) les solutions correspondantes du système "Euler+solide" dans $[0;T]$, et soit η_1 et η_2 les flots associés respectivement à u^1, u^2. Alors pour un $K=K(\Omega,\mathscr{S}_0,\rho_{\mathscr{S}_0},R)>0$ on a*

$$\begin{aligned}\|\eta_1-\eta_2\|_{L^\infty(0,T;C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}_0))}+\|u_1(t,\eta_1(t,\cdot))-u_2(t,\eta_2(t,\cdot))\|_{L^\infty(0,T;C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}_0))}+\|(\ell_1,r_1)-(\ell_2,r_2)\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^6)}\\ \leqslant K\Big[\|\ell_0^1-\ell_0^2\|+\|r_0^1-r_0^2\|+\|u_0^1-u_0^2\|_{C^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}_0)}\Big].\end{aligned}$$

V.2.2 Une interprétation en terme de géodésique

Avec Olivier Glass nous montrons dans [74] que les solutions classiques de la section précédente peuvent aussi être pensées comme les géodésiques d'une variété de dimension infinie, au sens où elles sont les points critiques d'une action, qui est l'intégrale en temps de l'énergie cinétique totale du système. En fait, l'inspiration provient d'un papier célèbre d'Arnold [6] où il souligne que les équations d'Euler pour un corps solide ou pour un fluide parfait incompressible peuvent être dérivées par cette approche.

Le mouvement d'un corps rigide dans un repère attaché à son centre de masse peut être considéré comme une géodésique sur le groupe spécial orthogonal $SO(3)$. Le flot τ associé au champ de vecteurs vitesse v d'un corps rigide peut être vu comme une fonction C^1 du temps à valeurs dans le groupe spécial euclidien $SE(3)$. Etant donné h dans $\mathbb{R}^3$, l'espace tangent en $\mathrm{Id}\in SE(3)$ est

$$\mathfrak{se}(3)=\left\{v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\ \Big/\ \exists(\ell,r)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R}^3,\ v(x)=\ell+r\times(x-h)\right\}.$$

De plus étant donné h dans $\mathbb{R}^3$ et $v\in\mathfrak{se}(3)$, la paire (ℓ,r) ci-dessus est unique. Ainsi $\mathfrak{se}(3)\sim\mathbb{R}^3\times\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$, où $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices antisymétriques réelles 3 par 3.

Par conséquent l'espace tangent à $SE(3)$ en $\tau \in SE(3)$ est $T_\tau SE(3) := \Big\{ v \circ \tau \text{ avec } v \in \mathfrak{se}(3) \Big\}$. Par suite, h_0 étant donné, à $\sigma = v \circ \tau \in T_\tau SE(3)$ associons $(L_\tau[\sigma], R_\tau[\sigma])$ l'unique paire (ℓ, r) associée à v avec $h := \tau(h_0)$, autrement dit :

$$\sigma(\tau^{-1}(x)) = v(x) = L_\tau[\sigma] + R_\tau[\sigma] \times (x - \tau(h_0)).$$

D'un autre coté le mouvement d'un fluide parfait incompressible remplissant un conteneur Ω peut être considéré comme une équation géodésique sur l'espace $\text{Sdiff}^+(\Omega)$ des difféomorphismes de Ω qui préservent le volume et l'orientation. En effet à un champ de vecteurs vitesse u solution classique des équations d'Euler incompressible dans Ω nous associons le flot η défini sur $[0,T] \times \Omega$ par (I.16). Le flot η est une fonction continue du temps à valeurs dans l'espace $\text{Sdiff}^+(\Omega)$. Ce dernier a une structure de variété riemannienne de dimension infinie quand nous le munissons de la métrique donnée par plongement dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$, et l'espace tangent en $\eta \in \text{Sdiff}^+(\Omega)$ est

$$T_\eta \ \text{Sdiff}^+(\Omega) := \Big\{ u \circ \eta \text{ avec } u \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \ / \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega, \ u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \Big\}.$$

Les équations d'Euler sont alors interprétées comme une équation géodésique sur $\text{Sdiff}^+(\Omega)$. Le champ de pression est alors vu comme un multiplicateur de Lagrange correspondant à la contrainte de divergence nulle de la vitesse. Ebin et Marsden ont montré dans [52] l'existence de géodésiques quand la vitesse initiale est dans l'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$, $s > \frac{5}{2}$.

Il est donc naturel d'essayer d'étendre cette analyse à un système d'interaction entre un fluide parfait et un corps solide. Dans des cas particuliers, quand le fluide est irrotationnel ou quand la vorticité du fluide est donnée par un nombre fini de points vortex, ceci a été fait dans les articles [162, 163] ; voir aussi les références citées dans ces articles.

Le but ici est de montrer que l'on peut encore voir le mouvement d'un corps rigide dans un fluide parfait incompressible comme une géodésique, en présence de vorticité distribuée. Commençons par définir la variété sur laquelle les géodésiques vont être considérées.

Tout d'abord définissons l'ensemble des configurations possibles du système pour un temps fixé par

$$\mathscr{C} := \Big\{ \ (\tau, \eta) \in SE(3) \times C^{1,\lambda}(\mathscr{F}_0; \mathbb{R}^3) \text{ tel que } \tau(\mathscr{S}_0) \subset \Omega, \ \eta \text{ est un difféomorphisme qui préserve le volume et l'orientation de } \mathscr{F}_0 \to \Omega \setminus [\tau(\mathscr{S}_0)] \Big\}.$$

Représentons (τ, η) par $\phi : \Omega \to \Omega$ tel que $\phi_{|\mathscr{S}_0} = \tau$ et $\phi_{|\mathscr{F}_0} = \eta$. Notons que ϕ n'est pas nécessairement continu.

De plus $\mathscr{C}$ est une sous-variété d'une variété modelée sur l'espace de Banach $E := \mathfrak{se}(3) \times C^{1,\lambda}(\mathscr{F}_0; \mathbb{R}^3)$. Pour décrire son espace tangent introduisons la notation suivante : étant donné $(\tau, \eta) \in \mathscr{C}$ et $\mu \in C^{1,\lambda}(\mathscr{F}_0; \mathbb{R}^3)$, nous introduisons $U_\eta[\mu] : \eta(\mathscr{F}_0) \to \mathbb{R}^3$ par $U_\eta[\mu] := \mu \circ \eta^{-1}$, et nous notons $h := \tau(h_0)$, $\mathscr{S} := \tau(\mathscr{S}_0)$ et $\mathscr{F} := \Omega \setminus \mathscr{S}$.

Alors, en utilisant à nouveau la Proposition 1, nous montrons que

$$T_{(\tau,\eta)}\mathscr{C} = \Big\{ (\sigma, \mu) \in T_\tau SE(3) \times C^{1,\lambda}(\mathscr{F}_0; \mathbb{R}^3) \text{ tel que } \operatorname{div} U_\eta[\mu] = 0 \text{ dans } \mathscr{F}, \ U_\eta[\mu](x) \cdot n(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ U_\eta[\mu](x) \cdot n(x) = (L_\tau[\sigma] + R_\tau[\sigma] \times (x - h)) \cdot n(x) \text{ sur } \partial\mathscr{S} \Big\}.$$

Le point le plus délicat est de montrer que $T_{(\tau,\eta)}\mathscr{C}$ contient l'ensemble du membre de droite. Représentons (σ, μ) par $\mathscr{U} \circ \phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ où $\mathscr{U} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est donné par $\mathscr{U}_{|\mathscr{S}} \circ \tau = \sigma$ et $\mathscr{U}_{|\mathscr{F}} = U_\eta[\mu]$.

La variété $\mathscr{C}$ est munie de la métrique Riemannienne : pour tout $\phi \in \mathscr{C}$, pour tout $\mathscr{U}_1 \circ \phi$, $\mathscr{U}_2 \circ \phi \in T_\phi \mathscr{C}$,

$$\langle \mathscr{U}_1 \circ \phi, \mathscr{U}_2 \circ \phi \rangle_\phi := \int_\Omega \rho_0(\phi^{-1}) \, \mathscr{U}_1 \cdot \mathscr{U}_2 \, dx.$$

Ici la densité ρ_0 est définie sur Ω par $\rho_0(x) = 1$ dans $\mathscr{F}_0$, et $\rho_{\mathscr{S}_0}(x)$ dans $\mathscr{S}_0$.

Remarquons que cette métrique définit une topologie plus faible sur $\mathscr{C}$ que l'originale.

Considérons maintenant la dépendance en temps. Etant donné (τ_0, η_0) et (τ_1, η_1) dans $\mathscr{C}$ nous introduisons

$$\mathscr{L} := \big\{ (\tau, \eta) \in C^1([0,T]; \mathscr{C}) \text{ tel que } \tau(0) = \tau_0, \ \eta(0) = \eta_0, \ \tau(T) = \tau_1 \text{ et } \eta(T) = \eta_1 \big\}.$$

Il est facile de vérifier que $\mathscr{L}$ est une sous-variété d'une variété modelée sur l'espace de Banach $E_T := C^1([0,T]; \mathfrak{se}(3)) \times C^{1,\lambda}([0,T] \times \mathscr{F}_0; \mathbb{R}^3)$.

Soit $(\tau,\eta)\in\mathscr{L}$ et $h(t):=\tau_t(h_0)$, $\mathscr{S}(t):=\tau_t(\mathscr{S}_0)$ et $\mathscr{F}(t):=\Omega\setminus\mathscr{S}(t)$. L'espace tangent à $\mathscr{L}$ en (τ,η) est

$$\begin{aligned}T_{(\tau,\eta)}\mathscr{L}=\Big\{(\sigma,\mu)\in C^1([0,T];T_{\tau_t}SE(3))\times C^{1,\lambda}([0,T]\times\mathscr{F}_0;\mathbb{R}^3)\text{ tel que }\sigma(0)=\sigma(T)=0\text{ et }\mu(0)=\mu(T)=0,\\ \operatorname{div}U_\eta[\mu]=0\text{ dans }\mathscr{F}(t)\text{ pour chaque }t\in[0,T],\\ U_\eta[\mu]\cdot n=(L_\tau[\sigma]+R_\tau[\sigma]\times[x-h(t)])\cdot n\text{ sur }\partial\mathscr{S}(t)\text{ pour chaque }t\in[0,T],\\ U_\eta[\mu]\cdot n=0\text{ sur }\partial\Omega\text{ pour chaque }t\in[0,T]\Big\}.\end{aligned}$$

Observons que les extrémités de la courbe étant prescrites les champs σ et μ s'annulent quand $t=0$ ou T.

Comme précédemment nous représentons $(\tau,\eta)\in\mathscr{L}$ par $\phi:[0,T]\times\Omega\to\Omega$ tel que pour tout $t\in[0,T]$,

$$\phi(t,\cdot)|_{\mathscr{S}_0}=\tau(t,\cdot)\quad\text{et}\quad\phi(t,\cdot)|_{\mathscr{F}_0}=\eta(t,\cdot).$$

Représentons $(\sigma,\mu)\in T_{(\tau,\eta)}\mathscr{L}$ par $\mathscr{U}\circ\phi:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^3$ où $\mathscr{U}:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^3$ est donné, pour tout $t\in[0,T]$, par

$$\mathscr{U}(t,\cdot)|_{\mathscr{S}(t)}\circ\tau(t,\cdot)=\sigma(t,\cdot)\quad\text{et}\quad\mathscr{U}(t,\cdot)|_{\mathscr{F}(t)}=U_\eta[\mu](t,\cdot).$$

Nous allons maintenant définir les géodésiques comme points critiques de l'action suivante sur la variété $\mathscr{L}$:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\phi):=\frac12\int_{[0,T]\times\Omega}\rho_0|\partial_t\phi|^2\,dx\,dt&=\frac12\int_{[0,T]}\langle\partial_t\phi(t,\cdot),\partial_t\phi(t,\cdot)\rangle_{\phi(t,\cdot)}\,dt\\&=\int_{[0,T]}\big(\mathscr{E}_{\mathscr{S}}(t)+\mathscr{E}_{\mathscr{F}}(t)\big)dt,\end{aligned}$$

avec les notations de (I.5) et de (I.12). Du plus, puisque l'action est une forme quadratique continue sur $\mathscr{L}$, nous en déduisons que $\mathscr{A}$ est différentiable sur $\mathscr{L}$ avec

$$D\mathscr{A}(\phi)\cdot(\mathscr{U}\circ\phi)=\int_{[0,T]\times\Omega}\rho_0\,\partial_t\phi\cdot\partial_t(\mathscr{U}\circ\phi)\,dx\,dt=\int_{[0,T]}\langle\partial_t\phi(t,\cdot),\partial_t(\mathscr{U}\circ\phi)(t,\cdot)\rangle_{\phi(t,\cdot)}\,dt.$$

Ceci conduit naturellement à la définition suivante.

Définition 7. *On dit que $\phi\in\mathscr{L}$ est une géodésique sur $\mathscr{L}$ si pour tout $\mathscr{U}\circ\phi\in T_\phi\mathscr{L}$, $D\mathscr{A}(\phi)\cdot(\mathscr{U}\circ\phi)=0$.*

Le résultat principal de cette section est alors le suivant.

Théorème 20 ([74])**.** *On a l'équivalence suivante : (u,h,r) est une solution classique de la formulation EDP sur $[0,T]$ si et seulement si (τ,η) est une géodésique sur $\mathscr{L}$.*

Remarque 1. *Définissons la longueur d'une courbe $\phi\in\mathscr{L}$ par $\Lambda(\phi):=\int_{[0,T]}(\langle\partial_t\phi(t,\cdot),\partial_t\phi(t,\cdot)\rangle_{\phi(t,\cdot)})^{\frac12}\,dt$, et considérons $d:=\inf\Lambda(\phi)$, où l'infimum est pris sur $\phi=(\tau,\eta)\in\mathscr{L}$. On dit que d est la distance géodésique entre les configurations (τ_0,η_0) et (τ_1,η_1) de $\mathscr{C}$. Si $(\tau,\eta)\in\mathscr{L}$ réalise cet infimum et est paramétré par t de telle sorte que l'énergie ne dépende pas du temps alors (τ,η) minimise aussi l'action $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{L}$. Réciproquement, par conservation de l'énergie, toute géodésique est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc.*

Mentionnons ici deux problèmes ouverts.

Est-il possible de prouver que pour tout T assez petit et $(\tau,\eta)\in\mathscr{L}$ tel que le triplet (u,h,r) associé est une solution classique de la formulation EDP sur $[0,T]$, on a que $(\tilde\tau,\tilde\eta)\in\mathscr{L}$, $\mathscr{A}(\tau,\eta)\leqslant\mathscr{A}(\tilde\tau,\tilde\eta)$, avec égalité si et seulement si $(\tilde\tau,\tilde\eta)=(\tau,\eta)$? Ceci étendrait le résultat obtenu par Brenier cf. [18] dans le cas d'un fluide sans solide immergé.

Est-il possible d'adapter la stratégie qu'Ebin et Marsden utilisent dans [52] dans le cas d'un fluide seul au cas d'un solide immergé, c'est-à-dire de prouver l'existence d'une connexion sans torsion et de géodésiques au sens du transport parallèle, et alors de prouver que ces solutions satisfont aussi la formulation EDP ?

Mentionnons aussi les liens avec les propriétés de stabilité du système. Dans le cas d'un fluide seul, Arnold [6] utilise la notion de courbure riemannienne pour analyser la stabilité des flots stationnaires en dimension 2. Dans le cas considéré ici où un solide est immergé dans le fluide, la stabilité a été étudiée par Ilin et Vladimirov [166, 167].

V.2.3 Solutions à la Yudovich

Dans le cas de la dimension 2, nous avons vu dans la section consacrée à l'analyse du problème de Cauchy en domaine non borné qu'il est possible de définir des solutions avec une régularité plus faible. Nous nous restreignons à l'étude des solutions à la Yudovich dont nous montrerons l'existence et l'unicité dans le cas où le domaine occupé par le système est borné.

Théorème 21 ([76]). *Pour tout* $u_0 \in C^0(\overline{\mathscr{F}_0};\mathbb{R}^2)$, $(\ell_0, r_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, *vérifiant* (V.13) *et* (II.50) *il existe* $T > 0$ *et une unique solution*

$$(\ell, r, u) \in C^1([0,T];\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) \times [L^\infty(0,T;\mathscr{L}\mathscr{L}(\mathscr{F}(t))) \cap C^0([0,T];W^{1,q}(\mathscr{F}(t)))], \quad \forall q \in [1,+\infty),$$

de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0 \quad pour \quad x \in \mathscr{F}(t), \tag{V.58}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad pour \quad x \in \mathscr{F}(t), \tag{V.59}$$

$$u \cdot n = u_{\mathscr{S}} \cdot n \quad pour \quad x \in \partial \mathscr{S}(t), \tag{V.60}$$

$$u \cdot n = 0 \quad pour \quad x \in \partial \Omega, \tag{V.61}$$

$$m\ell'(t) = \int_{\partial \mathscr{S}(t)} p n \, ds, \tag{V.62}$$

$$\mathscr{J} r'(t) = \int_{\partial \mathscr{S}(t)} p\,(x - h(t))^\perp \cdot n \, ds, \tag{V.63}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \ \ell|_{t=0} = \ell_0, \ r|_{t=0} = r_0. \tag{V.64}$$

La pression p *est déterminée uniquement, à une fonction dépendante seulement du temps près, par* (ℓ, r, u) *comme une fonction de* $L^\infty(0,T;H^1(\mathscr{F}(t)))$*, ce qui donne en particulier un sens aux membres de droite de* (V.62)-(V.63)*. De plus si* $T < +\infty$ *est maximal, alors*

$$\operatorname{dist}(\mathscr{S}(t), \partial\Omega) \to 0 \ quand\ t \to T^-.$$

La structure de la preuve de la partie existence est assez proche de celle du Théorème 19 : nous utilisons successivement deux fois un théorème de point fixe, une première fois pour une version simplifiée du problème où le mouvement du solide est prescrit, puis une seconde fois pour la dynamique du solide, réécrite de façon à tenir compte du phénomène de masse ajoutée (la version 2d de (V.48)). Cependant comme la régularité est ici plus faible que dans les hypothèses du Théorème 19, il semble difficile d'appliquer le théorème de Banach-Picard. Nous lui substituons le théorème de Schauder. Comme celui-ci ne donne qu'un résultat d'existence, la partie unicité requiert un argument extérieur.

Plus précisément,

- Nous considérons d'abord le cas où le mouvement du solide est prescrit. Dans ce cas l'existence de solutions à la Yudovich est prouvée par une application du théorème de point fixe de Schauder sur ω. L'unicité est montrée en suivant la méthode utilisée par Yudovich dans le cas d'un bord fixe.
- Nous prouvons ensuite que ces solutions dépendent continûment dans C^0 du mouvement du solide.
- Enfin l'existence de solutions à la Yudovich pour le problème complet est prouvée par une seconde application du théorème de point fixe de Schauder, cette fois sur (ℓ, r).

Pour l'unicité, nous procédons comme dans la section V.1.2 avec les estimations a priori suivantes qui découlent du transport de la vorticité et de la conservation de l'énergie : pour tout t,

$$\forall q \in [2,\infty], \quad \|\operatorname{rot} u(t,\cdot)\|_{L^q(\mathscr{F}(t))} = \|\operatorname{rot} u_0\|_{L^q(\mathscr{F}_0)},$$
$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathscr{F}(t))} + m|\ell(t)|^2 + \mathscr{J}|r(t)|^2 = \|u_0\|^2_{L^2(\mathscr{F}_0)} + m|\ell_0|^2 + \mathscr{J}|r_0|^2.$$

Nous pouvons alors en déduire par régularité elliptique une estimée de $\|u(t,\cdot)\|_{W^{1,q}(\mathscr{F}(t))}$ pour tout $t \in [0,T]$ (avant collision) et pour tout $q \in [2,\infty)$. Nous devons aussi prendre en compte les circulations autour des composantes connexes, qui sont conservées par le théorème de Kelvin. Ensuite nous utilisons une nouvelle fois l'effet de masse ajoutée pour obtenir une borne, uniforme sur $[0,T]$, de

$$\|u(t)\|_{H^1(\mathscr{F}(t))} + \|\partial_t u\|_{L^2(\mathscr{F}(t))} + \|\nabla p\|_{L^2(\mathscr{F}(t))}.$$

Armé de ces estimations a priori nous utilisons alors la même stratégie que dans la preuve du Théorème 19 : nous utilisons le changement de variable d'Inoue-Wakimoto puis une méthode d'énergie.

V.2.4 Perspectives

Mentionnons ici une perspective de travail dans le prolongement des travaux présentés dans ce chapitre. Il s'agirait de s'intéresser à un modèle de poisson en train de nager dans un fluide supposé non visqueux où le mouvement du poisson est décomposé en un déplacement rigide, qui résulte de l'interaction avec le fluide, et une déformation prescrite donnée. Ce modèle, avec les équations de Navier-Stokes au lieu de celles d'Euler, a été étudié dans [144]. Il serait intéressant de voir si les travaux ci-dessus peuvent se prolonger de façon à couvrir le cas d'un poisson nageant dans un fluide parfait. Dans le cas où le fluide est irrotationel on dispose déjà des travaux [29, 24, 131, 132].

Une autre perspective concerne la contrôlabilité exacte d'un solide immergé dans un fluide parfait incompressible en deux dimensions d'espace, lorsque la circulation autour du solide est non nulle. Dans le cas d'un fluide parfait incompressible seul, sans corps solide en mouvement, la contrôlabilité exacte est maintenant bien comprise, au moins pour ce qui est des solutions classiques (cf. [35], [70]) : on peut par exemple, avec un contrôle au bord, atteindre n'importe quel état final en partant d'une donnée initiale arbitraire. Nous faisons ici référence au champ de vitesse mais la question se pose aussi naturellement pour un ensemble de particules du fluide que l'on voudrait emmener d'un endroit à un autre. Cette dernière question, qui relève davantage du point de vue lagrangien de la mécanique des fluides, a été notamment traitée avec succès dans les articles [71] et [72]. Aussi il est naturel de se demander s'il est possible, avec un contrôle au bord, d'emmener un solide d'un endroit à un autre du fluide dans lequel il est immergé. On peut même se demander s'il est possible de lui faire parcourir une trajectoire donnée. Avec cette généralité cette question semble épineuse. On peut cependant espérer pouvoir traiter le cas de petits solides, avec une méthode perturbative, en s'appuyant sur le cas limite de solides ponctuels et les résultats présentés dans le chapitre IV. La contrôlabilité du système limite est elle aussi un problème ouvert, mais espèrons-le plus simple, et pourrait peut-être servir de point d'appui.

Chapitre VI

Régularité des trajectoires du système "Euler+solide"

Dans ce dernier chapitre nous nous intéressons à une propriété qualitative des solutions du système "Euler+solide", plus exactement à la régularité des trajectoires. Nous nous restreignons ici pour la clarté de la présentation au cas où le système "fluide+solide" occupe un domaine borné fixe. Aussi comme le système "Euler+solide" est réversible nous donnons dans ce chapitre des énoncés qui portent sur des intervalles de temps de type $(-T,T)$ plutôt que $[0,T]$. Cela nous permet de parler d'analyticité sur un intervalle ouvert, ce qui est peut-être plus classique.

Nous traitons dans un premier temps le cas des solutions classiques en dimension 3 puis le cas des solutions à la Yudovich en dimension 2. Dans les deux cas nous commençons par étudier la régularité des trajectoires des particules d'un fluide parfait incompressible remplissant un domaine borné fixe, d'abord sans solide immergé en mouvement, puis avec un tel solide, auquel cas nous étudions aussi la régularité de la trajectoire du solide.

Un certain nombre de résultats mentionnés ici ont été obtenus avec Olivier Glass et Takéo Takahashi dans [78], avec Olivier Glass dans [75] et seul dans [155].

VI.1 Le cas des solutions classiques

C'est le premier cas que nous envisagons avec Olivier Glass et Takéo Takahashi dans l'article [78]. Au départ, nous savions notamment grâce à des travaux de Chemin [26], [27], de Serfati [149], [148], [150], et de Gamblin [61] que, pour les solutions classiques des équations d'Euler incompressible dans $\mathbb{R}^3$, les trajectoires des particules sont analytiques en temps. Il était alors tentant d'espérer qu'un solide immergé se comporte de la même manière, bien qu'il ne soit pas ponctuel et possède une masse strictement positive. C'est le pari qui a conduit à l'écriture de [78]. La première étape a consisté à étudier la régularité des trajectoires d'un fluide parfait incompressible remplissant un domaine régulier borné. C'est ce que nous allons voir dans la section suivante.

VI.1.1 Le cas d'un fluide seul

Commençons par considérer un fluide parfait incompressible remplissant un domaine régulier borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec un bord imperméable $\partial\Omega$, de sorte que la vitesse $u(t,x)$ et le champ de pression $p(t,x)$ satisfont les équations d'Euler (I.35)–(I.38). Nous avons rappelé cf. Section I.2.3 que l'existence (localement en temps) et l'unicité de solutions classiques à ce problème sont bien connues. Le premier résultat de ce chapitre montre que la régularité des trajectoires de ces solutions n'est limitée que par la régularité du bord.

Théorème 22 ([78]). *Sous les hypothèses du Théorème 1, et supposant en plus que $\partial\Omega$ est $C^{k+l+1,\lambda}$, avec $k \in \mathbb{N}$, le flot η défini par* (I.16) *est C^k de $(-T,T)$ vers $C^{l+1,\lambda}(\Omega)$. Si le bord $\partial\Omega$ est analytique (respectivement Gevrey d'ordre $M > 1$) alors η est analytique (respectivement Gevrey d'ordre $M > 1$) de $[-T,T]$ vers $C^{l+1,\lambda}(\Omega)$.*

En quelque sorte le Théorème 22 interpole des résultats antérieurs de Chemin [26], [27], Serfati [149], [148], [150], et Gamblin [61] qui prouvent l'analyticité du flot d'un fluide remplissant tout l'espace et un résultat de Kato [104] qui prouve le caractère C^∞ des trajectoires d'un fluide remplissant un domaine borné.

D'ailleurs, comme le souligne Kato (cf. Example 0.2 dans [104]) la régularité des trajectoires ne peut être obtenue que sous une certaine forme de contrainte globale, à savoir la condition (I.10) dans le cas présent où le domaine est borné. Dans le cas non borné il faudrait imposer des conditions sur le comportement à l'infini de u ou de p (voir par exemple Gamblin [61] qui considére des vitesses initiales u_0 qui sont dans $L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $1 < q < +\infty$, en plus d'être dans $C^{l+1,\lambda}$).

L'approche de Gamblin, suivant celle de Chemin, utilise une représentation de la pression par un opérateur intégral singulier, et repose sur l'action répétée de la dérivée matérielle [1]

$$D := \partial_t + (u \cdot \nabla).$$

En revanche l'approche de Kato pour les domaines bornés repose sur l'action répétée de la dérivée matérielle sur des opérateurs différentiels, l'aspect non-local des équations d'Euler incompressible étant traité par un lemme de régularité elliptique pour le système div-rot satisfait par le champ eulérien de vitesse. C'est cette dernière approche que nous suivons ici, en raffinant l'aspect combinatoire des opérations différentielles, motivé par les résultats obtenus dans le cas d'un fluide remplissant tout l'espace.

Ebauche de preuve. Nous considérons une solution u lisse. Le résultat portant sur les solutions $L^\infty(-T,T;C^{l+1,\lambda}(\Omega))$ est ensuite obtenu par régularisation, les estimées ne dépendant que de la norme dans cet espace.

Nous observons, en dérivant (I.16), que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\partial_t^{k+1}\eta(t,x) = (D^k u)(t,\eta(t,x))$$

si bien que le résultat se déduira, par composition, d'une estimée du type suivant : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|D^k u\|_{L^\infty(-T,T;C^{l+1,\lambda}(\Omega))} \leqslant k!\,L^k \|u\|^{k+1}_{L^\infty(-T,T;C^{l+1,\lambda}(\Omega))},$$

pour un $L > 0$ assez grand ne dépendant que de la géométrie.

Commençons par expliquer le cas $k = 1$. Avec $Du = -\nabla p$, $\operatorname{div} u = 0$ dans Ω, et $u \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ nous pouvons voir que Du satisfait le système elliptique div-rot :

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}(Du) = 0 \text{ et } \operatorname{div}(Du) = \operatorname{tr}(\nabla u \cdot \nabla u) \quad \text{dans } \Omega,\\ Du \cdot n = -\nabla^2 \rho_\Omega(u,u) \quad \text{sur } \partial\Omega,\end{gathered}$$

où $\operatorname{tr}(\cdot)$ désigne la trace d'une matrice et ρ_Ω est la fonction définie au début de l'ébauche de preuve du Théorème 1.

Si Ω n'est pas simplement connexe, nous ajoutons pour « fermer » le système div-rot, les conditions suivantes de circulation :

$$\int_{\Gamma_i} (\nabla p) \cdot d\tau = 0 \quad \text{pour } i = 1,\ldots,g,$$

où $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_g$ est une famille indépendante de courbes de Jordan engendrant le groupe fondamental de Ω.

Dans tous les cas nous obtenons par régularité elliptique que $Du \in C^{l+1,\lambda}(\Omega)$ et

$$\|Du\|_{L^\infty(-T,T;C^{l+1,\lambda}(\Omega))} \leqslant C \|u\|^2_{L^\infty(-T,T;C^{l+1,\lambda}(\Omega))}.$$

Nous souhaitons maintenant réitérer la démarche précédente. Pour cela, nous étudions le système div-rot appliqué à $D^2 u$. Nous utilisons alors les règles de commutation :

$$\begin{gathered}\operatorname{div} D\psi - D \operatorname{div}\psi = \operatorname{tr}\{(\nabla u)\cdot(\nabla\psi)\} \text{ et } \operatorname{rot} D\psi - D\operatorname{rot}\psi = \operatorname{as}\{(\nabla u)\cdot(\nabla\psi)\} \text{ dans } \Omega,\\ (D\psi)\cdot n = D(n\cdot\psi) - \nabla^2\rho_\Omega\{u,\psi\} \text{ dans un voisinage de } \partial\Omega,\end{gathered}$$

où ψ est un champ de vecteurs régulier jusqu'au bord, $\operatorname{as}(\cdot)$ désigne la partie antisymétrique d'une matrice et $\operatorname{rot}\psi$ est ici considérer en tant que matrice.

Nous obtenons alors pour D^2u le système elliptique div-rot suivant :

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}(D^2u) = \operatorname{as}\{(\nabla u)\cdot(\nabla Du)\} \text{ dans } \Omega,\\ \operatorname{div}(D^2u) = -D\operatorname{tr}(\nabla u\cdot\nabla u) + \operatorname{tr}\{(\nabla u)\cdot(\nabla Du)\} \text{ dans } \Omega,\\ (D^2u)\cdot n = -D[\nabla^2\rho_\Omega(u,u)] - \nabla^2\rho_\Omega(u,Du) \text{ sur } \partial\Omega,\end{gathered}$$

et si Ω n'est pas simplement connexe, nous utilisons que $D^2u = -D\nabla p = -\nabla Dp - \nabla u \cdot \nabla p$ pour obtenir les identités suivantes sur les circulations :

$$\int_{\Gamma_i} D^2u \cdot d\tau = \int_{\Gamma_i} (\nabla u \cdot Du)\cdot d\tau \text{ pour } i = 1,\ldots,g.$$

Nous avons donc avec les estimées précédentes pour $k = 1$ et la règle de Leibniz une inégalité de la forme :

$$\|D^2u\|_{L^\infty(-T,T;C^{l+1,\lambda}(\Omega))} \leqslant C\|u\|^3_{L^\infty(-T,T;C^{l+1,\lambda}(\Omega))},$$

1. Insistons donc sur le fait que dans la suite Du désigne donc la dérivée matérielle de u et non le tenseur de déformation $D(u)$ défini en (I.11).

Nous itérons ensuite le procédé dans le cadre d'une récurrence.

Pour cela, posons

$$\mathscr{A}_k := \{(s,\alpha)\ /\ 2 \leqslant s \leqslant k+1 \text{ et } \alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_s) \in \mathbb{N}^s /\ |\alpha| = k+1-s\}$$

et pour $(s,\alpha) \in \mathscr{A}_k$,

$$f(s,\alpha)[u] := \nabla D^{\alpha_1} u \cdot \ldots \cdot \nabla D^{\alpha_s} u \text{ et } h(s,\alpha)[u] := \nabla^s \rho_\Omega \{D^{\alpha_1} u, \dots, D^{\alpha_s} u\}.$$

Nous avons alors pour pour $k \in \mathbb{N}^*$, les identités formelles suivantes : dans Ω

$$\operatorname{div} D^k u = \operatorname{tr}\left\{F^k[u]\right\} \quad \text{où} \quad F^k[u] := \sum_{(s,\alpha)\in\mathscr{A}_k} c_k^1(s,\alpha)\, f(s,\alpha)[u],$$
$$\operatorname{rot} D^k u = \operatorname{as}\left\{G^k[u]\right\} \quad \text{où} \quad G^k[u] := \sum_{(s,\alpha)\in\mathscr{A}_k} c_k^2(s,\alpha)\, f(s,\alpha)[u],$$

et sur le bord $\partial\Omega$:

$$n \cdot D^k u = H^k[u] \quad \text{où} \quad H^k[u] := \sum_{(s,\alpha)\in\mathscr{A}_k} c_k^3(s,\alpha)\, h(s,\alpha)[u],$$

où les $c_k^i(s,\alpha)$ sont des entiers satisfaisant

$$|c_k^i(s,\alpha)| \leqslant \frac{k!}{\alpha!} \text{ pour } i = 1,2, \text{ et } |c_k^3(s,\alpha)| \leqslant \frac{k!}{\alpha!(s-1)!}.$$

Si Ω n'est pas simplement connexe, nous utilisons que :

$$D^{k+1} u + \nabla D^k p = -\sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} \nabla D^{r-1} u \cdot D^{k+1-r} u,$$

nous intégrons sur les Γ_i et nous utilisons les relations connues à l'ordre k.

Cela permet alors de propager l'hypothèse de récurrence de l'ordre k à l'ordre $k+1$, pour une constante L assez grande (ne dépendant que de la géométrie).

□

Dans le cas où la frontière est analytique, nous pouvons déduire du Théorème 22 que le flot dépend régulièrement de la donnée initiale. Plus précisément, nous introduisons, pour tout $R > 0$,

$$C^{l+1,\lambda}_{\sigma,R}(\Omega) := \left\{u \in C^{l+1,\lambda}_{\sigma}(\Omega) \ \Big/\ \|u\|_{C^{l+1,\lambda}(\Omega)} < R\right\}, \tag{VI.1}$$

et nous avons alors le résultat suivant.

Corollaire 3 ([78]). *Soit l dans $\mathbb{N}$, $\lambda \in (0,1)$ et $R > 0$. Supposons que $\partial\Omega$ est analytique. Alors l'application*

$$u_0 \in C^{l+1,\lambda}_{\sigma,R}(\Omega) \mapsto \eta \in C^\omega((-T_*,T_*); C^{l+1,\lambda}(\Omega))$$

est C^∞, où $T_* = T_*(\Omega,R)$ est donné par Théorème 1.

Cela découle essentiellement de la représentation du flot comme somme de sa série de Taylor et du théorème de différentiation terme à terme.

VI.1.2 Le cas avec un solide immergé

Considérons maintenant le cas où un solide est immergé dans un fluide parfait incompressible homogène qui occupe un domaine borné Ω.

Nous introduisons, pour $T > 0$, $l \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in (0,1)$,

$$\mathscr{A}^{l,\lambda}_{\mathscr{S}_0}(T) := C^\omega((-T,T); SE(3) \times C^{l,\lambda}(\mathscr{F}_0;\mathbb{R}^3))$$

l'espace des fonctions réelles analytiques de $[0,T]$ à valeurs dans $SE(3) \times C^{l,\lambda}(\mathscr{F}_0;\mathbb{R}^3)$.

Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 23 ([78]). *Supposons que les bords $\partial\Omega$ et $\partial\mathscr{S}_0$ sont analytiques et que les hypothèses du Théorème 19 sont satisfaites. Alors $(\tau,\eta) \in \mathscr{A}^{l+1,\lambda}_{\mathscr{S}_0}(T)$.*

En fait la preuve de ce théorème montre que le mouvement du solide et les trajectoires des particules du fluide sont au moins aussi régulières que les bords $\partial\Omega$ et $\partial\mathscr{S}_0$. Il est donc possible d'énoncer des variantes du Théorème 23 avec une régularité limitée, à l'instar de ce que nous avions fait dans le Théorème 22.

Nous pouvons aussi déduire facilement du Théorème 23 que l'énergie du fluide $\mathscr{E}_{\mathscr{F}}(t)$ (cf. (I.5)) est analytique sur $(-T,T)$, alors que l'énergie totale du système $\mathscr{E}_{\mathscr{F}}(t)+\mathscr{E}_{\mathscr{S}}(t)$ est constante, où l'énergie du solide $\mathscr{E}_{\mathscr{S}}(t)$ est définie en (I.5).

Ebauche de preuve. Expliquons brièvement la méthode de preuve du Théorème 23 qui est assez technique. Evidemment nous adaptons la méthode de preuve du Théorème 22, en y incluant la dynamique du solide. Plus précisément nous prouvons par récurrence que pour tout k,

$$\|D^k u\|_{L^\infty(C^{l+1,\lambda})} + \|\ell^{(k)}\|_{L^\infty} + \|r^{(k)}\|_{L^\infty} \leqslant \frac{k!L^k}{(k+1)^2}(\|u\|_{L^\infty(C^{l+1,\lambda})} + \|\ell\|_{L^\infty} + \|r\|_{L^\infty})^{k+1},$$

pour L assez grand ne dépendant que de la géométrie (le facteur $\frac{1}{(k+1)^2}$ est essentiellement technique : il facilite certains aspects combinatoires de la preuve).

Nous considérons un intervalle de temps où $\mathsf{dist}(\mathscr{S}(t),\partial\Omega) \geqslant \underline{d} > 0$ et nous montrons alors que pour les diverses positions du solide ayant cette distance minimale, la constante dans l'estimée sur le système elliptique div-rot est uniforme (on demande éventuellement aux courbes Γ_i engendrant le groupe fondamental du domaine de « suivre » la géométrie). Lorsque nous supposons l'estimée vraie jusqu'au rang k et que nous cherchons à l'obtenir au rang $k+1$, nous procédons de la façon suivante.

Nous commençons par chercher à estimer $\ell^{(k+1)}$ et $r^{(k+1)}$. Pour cela nous dérivons l'équation (V.48) :

$$\mathscr{M}\begin{bmatrix}\ell\\ r\end{bmatrix}^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\mathscr{M}^{(j)}\begin{bmatrix}\ell\\ r\end{bmatrix}^{(k-j+1)} + \begin{bmatrix}0\\ \mathscr{J} r\wedge r\end{bmatrix}^{(k)} + \left[\int_{\mathscr{F}(t)} \nabla\mu\cdot\nabla\Phi_i\, dx\right]^{(k)}_{i\in\{1,\dots,6\}}.$$

Les termes de droite s'estiment à l'aide des $(\ell^{(j)},r^{(j)})$ pour $j\leqslant k$ et des $\|D^j\nabla\Phi_i\|_{L^\infty(C^{l+1,\lambda})}$ et $\|D^j\nabla\mu\|_{L^\infty(C^{l+1,\lambda})}$.

Nous utilisons sur ceux-ci le système div-rot, et des identités formelles, pour ψ un champ de vecteurs défini dans le domaine fluide, portant sur :

- $\mathrm{div}(D^k\psi)$, $\mathrm{rot}(D^k\psi)$ dans $\mathscr{F}(t)$ (qui ressemblent à celles de $\mathrm{div}(D^k u)$, $\mathrm{rot}(D^k u)$ dans le cas du fluide seul),
- $(D^k\psi)\cdot n$ sur $\partial\Omega$ (idem),
- $(D^k\psi)\cdot n$ sur $\partial\mathscr{S}(t)$ qui ressemblent aux précédentes mais sont un peu compliquées par la dynamique du solide.

Une fois obtenues les estimées sur $\ell^{(k+1)}$ et $r^{(k+1)}$, nous cherchons à obtenir celles sur

$$\begin{aligned} D^{k+1}u &= -D^k\nabla p \\ &= -D^k\nabla\mu + D^k\nabla\left(\left(\Phi_i\right)_{i=1\dots6}\cdot\begin{bmatrix}\ell\\ r\end{bmatrix}'\right), \end{aligned}$$

d'après la décomposition de la pression donnée en (V.47).

Là encore, les termes de droite s'estiment à l'aide des $(\ell^{(j)},r^{(j)})$ pour $j\leqslant k$ et des $\|D^j\nabla\Phi_i\|_{L^\infty(C^{l+1,\lambda})}$ et $\|D^j\nabla\mu\|_{L^\infty(C^{l+1,\lambda})}$. □

Nous avons aussi le corollaire suivant du Théorème 23, qui est l'analogue du Corollaire 3 dans le cas d'un solide immergé.

Corollaire 4 ([78])**.** *Soit $l\in\mathbb{N}$, $\lambda\in(0,1)$, $R>0$ et un sous-ensemble régulier fermé connexe $\mathscr{S}_0\subset\Omega$, une fonction strictement positive $\rho_{\mathscr{S}_0}$ dans $L^\infty(\mathscr{S}_0)$. Supposons que les frontières $\partial\Omega$ et $\partial\mathscr{S}_0$ sont analytiques. Alors l'application*

$$(\ell_0,r_0,u_0)\in\tilde{C}^{l+1,\lambda}_{\sigma,R}(\mathscr{F}_0,h_0)\mapsto(\tau,\eta)\in\mathscr{A}^{l+1,\lambda}_{\mathscr{S}_0}(T_*)$$

est C^∞, où $T_*=T_*(\Omega,\mathscr{S}_0,\rho_{\mathscr{S}_0},R)$ est donné par le Théorème 19 .

Rappelons que la notation $\tilde{C}^{l+1,\lambda}_{\sigma,R}(\mathscr{F}_0,h_0)$ est définie en (V.57). Cet ensemble joue ici le rôle tenu par $C^{l+1,\lambda}_{\sigma,R}(\Omega)$ (cf. (VI.1)) dans le cas d'un fluide seul.

Une conséquence triviale de l'analyticité des trajectoires du solide est que si l'on connait cette trajectoire sur un sous-intervalle $(-t,t)$ de l'intervalle de temps $(-T_*,T_*)$ où la solution est définie, sans connaitre u_0, alors on connait la trajectoire sur l'intervalle de définition tout entier (au sens de la continuation unique). En fait en exploitant les estimations qui conduisent au Théorème 23 nous obtenons une version un peu plus quantitative de cette propriété.

Corollaire 5 ([78])**.** *Soit Ω, $\mathscr{S}_0$, et $\rho_{\mathscr{S}_0}$ comme précédemment. Soit $R > 0$ et $t \in (0, T_*)$, où $T_* := T_*(\Omega, \mathscr{S}_0, \rho_{\mathscr{S}_0}, R)$ est défini dans Théorème 19. Alors il existe $C = C(t, \Omega, \mathscr{S}_0, \rho_{\mathscr{S}_0}, R) > 0$ et $\delta = \delta(t, \Omega, \mathscr{S}_0, \rho_{\mathscr{S}_0}, R)$ dans $(0,1)$ tels que l'assertion suivante soit vraie. Soit (ℓ_0^1, r_0^1, u_0^1) et (ℓ_0^2, r_0^2, u_0^2) dans $\tilde{C}_{\sigma,R}^{l+1,\lambda}(\mathscr{F}_0, h_0)$. On considère les solutions correspondantes, et on désigne par τ_i les flots solides correspondants. Alors on a $\|\tau_1 - \tau_2\|_{L^\infty(-T_*,T_*)} \leqslant C \|\tau_1 - \tau_2\|_{L^\infty(-t,t)}^{\delta}$.*

Insistons sur le fait que les constantes $C > 0$ et $\delta \in (0,1)$ dépendent de la taille de la donnée initiale mais pas de la donnée elle-même.

VI.2 Le cas des solutions à la Yudovich

Nous nous intéressons maintenant au cas des solutions à la Yudovich en dimension 2.

VI.2.1 Le cas d'un fluide seul

Considérons d'abord le cas d'un fluide seul. Nous avons déjà mentionné que l'existence et l'unicité d'une solution aux équations d'Euler (I.35)–(I.38) pour une vorticité initiale bornée ont été obtenus par Yudovich dans [173]. Le flot η correspondant, défini par (I.16), est alors pour tout $t > 0$, dans l'espace de Hölder $C^{0,\exp(-ct\|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)})}(\Omega)$, et un exemple de Bahouri et Chemin [7] montre que cette estimation est optimale.

Le résultat suivant montre en particulier que si le bord $\partial\Omega$ du domaine est C^∞ (respectivement Gevrey d'ordre $M \geqslant 1$) alors les trajectoires des particules du fluide sont C^∞ (resp. Gevrey d'ordre $M+2$) en temps.

Théorème 24 ([155])**.** *Supposons que $\partial\Omega$ est C^∞ (respectivement Gevrey d'ordre $M \geqslant 1$). Alors il existe $c > 0$ tel que pour toute vitesse initiale u_0 dans $L^2(\Omega)$, à divergence nulle et tangente au bord $\partial\Omega$, avec $\omega_0 := \operatorname{rot} u_0 \in L^\infty(\Omega)$, le flot η est, pour tout $\lambda \in (0,1)$, pour tout $T > 0$, C^∞ (resp. Gevrey d'ordre $M+2$) de $(-T,T)$ vers $C^{0,\tilde{\lambda}}(\Omega)$, avec $\tilde{\lambda} := \lambda \exp(-cT\|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)})$.*

Ce résultat étend au cas d'un domaine borné des résultats de Gamblin [61] et Serfati [149], [148], [150] dans le cas d'un fluide occupant le plan tout entier.

Nous constatons dans l'énoncé une perte d'indice Gevrey entre l'hypothèse de régularité du bord et la conclusion concernant la régularité du flot. Notons qu'en particulier, dans le cas $M = 1$, nous avons, si nous supposons que le bord est analytique, que le flot est Gevrey d'ordre 3. C'est d'ailleurs aussi un flot Gevrey d'ordre 3 qu'obtiennent Gamblin et Serfati dans le cas d'un fluide occupant tout le plan. Cependant il n'est pas clair si cette régularité est optimale ou non. Essayons d'expliquer brièvement comment cette perte intervient dans notre preuve. La méthode est une adaptation de celle suivie dans le cas classique : nous estimons par récurrence les dérivées matérielles itérées de la vitesse du fluide à l'aide d'un système div-rot dont les termes sources ont étés justement estimés aux crans précédents. La différence avec le cas classique est que nous ne travaillons plus avec un espace de Hölder mais avec la famille des espaces L^p avec $2 < p < \infty$. En fait l'intégrabilité se dégrade au cours des itérations, à cause d'un manque de stabilité de la régularité à la Yudovich par les opérations algebro-différentielles mises en jeu dans le processus décrit ci-dessus. Il devient alors crucial de connaître la dépendance en p de la constante intervenant dans le lemme de régularité elliptique appliqué au système div-rot, ce qui est donné par la théorie de Calderón-Zygmund. Quand nous estimons la dérivée matérielle itérée d'ordre k, nous ajustons p avec k ce qui induit une perte d'un facteur $(k!)^2$.

Le résultat suivant fait le lien entre le Théorème 24 et le résultat de la section précédente, en montrant qu'une régularité additionnelle locale se propage régulièrement le long des trajectoires.

Théorème 25 ([155])**.** *Considérons les mêmes hypothèses que dans le Théorème 24 et supposons de plus que la restriction $\omega_0|_{\Omega_0}$ est dans $C_{loc}^{l_0,\lambda}(\Omega_0)$, où $l_0 \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in (0,1)$ et Ω_0 est un ouvert tel que $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$. Alors η est, pour tout $T > 0$, pour tout compact $K \subset \Omega_0$, C^∞ (resp. Gevrey d'ordre $M + 2 + (l_0+1)(\lambda+1)$) de $(-T,T)$ vers $C^{l_0+1,\lambda}(K)$.*

Ici la notation $C_{\mathrm{loc}}^{l,\lambda}(\Omega_0)$ désigne les fonctions qui sont dans $C^{l,\lambda}(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Nous constatons dans la partie de l'énoncé du Théorème 25 concernant la régularité Gevrey qu'il y a une perte additionnelle d'indice Gevrey par rapport à l'énoncé du Théorème 24. Là encore, rien ne dit que ce n'est pas seulement une faiblesse de la méthode utilisée, qui consiste à utiliser une famille de compacts emboîtés et des estimées de régularité elliptique intérieure. C'est l'ajustement du nombre de ces compacts avec l'ordre k de dérivation qui fait apparaître une puissance de $k!$ supplémentaire.

En fait nous montrons avec la même méthode, cf. [155], des résultats un peu plus généraux qui englobent les vorticités légèrement non bornées pour lesquelles Yudovich a étendu son analyse dans [174].

Signalons aussi une autre observation de [155] sur l'hypothèse de régularité du bord : celle-ci n'est pas nécessaire si la vorticité est constante dans un voisinage du bord. En effet cette dernière propriété rend quasiment indolore une procédure de cut-off répétée.

VI.2.2 Le cas avec un solide immergé

Considérons pour finir le cas où un solide est immergé dans un fluide. Nous obtenons avec Olivier Glass le résultat suivant.

Théorème 26 ([75])**.** *Sous les hypothèses du Théorème 21, supposons de plus que le bord du solide* $\partial \mathscr{S}_0$ *et le bord extérieur* $\partial\Omega$ *sont* $C^{k+1,\lambda}$*, avec* $k \in \mathbb{N}$ *et* $\lambda \in (0,1)$*. Alors les flots* (τ,η) *sont* C^k *de* $(-T,T)$ *à valeurs* $SE(2) \times C^{0,\exp(-cT\|\omega_0\|_{L^\infty(\mathscr{F}_0)})}(\mathscr{F}_0)$.

Si de plus $\partial \mathscr{S}_0$ *et* $\partial\Omega$ *sont Gevrey d'ordre* $M \geqslant 1$*, alors* (τ,η) *sont Gevrey d'ordre* $M+2$ *de* $(-T,T)$ *à valeurs* $SE(2) \times C^{0,\exp(-cT\|\omega_0\|_{L^\infty(\mathscr{F}_0)})}(\mathscr{F}_0)$.

La preuve de Théorème 26 combine les idées évoquées plus haut au cours des preuves du Théorème 22 et du Théorème 23.

Nous constatons donc que même immergé dans un fluide parfait incompressible avec une vorticité discontinue un solide a une trajectoire très régulière.

Evidemment il serait intéressant de savoir si la régularité obtenue dans le Théorème 26 est optimale ou pas.

Bibliographie

[1] L. Ambrosio. *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields.* Invent. Math. 158(2), 227-260, 2004.

[2] L. Ambrosio et P. Bernard. *Uniqueness of signed measures solving the continuity equation for Osgood vector fields.* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 19(3), 237-245, 2008.

[3] L. Ambrosio, N. Gigli et G. Savaré. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures.* Second edition. Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, 2008.

[4] L. Ambrosio, E. Mainini et S. Serfaty. *Gradient flows of the Chapman-Rubinstein-Schatzman model for signed measures.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 28(2), 217-246, 2011.

[5] V. I. Arnold et B. A. Khesin. *Topological methods in hydrodynamics.* Applied Mathematical Sciences, 125. Springer-Verlag, New York, 1998.

[6] V. I. Arnold. *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16(1), 319-361, 1966.

[7] H. Bahouri et J.-Y. Chemin. *Équations de transport relatives à des champs de vecteurs non-lipschitziens et mécanique des fluides.* Arch. Rational Mech. Anal., 127(2), 159-181, 1994.

[8] C. Baranger et L. Desvillettes. *Coupling Euler and Vlasov equations in the context of sprays : the local-in-time, classical solutions.* J. Hyperbolic Differ. Equ. 3(1), 1-26, 2006.

[9] C. Bardos, F. Golse et L. Paillard. *The incompressible Euler limit of the Boltzmann equation with accommodation boundary condition.* Commun. Math. Sci. 10(1), 159-190, 2012.

[10] C. Bardos et E. S. Titi. *Euler equations for an ideal incompressible fluid.* (Russian) Uspekhi Mat. Nauk 62, no. 3(375), 5-46 ; translation in Russian Math. Surveys 62(3), 409-451, 2007.

[11] C. Bardos et E. Titi. *Loss of smoothness and energy conserving rough weak solutions for the 3d Euler equations.* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 3, 185-197, 2010.

[12] H. Beirao da Veiga et F. Crispo. *A missed persistence property for the Euler equations, and its effect on inviscid limits.* Nonlinearity 25, 1661-1669, 2012.

[13] J. Berkowitz et C. S. Gardner. *On the asymptotic series expansion of the motion of a charged particle in slowly varying fields.* Comm. Pure Appl. Math. 12, 501-512, 1959.

[14] P. Bernard. *Some remarks on the continuity equation.* Séminaire EDP de l'Ecole Polytechnique, 2008-2009.

[15] C. Bjorland. *The vortex-wave equation with a single vortex as the limit of the Euler equation.* Comm. Math. Phys. 305(1), 131-151, 2011.

[16] F. Bouchut. *Renormalized solutions to the Vlasov equation with coefficients of bounded variation.* Arch. Ration. Mech. Anal. 157(1), 75-90, 2001.

[17] Y. Brenier. *Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations.* Comm. Partial Differential Equations 25(3-4), 737-754, 2000.

[18] Y. Brenier. *Topics on hydrodynamics and volume preserving maps.* Handbook of mathematical fluid dynamics. Vol. II, 55-86, 2003.

[19] P. Braasch, G. Rein et J. Vukadinovic. *Nonlinear stability of stationary plasma–an extension of the energy-Casimir method.* SIAM J. Appl. Math. 59(3), 831-844, 1999.

[20] W. Braun et K. Hepp. *The Vlasov dynamics and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles.* Comm. Math. Phys. 56(2), 101-113, 1977.

[21] C. Burch. *The Dini condition and regularity of weak solutions of elliptic equations.* J. Differential Equations. 30(3), 308-323, 1978.

[22] R. Caflisch et G. C. Papanicolaou. *Dynamic theory of suspensions with Brownian effects.* SIAM J. Appl. Math. 43(4), 885-906, 1983.

[23] J.A. Carrillo, R. Duan et A. Moussa. *Global classical solutions close to equilibrium to the Vlasov-Fokker-Planck-Euler system.* Kinet. Relat. Models 4(1), 227-258, 2011.

[24] T. Chambrion et A. Munnier. *Locomotion and control of a self-propelled shape-changing body in a fluid.* J. Nonlinear Sci. 21(3), 325-385, 2011.

[25] M. Chapouly. *On the global null controllability of a Navier-Stokes system with Navier slip boundary conditions.* J. Differential Equations 247(7), 2094-2123, 2009.

[26] J.-Y. Chemin. *Sur le mouvement des particules d'un fluide parfait incompressible bidimensionnel.* Invent. Math. 103(3), 599-629, 1991.

[27] J.-Y. Chemin. *Régularité de la trajectoire des particules d'un fluide parfait incompressible remplissant l'espace.* J. Math. Pures Appl. 71(5), 407-417, 1992.

[28] J.-Y. Chemin. *Fluides parfaits incompressibles.* Astérisque, 230, 1995.

[29] S. Childress. *An introduction to theoretical fluid mechanics.* Courant Lecture Notes in Mathematics, 19. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York ; American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[30] A. Choffrut et V. Šverák. *Local structure of the set of steady-state solutions to the 2D incompressible Euler equations.* Geom. Funct. Anal. 22(1), 136-201, 2012.

[31] T. Clopeau, A. Mikelic et R. Robert. *On the vanishing viscosity limit for the 2D incompressible Navier-Stokes equations with the friction type boundary conditions.* Nonlinearity 11(6), 1625-1636, 1998.

[32] C. Conca, J. A. San Martin et M. Tucsnak. *Existence de solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid.* Comm. Partial Differential Equations 25(5-6), 1019-1042, 2000.

[33] P. Constantin. *On the Euler equations of incompressible fluids.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 44(4), 603-621, 2007.

[34] F. Coron. *Derivation of slip boundary conditions for the Navier-Stokes system from the Boltzmann equation.* J. Statist. Phys. 54(3-4), 829-857, 1989.

[35] J.M. Coron. *Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 317(3), 271-276, 1993.

[36] J.-M. Coron. *On the controllability of the* 2*-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions.* ESAIM Control Optim. Calc. Var. 1, 35-75, 1995/96.

[37] J.-M. Coron. *On the null asymptotic stabilization of the two-dimensional incompressible Euler equations in a simply connected domain.* SIAM J. Control Optim. 37(6), 1874-1896, 1999.

[38] G.-H. Cottet. *Equations de Navier-Stokes dans le plan with tourbillon initial mesure.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 303, 105-108, 1986.

[39] A.-L. Dalibard et D. Gérard-Varet. *Effective boundary condition at a rough surface starting from a slip condition.* J. Differential Equations 251(12), 3450-3487, 2011.

[40] R. Danchin. *Évolution temporelle d'une poche de tourbillon singulière.* Comm. Partial Differential Equations 22(5-6), 685-721, 1997.

[41] M. Dashti et J.C. Robinson. *The motion of a fluid-rigid disc system at the zero limit of the rigid disc radius.* Arch. Ration. Mech. Anal. 200(1), 285-312, 2011.

[42] P. Degond. *Global existence of smooth solutions for the Vlasov-Fokker-Planck equation in* 1 *and* 2 *space dimensions.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 519-542, 1986.

[43] J.-M. Delort. *Existence de nappes de tourbillon en dimension deux.* J. Amer. Math. Soc. 4(3), 553-586, 1991.

[44] B. Desjardins et M. J. Esteban. *On weak solutions for fluid-rigid structure interaction : compressible and incompressible models.* Comm. Partial Differential Equations 25(7-8), 1399-1413, 2000.

[45] B. Desjardins et M. J. Esteban. *Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid.* Arch. Ration. Mech. Anal. 146(1), 59-71, 1999.

[46] L. Desvillettes, F. Golse et V. Ricci. *The mean-field limit for solid particles in a Navier-Stokes flow.* J. Stat. Phys. 131(5), 941-967, 2008.

[47] R. J. DiPerna et P.-L. Lions. *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces.* Invent. Math. 98, 511-547, 1989.

[48] R. J. DiPerna et A. J. Majda. *Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow.* Comm. Pure Appl. Math. 40(3), 301-345, 1987.

[49] R. L. Dobrushin. *Vlasov equations.* Funct. Anal. Appl. 13, 115-123, 1979.

[50] A. Dutrifoy. *Precise regularity results for the Euler equations.* J. Math. Anal. Appl., 282(1), 177-200, 2003.

[51] W. E. *Boundary layer theory and the zero-viscosity limit of the Navier-Stokes equation.* Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 16(2), 207-218, 2000.

[52] D. Ebin et J. Marsden. *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid.* Ann. of Math. 92, 102-163, 1970.

[53] E. Feireisl. *On the motion of rigid bodies in a viscous incompressible fluid. Dedicated to Philippe Bénilan.* J. Evol. Equ. 3(3), 419-441, 2003.

[54] E. Feireisl. *On the motion of rigid bodies in a viscous fluid.* Mathematical theory in fluid mechanics (Paseky, 2001). Appl. Math. 47(6), 463-484, 2002.

[55] E. Feireisl. *On the motion of rigid bodies in a viscous compressible fluid.* Arch. Ration. Mech. Anal. 167(4), 281-308, 2003.

[56] E. Feireisl, M. Hillairet et S. Neçasová. *On the motion of several rigid bodies in an incompressible non-Newtonian fluid.* Nonlinearity 21(6), 1349-1366, 2008.

[57] G. P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations.* Vol. I, Springer, New York, 1994.

[58] I. Gallagher et T. Gallay. *Uniqueness for the two-dimensional Navier-Stokes equation with a measure as initial vorticity.* Math. Ann. 332, 287-327, 2005.

[59] I. Gallagher, T. Gallay et P.-L. Lions. *On the uniqueness of the solution of the two-dimensional Navier-Stokes equation with a Dirac mass as initial vorticity.* Math. Nachr. 278, 1665-1672, 2005.

[60] T. Gallay et Y. Maekawa. *Long-time asymptotics for two-dimensional exterior flows with small circulation at infinity.* Preprint 2012, `arXiv:1202.4969`.

[61] P. Gamblin. *Système d'Euler incompressible et régularité microlocale analytique.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 44(5), 1449–1475, 1994.

[62] M. Geissert, K. Götze et M. Hieber, *Lp-theory for strong solutions to fluid-rigid body interaction in Newtonian and generalized Newtonian fluids.* A paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.

[63] P. Gérard. *Résultats récents sur les fluides parfaits incompressibles bidimensionnels (d'après J.-Y. Chemin et J.-M. Delort).* (French). Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92. Astérisque No. 206, Exp. No. 757, 5, 411-444, 1992.

[64] D. Gérard-Varet et E. Dormy. *On the ill-posedness of the Prandtl equation.* J. Amer. Math. Soc. 23(2), 591-609, 2010.

[65] D. Gérard-Varet et M. Hillairet. *Regularity issues in the problem of fluid structure interaction.* Arch. Ration. Mech. Anal. 195(2), 375-407, 2010.

[66] D. Gérard-Varet et M. Hillairet. *Existence of weak solutions up to collision for viscous fluid-solid systems with slip.* Preprint 2012, `arXiv:1207.0469`.

[67] D. Gérard-Varet et N. Masmoudi. *Relevance of the slip condition for fluid flows near an irregular boundary.* Comm. Math. Phys. 295(1), 99-137, 2010.

[68] Y. Giga, T. Miyakawa, et H. Osada. *Two-dimensional Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity.* Arch. Rational Mech. Anal., 104(3), 223-250, 1988.

[69] D. Gilbarg et N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 224. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[70] O. Glass. *Exact boundary controllability of 3-D Euler equation.* ESAIM Control Optim. Calc. Var. 5, 1-44, 2000.

[71] O. Glass et T. Horsin. *Approximate Lagrangian controllability for the 2-D Euler equation. Application to the control of the shape of vortex patch.* J. Math. Pures Appl. 93(1), 61-90, 2010.

[72] O. Glass et T. Horsin. *Prescribing the motion of a set of particles in a 3D perfect fluid.* Preprint 2011, `arXiv:1108.5019`.

[73] **O. Glass, C. Lacave et F. Sueur.** ***On the motion of a small body immersed in a two dimensional incompressible perfect fluid.*** **Preprint 2011,** `arXiv:1104.5404`**. A paraître dans Bulletin de la SMF.**

[74] **O. Glass et F. Sueur.** ***The movement of a solid in an incompressible perfect fluid as a geodesic flow.*** **Proceedings of the AMS. 140(6), 2155-2168, 2012.**

[75] **O. Glass et F. Sueur.** ***On the motion of a rigid body in a two-dimensional irregular ideal flow.*** **SIAM J. Math. Anal. 44(5), 3101-3126, 2012.**

[76] **O. Glass et F. Sueur.** ***Uniqueness results for weak solutions of two-dimensional fluid-solid systems.*** **Preprint 2012,** `arXiv:1203.2894`**.**

[77] **O. Glass et F. Sueur.** ***Low regularity solutions for the two-dimensional "rigid body + incompressible Euler" system.*** **Preprint 2012,** `hal-00682976`**.**

[78] **O. Glass, F. Sueur et T. Takahashi.** ***Smoothness of the motion of a rigid body immersed in an incompressible perfect fluid.*** **Ann. Sci. École Norm. Sup. Volume 45(1), 1-51, 2012.**

[79] F. Golse. *The mean-field limit for the dynamics of large particle systems.* Journées EDP, Exp. No. IX, 47 pp., Nantes, 2003.

[80] C. Grandmont et Y. Maday. *Existence for an unsteady fluid-structure interaction problem.* M2AN Math. Model. Numer. Anal. 34(3), 609-636, 2000.

[81] E. Grenier. *On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations.* Comm. Pure Appl. Math. 53(9), 1067-1091, 2000.

[82] C. Grotta Ragazzo, J. Koiller et W. M. Oliva. *On the motion of two-dimensional vortices with mass.* Nonlinear Sci., 4(5), 375-418, 1994.

[83] O. Guès. *Problème mixte hyperbolique quasi-linéaire caractéristique.* Comm. Partial Differential Equations 15(5), 595-645, 1990.

[84] N. M. Günther. *Über ein Hauptproblem der Hydrodynamik.* (German) Math. Z. 24(1), 448-499, 1926.

[85] M. Gunzburger, H.-C. Lee et G. A. Seregin. *Global existence of weak solutions for viscous incompressible flows around a moving rigid body in three dimensions.* J. Math. Fluid Mech. 2(3), 219–266, 2000.

[86] Y. Guo et T. T. Nguyen. *A note on the Prandtl boundary layers.* Comm. Pure Appl. Math. , 64(10), 1416-143, 2011.

[87] M. Hauray et P. E. Jabin. *N-particles approximation of the Vlasov equations with singular potential.* Arch. Ration. Mech. Anal. 183(3), 489-524, 2007.

[88] H. Herrero, B. Lucquin-Desreux et B. Perthame. *On the motion of dispersed balls in a potential flow : a kinetic description of the added mass effect.* SIAM J. Appl. Math. 60(1), 61-83, 2000.

[89] T. I. Hesla, *Collisions of Smooth Bodies in Viscous Fluids : A Mathematical Investigation.* PhD thesis, University of Minnesota, revised version. 2005.

[90] M. Hillairet. *Lack of collision between solid bodies in a 2D incompressible viscous flow.* Comm. Partial Differential Equations 32(7-9), 1345-1371, 2007.

[91] K.-H. Hoffmann et V. N. Starovoitov. *On a motion of a solid body in a viscous fluid. Two-dimensional case.* Adv. Math. Sci. Appl. 9(2), 633-648, 1999

[92] J.-G. Houot, J. San Martin et M. Tucsnak. *Existence and uniqueness of solutions for the equations modelling the motion of rigid bodies in a perfect fluid.* J. Funct. Anal. 259(11), 2856-2885, 2010.

[93] D. Iftimie, G. Karch et C. Lacave. *Self-similar asymptotics of solutions to the Navier-Stokes system in two dimensional exterior domain.* Preprint 2012, arXiv :1107.2054v1.

[94] D. Iftimie, M.C. Lopes Filho et H.J. Nussenzveig Lopes. *Two dimensional incompressible ideal flow around a small obstacle.* Comm. Partial Diff. Eqns. 28(1&2), 349-379, 2003.

[95] D. Iftimie et G. Planas. *Inviscid limits for the Navier-Stokes equations with Navier friction boundary conditions.* Nonlinearity 19, 899-918, 2006.

[96] **D. Iftimie et F. Sueur. *Viscous boundary layers for the Navier-Stokes equations with the Navier slip conditions.* Arch. Ration. Mech. Analysis 199, no. 1, 145-175, 2011.**

[97] A. Inoue et M. Wakimoto. *On existence of solutions of the Navier-Stokes equation in a time dependent domain.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 24(2), 303–319, 1977.

[98] P.-E. Jabin et F. Otto. *Identification of the dilute regime in particle sedimentation.* Comm. Math. Phys. 250(2), 415-432, 2004.

[99] P.-E. Jabin et B. Perthame. *Notes on mathematical problems on the dynamics of dispersed particles interacting through a fluid.* Modeling in applied sciences, 111-147, Model. Simul. Sci. Eng. Technol., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.

[100] N. V. Judakov. *The solvability of the problem of the motion of a rigid body in a viscous incompressible fluid (in Russian).* Dinamika Splošn. Sredy 18, 249-253, 1974.

[101] T. Kato. *Remarks on zero viscosity limit for nonstationary Navier-Stokes flows with boundary.* Seminar on nonlinear partial differential equations, 85-98, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 2, 1984.

[102] T. Kato. *On classical solutions of the two-dimensional nonstationary Euler equation.* Arch. Rational Mech. Anal. 25, 188-200, 1967.

[103] T. Kato. *The Navier-Stokes equation for an incompressible fluid in R2 with a measure as the initial vorticity.* Differential Integral Equations, 7(3-4), 949-966, 1994.

[104] T. Kato. *On the smoothness of trajectories in incompressible perfect fluids.* In Nonlinear wave equations (Providence, RI, 1998), volume 263 of Contemp. Math., 109–130. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[105] T. Kato. *Two manuscripts left by late Professor Tosio Kato in his personal computer.* Tosio Kato's method and principle for evolution equations in mathematical physics (1234), 260-274, 2001.

[106] J. Kelliher. *On the flow map for 2D Euler equations with unbounded vorticity.* Nonlinearity 24(9), 2599-2637, 2011.

[107] H. Koch. *Transport and instability for perfect fluids.* Math. Ann. 323(3), 491-523, 2002.

[108] P. Koebe. *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. Math. Z.* 2(1-2), 198–236. 1918.

[109] K. Kikuchi. *Exterior problem for the two-dimensional Euler equation.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 30(1), 63–92, 1983.

[110] M. Kruskal. *The gyration of charged particles.* Advanced Plasma Theory. Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", XXV, 1964.

[111] C. Lacave et E. Miot. *Uniqueness for the vortex-wave system when the vorticity is constant near the point vortex.* SIAM J. Math. Anal. 41(3), 1138-1163, 2009.

[112] J. Leray. *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace.* Acta Math. 63(1), 193-248, 1933.

[113] J. Leray. *Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes de l'hydrodynamique.* J. Maths Pures Appl. 12, 1-82, 1933.

[114] L. Lichtenstein. *Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze. (German)* Math. Z. 23(1), 89-154, 1925.

[115] L. Lichtenstein. *Ergänzungen zu der Abhandlung : "Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze".*(German) Math. Z. 23(1), 310-316, 1925.

[116] L. Lichtenstein. *Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik.* (German) Math. Z. 26(1), 196-323, 1927.

[117] L. Lichtenstein. *Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamic.* (German) Math. Z. 28(1), 387-415, 1928.

[118] L. Lichtenstein. *Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik.* (German) Math. Z. 32(1), 608-640, 1930.

[119] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 3, 1996.

[120] C. C. Lin. *On the Motion of Vortices in Two Dimensions.* University of Toronto Studies, Applied Mathematics Series, no. 5, 1943.

[121] Z. Lin. *Nonlinear instability of periodic BGK waves for Vlasov-Poisson system.* Comm. Pure Appl. Math. 58(4), 505-528, 2005.

[122] G. Loeper. *Uniqueness of the solution to the Vlasov-Poisson system with bounded density.* J. Math. Pures Appl. 86(1), 68-79, 2006.

[123] M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzveig Lopes et Z. Xin. *Existence of vortex sheets with reflection symmetry in two space dimensions.* Arch. Ration. Mech. Anal. 158(3), 235-257, 2001.

[124] M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzveig Lopes et Z. Xin. *Vortex sheets with reflection symmetry in exterior domains.* J. Differential Equations. 229(1), 154-171, 2006.

[125] A. Majda et A. L. Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow.* Cambridge Texts in Applied Mathematics, 27, 2002.

[126] C. Marchioro et M. Pulvirenti. *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids.* Applied Mathematical Sciences 96, Springer-Verlag, 1994.

[127] C. Marchioro et M. Pulvirenti. *On the vortex-wave system.* Mechanics, analysis and geometry : 200 years after Lagrange. 79-95, 1991.

[128] N. Masmoudi et F. Rousset. *Uniform regularity for the Navier-Stokes equations with Navier boundary condition.* Arch. Ration. Mech. Analysis 203 (2), 529-575, 2012.

[129] N. Masmoudi et L. Saint-Raymond. *From the Boltzmann equation to the Stokes-Fourier system in a bounded domain.* Comm. Pure Appl. Math. 56(9), 1263-1293, 2003.

[130] **A. Moussa et F. Sueur. *A 2d spray model with gyroscopic effects.* `arXiv:1112.3514`. A paraître dans Asymptotic Analysis.**

[131] A. Munnier. *Locomotion of deformable bodies in an ideal fluid : Newtonian versus Lagrangian formalisms.* J. Nonlinear Sci. 19(6), 665-715, 2009.

[132] A. Munnier. *On the self-displacement of deformable bodies in a potential fluid flow.* Math. Models Methods Appl. Sci. 18(11), 1945-1981, 2008.

[133] C-L. Navier. *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides.* Mem. Acad. R. Sci. Paris. 6, 389-416, 1823.

[134] S. Neçasová, T. Takahashi et M. Tucsnak. *Weak solutions for the motion of a self-propelled deformable structure in a viscous incompressible fluid.* Acta Appl. Math. 116(3), 329-352, 2011.

[135] H. Neunzert. *The Vlasov equation as a limit of Hamiltonian classical mechanical systems of interacting particles.* Trans. Fluid Dynamics 18, 663-678, 1977.

[136] P. J. O'Rourke. *Collective drop effects on vaporizing liquid sprays.* Los Alamos National Laboratory, 1981.

[137] J. H. Ortega, L. Rosier et T. Takahashi. *Classical solutions for the equations modelling the motion of a ball in a bidimensional incompressible perfect fluid.* M2AN Math. Model. Numer. Anal. 39(1), 79-108, 2005.

[138] J. H. Ortega, L. Rosier et T. Takahashi. *On the motion of a rigid body immersed in a bidimensional incompressible perfect fluid.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 24(1), 139-165, 2007.

[139] M. Paddick. *Stability and instability of Navier boundary layers.* Preprint 2011, `arXiv:1103.5009`.

[140] **G. Planas et F. Sueur. *On the inviscid limit of the system "viscous incompressible fluid + rigid body" with the Navier conditions.* Preprint 2012, `arXiv:1206.0029`. A paraître aux Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. Title changed for "*On the "viscous incompressible fluid + rigid body" system with the Navier conditions*" after revision.**

[141] C. Rosier et L. Rosier. *Smooth solutions for the motion of a ball in an incompressible perfect fluid*, Journal of Functional Analysis **256**(5), 1618-1641, 2009.

[142] P. Rouchon. *On the Arnol'd stability criterion for steady-state flows of an ideal fluid.* European J. Mech. B Fluids 10(6), 651-661, 1991.

[143] L. Saint-Raymond. *Un résultat générique d'unicité pour les équations d'évolution.* Bull. Soc. Math. France 130(1), 87-99, 2002.

[144] J. San Martín, J.F. Scheid, T. Takahashi et M. Tucsnak. *An initial and boundary value problem modeling of fish-like swimming.* Arch. Ration. Mech. Anal. 188(3), 429-455, 2008.

[145] J. A. San Martin, V. Starovoitov et M. Tucsnak. *Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid.* Arch. Ration. Mech. Anal. 161(2), 113-147, 2002.

[146] S. Schochet. *The compressible Euler equations in a bounded domain : existence of solutions and the incompressible limit.* Comm. Math. Phys. 104(1), 49–75, 1986.

[147] S. Schochet. *The weak vorticity formulation of the* 2*-D Euler equations and concentration-cancellation.* Comm. Partial Differential Equations 20(5-6), 1077-1104, 1995.

[148] P. Serfati. *Équation d'Euler et holomorphies à faible régularité spatiale.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 320(2), 175-180, 1995.

[149] P. Serfati. *Solutions* C^∞ *en temps,* n-log *Lipschitz bornées en espace et équation d'Euler.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 320(5), 555-558, 1995.

[150] P. Serfati. *Structures holomorphes à faible régularité spatiale en mécanique des fluides.* J. Math. Pures Appl. 74(2), 95-104, 1995.

[151] D. Serre. *Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible. Existence.* Japan J. Appl. Math. 4(1), 99-110, 1987.

[152] C. G. Simader, H. Sohr. *A new approach to the Helmholtz decomposition and the Neumann problem in Lq-spaces for bounded and exterior domains.* Mathematical problems relating to the Navier-Stokes equation, 1–35, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., 11, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[153] V. N. Starovoitov. *Nonuniqueness of a solution to the problem on motion of a rigid body in a viscous incompressible fluid.* J. Math. Sci. 130(4), 4893–4898, 2005.

[154] **F. Sueur. *On the motion of a rigid body in a two-dimensional ideal flow with vortex sheet initial data.* A paraître aux Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.** `http://dx.doi.org/10.1016/j.anihpc.2012.09.001`.

[155] **F. Sueur. *Smoothness of the trajectories of ideal fluid particles with Yudovich vorticities in a planar bounded domain.* J. of Differential Equations 251(12), 3421-3449, 2011.**

[156] **F. Sueur. *A Kato type Theorem for the inviscid limit of the Navier-Stokes equations with a moving rigid body.* Comm. in Math. Physics 316(3), p783-808, 2012.**

[157] T. Takahashi. *Analysis of strong solutions for the equations modeling the motion of a rigid-fluid system in a bounded domain.* Adv. Differential Equations 8(12), 1499–1532, 2003.

[158] T. Takahashi et M. Tucsnak. *Global strong solutions for the two-dimensional motion of an infinite cylinder in a viscous fluid.* J. Math. Fluid Mech. 6(1), 53-77, 2004.

[159] R. Temam. *Problèmes mathématiques en plasticité.* Méthodes Mathématiques de l'Informatique, 12. Gauthier-Villars, 1983.

[160] R. Temam. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis. Second edition.* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 66, 1995.

[161] B. Turkington. *On the evolution of a concentrated vortex in an ideal fluid.* Arch. Rational Mech. Anal. 97(1), 75-87, 1987.

[162] J. Vankerschaver, E. Kanso et J. E. Marsden. *The geometry and dynamics of interacting rigid bodies and point vortices.* J. Geom. Mech. 1(2), 223-266, 2009.

[163] J. Vankerschaver, E. Kanso et J. E. Marsden. *The dynamics of a rigid body in potential flow with circulation.* Regul. Chaotic Dyn. 15(4-5), 606–629, 2010.

[164] C. Villani. *Optimal transport, old and new.* Fundamental Principles of Mathematical Sciences 338, Springer-Verlag.

[165] M. Vishik. *Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 32(6), 769–812, 1999.

[166] V. A. Vladimirov et K. I. Ilin. *On the Arnold stability of a solid in a plane steady flow of an ideal incompressible fluid.* Theor. Comput. Fluid Dyn. 10, 425-437, 1998.

[167] V. A. Vladimirov et K. I. Ilin. *On the stability of the dynamical system "rigid body + inviscid fluid".* J. Fluid Mech. 386, 43-75, 1999.

[168] Y. Wang et Z. Xin. *Existence of Weak Solutions for a Two-dimensional Fluid-rigid Body System.* Preprint 2011.

[169] L. Wang, Z. Xin et A. Zang. *Vanishing viscous limits for 3D Navier-Stokes equations with Navier-slip boundary conditions.* Preprint 2012, `arXiv:1201.1986v2`.

[170] Y. Wang et A. Zang. *Smooth solutions for motion of a rigid body of general form in an incompressible perfect fluid.* J. Differential Equations, 252, 4259-4288, 2012.

[171] F. A. Williams. *Combustion theory.* Benjamin/Cummings, 1985.

[172] W. Wolibner. *Un theorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long.* Math. Z. 37(1), 698-726, 1933.

[173] V. I. Yudovich. *Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid.* Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. 3, 1032-1066, 1963.

[174] V. I. Yudovich. *Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid.* Math. Res. Lett. 2(1), 27–38, 1995.