Communications in Partial Differential Equations, 31: 123–194, 2006

ISSN 0360-5302 print/1532-4133 online
DOI: 10.1080/03605300500299927

Couches Limites: Un Problème Inverse

FRANCK SUEUR

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités, Centre de Mathématiques et d'Informatique, Université de Provence, Marseille, France

On s'intéresse à des problèmes mixtes pour des systèmes symétriques hyperboliques multidimensionnels quasilinéaires avec des conditions aux limites maximales dissipatives portant sur un bord non caractéristique ou caractéristique de multiplicité constante. On suppose donnée une solution régulière d'un tel problème sur un intervalle de temps $(0, T_0)$*, où* $T_0 > 0$*. On considère des perturbations paraboliques, introduisant dans l'équation une famille* $(\varepsilon\mathscr{E})_{0<\varepsilon\leq 1}$ *où* $\mathscr{E}$ *est une viscosité non linéaire uniformément elliptique donnée. On prescrit des conditions aux limites très particulières non linéaires de type mixte Dirichlet–Neumann. On montre, pour* ε *assez petit, l'existence de solutions régulières* u^ε *de ces problèmes sur l'intervalle de temps* $(0, T_0)$*. De plus, on montre que* u^0 *est limite dans* $C(0, T_0; L^\infty \cap H^1)$*, quand* $\varepsilon \to 0^+$*, des* u^ε*. L'existence et la convergence vers* u^0 *des* u^ε *jusqu'au temps* T_0 *proviennent d'une propriété originale de transparence. En fait, on donne une description asymptotique, pour* $\varepsilon \to 0^+$*, très précise des* u^ε *à l'aide de développements de type BKW mettant en évidence des couches limites de petite amplitude. La petitesse des couches est liée au choix des conditions aux limites pour les perturbations visqueuses.*

We consider quasilinear symmetric hyperbolic boundary problems in several space dimensions, with maximal dissipative conditions on a boundary noncharacteristic or characteristic of constant multiplicity. We suppose that a regular solution of such a problem is given on the time interval $(0, T_0)$*, where* $T_0 > 0$*. We consider parabolic perturbations, by introducing in the equation a family* $(\varepsilon\mathscr{E})_{\varepsilon\in]0,1]}$ *where* $\mathscr{E}$ *is a given nonlinear uniformly elliptic viscosity. We prescribe some very particular nonlinear boundary conditions of Dirichlet–Neumann type. We show, for small* ε*, the existence of regular solutions* u^ε *of these problems on the time interval* $(0, T_0)$*. Moreover, we show that* u^0 *is the limit in* $C(0, T_0; L^\infty \cap H^1)$*, when* $\varepsilon \to 0^+$*, of the* u^ε*. The existence and the convergence to* u^0 *of the* u^ε *untill* T_0 *are the result of an original property of transparency. Indeed, we give a very accurate asymptotic description, for* $\varepsilon \to 0^+$*, of the* u^ε *by using WKB (Wentzel, 1926, Kramers, 1926, Brillouin, 1926) expansions which reveal small amplitude boundary layers. The smallness of the boundary layers is linked to the choice of the boundary conditions for the viscous perturbations.*

Received August 1, 2004; Accepted September 13, 2004
Address correspondence to Franck Sueur, Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités, Centre de Mathématiques et d'Informatique, Université de Provence, 39 rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille, France; E-mail: Franck.Sueur@cmi.univ-mrs.fr

Keywords Boundary layers; Characteristic boundary; Dirichlet–Neumann boundary condition; Hyperbolic boundary value problems; Transparency; Viscous perturbations; WKB expansions.

Mathematics Subject Classification 35K50; 35K60; 35B25; 35L50; 35L60; 76N20.

1. Introduction

Dans cette article, on s'intéresse à des perturbations visqueuses de problèmes mixtes hyperboliques.

Dans la Section 1.1, nous présentons la classe des problèmes mixtes hyperboliques qne nous considèrons. Il s'agit de systèmes symétriques hyperboliques multidimensionnels quasilinéaires. Les conditions aux limites sont maximales dissipatives et portent sur un bord non caractéristique ou caractéristique de multiplicité constante. Sous ces hypothèses, O. Guès (1990) a montré l'existence, locale en temps, de solutions régulières. Il s'agit pour nous d'un point de départ. On suppose donnée une solution régulière d'un tel problème sur un intervalle de temps $(0, T_0)$, où $T_0 > 0$.

Notre propos concerne certaines perturbations visqueuses de ces problèmes mixtes hyperboliques. Dans la Section 1.2, on considère des perturbations paraboliques, introduisant dans l'équation une famille $(\varepsilon\mathscr{E})_{0<\varepsilon\leq 1}$ où $\mathscr{E}$ est une viscosité non linéaire uniformément elliptique *donnée*. On prescrit des conditions aux limites très particulières non linéaires de type mixte Dirichlet–Neumann. On donne un premier énoncé simplifié des résultats de l'article.

1.1. *Problèmes Mixtes Hyperboliques*

Dans cet article, on s'intéresse à des problèmes mixtes $\mathbf{P}^0(T)$:

$$\mathscr{H}(b, u, \partial)u = F(b, u) \qquad \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \tag{1}$$

$$\mathbf{\Phi}(b, u) = 0 \qquad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \tag{2}$$

$$u = 0 \qquad \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+ \tag{3}$$

où l'opérateur

$$\mathscr{H}(b, u, \partial) := \sum_{0\leq j\leq n} A_j(b, u)\partial_j,$$

est symétrique hyperbolique. La variable de l'espace-temps $\mathbb{R}^{1+n}$ étant notée (t, x) et $\partial := (\partial_0 := \partial_t, \partial_1, \ldots, \partial_n)$ avec $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$. La fonction inconnue est $u : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^N$, tandis que $b : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^{N'}$ est une fonction donnée jouant aussi bien le rôle, sur un compact de $\mathbb{R}^{1+n}$, de la variable de $\mathbb{R}^{1+n}$, que celui d'un paramètre ou de seconds membres éventuels. n, N, et N' sont des entiers naturels non nuls quelconques fixés. On note $\theta := (b, u)$ la variable de $\mathbb{R}^{N'+N}$. Lorsqu'une fonction dépend de θ, on notera indifféremment D_u ou ∂_u sa différentielle partielle par rapport à u. Les matrices $(A_j)_{0\leq j\leq n}$ sont de taille $N \times N$, et, comme F, b et $\mathbf{\Phi}$, C^∞ de leurs arguments. La fonction $\mathbf{\Phi}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^r$, où r est un entier fixé. On suppose que $\mathbf{\Phi}(0) = F(0) = 0$ et rang $D_u\mathbf{\Phi}(0) = r$. On traite ici le cas modèle du demi-espace, mais les résultats s'étendent aux domaines situés d'un seul côté de leur bord C^∞. On note $x = (y, x_n)$. Le domaine est une demi-bande d'espace-temps: $\Omega_T^+ := (-1, T) \times \mathbb{R}_+^n$ où $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ désigue le demi-espace. On considère donc des solutions u nulles dans le passé i.e., pour $-1 \leq t \leq 0$. Ceci simplifie la présentation. Le bord $\Gamma_T := (-1, T) \times \mathbb{R}^{n-1}$ est supposé caractéristique de multiplicité constante ou non caractéristique et la condition aux limites maximale dissipative.

Hypothèse 1.1. *Il existe un entier d_0 tel que pour θ voisin de zero, si $\mathbf{\Phi}(\theta) = 0$, la dimension* $\ker A_n(\theta)$ *est d_0.*

Insistons sur le fait que l'on n'exclut pas le cas où la multiplicité d_0 est constante égale à zero, c'est à dire le cas non caractéristique.

Hypothèse 1.2. *La condition aux limites est maximale dissipative i.e., pour θ voisin de zero, si $\mathbf{\Phi}(\theta) = 0$, la forme quadratique $\langle A_n(\theta).,.\rangle$ est négative sur* $\ker D_u\mathbf{\Phi}(\theta)$ *et* $\ker D_u\mathbf{\Phi}(\theta)$ *est maximale pour cette propriété.*

Insistons sur le fait que dans l'hypothèse précédente, les conditions aux limites peuvent être conservatives c'est à dire vérifier

$$\langle A_n(\theta)u, u\rangle = 0 \qquad \text{pour } \mathbf{\Phi}(\theta) = 0, \quad D_u\mathbf{\Phi}(\theta).u = 0.$$

Notons qu'une conséquence de l'Hypothèse 1.2 est que si $\mathbf{\Phi}(\theta) = 0$ alors $\ker A_n(\theta) \subset \ker D_u\mathbf{\Phi}(\theta)$. L'application $\ker A_n(b, .)$ définit une distribution de d_0-plans sur la variété $\Lambda_b := \{u \in \mathbb{R}^N / \mathbf{\Phi}(b, u) = 0\}$. On fait l'hypothèse suivante, qui est automatiquement satisfaite si $d_0 = 0$ (bord non caractéristique), si $d_0 = 1$ ou si (1) est un système de lois de conservation (cf. Exemple 1 de Guès, 1990).

Hypothèse 1.3. *Pour θ voisin de zero, la distribution de d_0-plans* $\ker A_n(b, .)$ *sur Λ_b est involutive au sens de Frobenius.*

Rappelons qu'un théorème de Frobenius assure que faire l'Hypothèse 1.3 équivaut à supposer que pour θ voisin de zero, la distribution $\ker A_n(b, .)$ sur Λ_b est intégrable. Sous ces hypothèses, et quitte à supposer que $b|_{\Omega_0^+}$ est à valeurs dans un voisinage compact suffisamment petit de zero (ce qui est toujours possible en introdunisant une fonction de troncature dans b), on dispose du résultat suivant:

Théorème 1.4 (Guès, 1990). *Il existe un temps T_0 strictement positif et une unique solution régulière $u^0 \in H^\infty(\Omega_{T_0}^+)$ du problème $\mathbf{P}^0(T_0)$.*

1.2. *Perturbations Visqueuses*

On veut s'interesser à des perturbations visqueuses du problème $\mathbf{P}^0(T_0)$. Pour cela, on regarde l'effet de l'ajout dans le membre de gauche de (1) d'une famille $(\varepsilon\mathscr{E})_{\varepsilon>0}$ où

$$\mathscr{E}(b, u, \partial_x u, \partial_x)u := \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_i E_{i,j}(b, u)\partial_j u + E(b, u, \partial_x u)$$

est un opérateur non linéaire uniformément elliptique *donné*.

Hypothèse 1.5. *Les matrices* $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *sont symétriques de taille* $N\times N$, C^∞ *et il existe un réel* $c>0$ *tel, pour tout* $\theta\in\mathbb{R}^{N'+N}$ *et* $\zeta\in S^{n-1}$,

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\zeta_i\zeta_j E_{i,j}(b,u)\geq cId_{\mathbb{R}^N}. \tag{4}$$

On a désigné par S^{n-1} la sphère euclidienne unité de $\mathbb{R}^n$. La fonction E est à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et de classe C^∞. La notation ∂_x désigne la collection des dérivées spatiales: $(\partial_1,\ldots,\partial_n)$. On regarde alors l'opérateur $\mathscr{L}^\varepsilon$ défini par

$$\mathscr{L}^\varepsilon(b,u,\partial_x u,\partial)u := \mathscr{H}(b,u,\partial)u-(F(b,u)+\varepsilon\mathscr{E}(b,u,\partial_x u,\partial_x)u). \tag{5}$$

Une question naturelle est la suivante. Existe t-il une famille de conditions aux limites: $(\mathscr{C}^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1}$ telles

(i) qu'il existe un réel $\varepsilon_0\in]0,1]$ et un réel $T\in]0,T_0]$ tels que pour tout $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]$, le problème mixte parabolique

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^\varepsilon(b,u^\varepsilon,\partial_x u^\varepsilon,\partial)u^\varepsilon=0 &\qquad \text{quand } (t,x)\in\Omega_T^+,\\ u^\varepsilon \text{satisfait } \mathscr{C}^\varepsilon &\qquad \text{quand } (t,x)\in\Gamma_T,\\ u^\varepsilon=0 &\qquad \text{quand } (t,x)\in\Omega_0^+ \end{aligned}$$

admet une unique solution $u^\varepsilon\in H^\infty(\Omega_T^+)$;

(ii) et que les u^ε convergent vers u^0 lorsque $\varepsilon\to 0^+$ dans $L^2(\Omega_T^+)$.

Cette question constitue en quelque sorte un *problème inverse* à celui, plus courant dans la littérature, de la convergence de problèmes mixtes paraboliques avec conditions de Dirichlet vers un problème mixte hyperbolique limite à identifier (Gisclon, 1996; Grenier et Guès, 1998; Guès, 1995; Métivier et Zumbrun, 2005; Rousset, 2001).

D'un point de vue strictement mathématique, une idée naturelle consiste à prescrire

$$u^\varepsilon=u^0 \qquad \text{quand } (t,x)\in\Gamma_{T_0}. \tag{6}$$

Nous donnons dans la Section 2.2 un résultat concernant ces conditions aux limites. Il donne une première réponse positive à la question précédente. Il étend notamment aux bords caractéristiques un théorème de Michelson (1989).

Cependant, nous ne nons arrêtons pas là. En dehors de l'interêt théorique, une motivation du problème inverse est liée à l'approximation numérique des problèmes aux limites hyperboliques (cf. commentaire 6 du Théorème 1.7). Dans ce cas, on ne connait pas u^0 de manière exacte. Aussi la question se modifie ainsi: existe t-il une famille de conditions aux limites: $(\mathscr{C}^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1}$ vérifiant (i) et (ii) et qui ne fasse pas intervenir u^0, ou sa trace au bord?

Nous exhibons une classe de famille de conditions aux limites de type mixte Dirichlet–Neumann qui répond par l'affirmative à cette dernière question. Cette classe contient en particulier des conditions aux limites physiques (cf. commentaire 7 du Théorème 1.7).

Présentons ces conditions aux limites particulières. A la condition (2), nous allons adjoindre des conditions aux limites complémentaires d'ordre un. Pour embrasser une plus grande généralité, nous allons autoriser une dépendance en ε, en fait même en $\sqrt{\varepsilon}$. Plus précisemment, nous envisageons des conditions aux limites de la forme:

$$\Psi^\varepsilon(b, u, \partial_x u) = 0 \tag{7}$$

et nous supposons qu'il existe une fonction Ψ de classe C^∞, à valeurs dans $\mathbb{R}^{N-r}$ telle que pour tout $(\varepsilon, b, u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^{N'+N} \times (\mathbb{R}^N)^n$,

$$\Psi^\varepsilon(b, u, v) = \Psi(\sqrt{\varepsilon}, b, u, v). \tag{8}$$

Un point essentiel de notre analyse est que le terme d'ordre $\sqrt{\varepsilon}^0$ impliquant la dérivée normale vérifie une propriété d'orthogonalité. L'hypothèse qui suit précise cela. Avant de l'énoncer, fixons quelques notations. Une conséquence de l'Hypothèse 1.5 est que la matrice $E_{n,n}$ est symétrique définie positive. On définit, pour tout $\theta := (b, u) \in \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^N$, l'espace $F_1(\theta) := (\ker D_u\mathbf{\Phi}(\theta))^{\perp E_{n,n}(\theta)}$ comme l'orthogonal, pour le produit scalaire induit par la matrice symétrique définie positive $E_{n,n}(\theta)$, de $\ker D_u\mathbf{\Phi}(\theta)$. Comme pour θ voisin de 0, rang $D_u\mathbf{\Phi}(\theta) = r$, l'espace $F_1(\theta)$ est de dimension r. L'ensemble $\mathscr{C}$ des champs C^∞ de matrices $\Pi(\theta)$ de tailles $(N - r) \times N$ vérifiant

$$\forall\theta := (b, u) \in \mathbb{R}^{N'} \times \Lambda_b, \qquad \ker\Pi(\theta) = F_1(\theta) \tag{9}$$

est par conséquent non vide. Lorsque $v \in (\mathbb{R}^N)^n$, on note $v := (v', v_n)$ où $v' := (v_1, \ldots, v_{n-1}) \in (\mathbb{R}^N)^{n-1}$. On suppose que la fonction Ψ est de la forme suivante:

Hypothèse 1.6. *Pour tout* $(\epsilon, \theta, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^{N'+N} \times (\mathbb{R}^N)^n$,

$$\Psi(\epsilon, \theta, v) := \Pi(\theta)v_n + K(\epsilon, \theta, v', \epsilon v_n), \tag{10}$$

où $\Pi \in \mathscr{C}$ *et* K *est une fonction de classe* C^∞, *à valeurs dans* $\mathbb{R}^{N-r}$, *vérifiant* $K(0) = 0$.

On donne un premier énoncé simplifié des résultats de l'article. Un exposé plus précis est fait dans la Section 2. Des exemples d'application sont donnés à la Section 3.

Théorème 1.7. *Il existe un réel* $\varepsilon_0 \in]0, 1]$ *tel que pour* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, *le problème mixte parabolique* $\mathbf{P}^\varepsilon(T_0)$ *suivant*

$$\mathscr{L}^\varepsilon(b, u^\varepsilon, \partial_x u^\varepsilon, \partial)u^\varepsilon = 0 \qquad \text{quand } (t, x) \in \Omega^+_{T_0}, \tag{11}$$

$$\mathbf{\Phi}(b, u^\varepsilon) = 0 \qquad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_{T_0}, \tag{12}$$

$$\Psi^\varepsilon(b, u^\varepsilon, \partial_x u^\varepsilon) = 0 \qquad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_{T_0}, \tag{13}$$

$$u^\varepsilon = 0 \qquad \text{quand } (t, x) \in \Omega^+_0 \tag{14}$$

admette une unique solution $u^\varepsilon \in H^\infty(\Omega^+_{T_0})$ *et on a les estimations*

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^\infty(\Omega^+_{T_0})} \le c\sqrt{\varepsilon}, \qquad \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega^+_{T_0})} \le c\varepsilon^{\frac{3}{4}},$$

où la constante c ne dépend pas de ε. Dans le cas non caractéristique, ces estimations peuvent être améliorées

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^\infty(\Omega^+_{T_0})} \leq c\varepsilon, \qquad \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega^+_{T_0})} \leq c\varepsilon.$$

Commentaires

1. Temps d'existence uniforme. L'existence d'une solution régulière u^ε, pour un $\varepsilon \in]0, 1]$ fixé, sur un intervalle de temps non trivial $(0, T_\varepsilon)$ $(T_\varepsilon > 0)$ est connue dans la littérature des problèmes mixtes paraboliques. Notons que le Théorème 1.7 affirme, lui, l'existence des $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ sur un intervalle de temps non trivial commun et, qui plus est, égal à l'intervalle $(0, T_0)$ d'existence de la solution u^0 du problème hyperbolique.

2. Présence de couches limites. Lorsque $\varepsilon \to 0^+$, la famille $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers u^0 non seulement dans $L^2(\Omega^+_{T_0})$ mais aussi dans $L^\infty(\Omega^+_{T_0})$. Cependant, la convergence des $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ vers u^0 n'a pas lieu dans tous les H^s, contrairement à ce qui se passe lorsque l'équation est posée dans tout l'espace (sans bord). Elle est aussi moins rapide, mesurée dans les espaces L^∞ et L^2. Cela provient de ce qu'il se forme au voisinage du bord des couches limites c'est à dire des variations rapides de u^ε. Dans la Section 2, on établit un développement asymptotique, pour $\varepsilon \to 0^+$, de type BKW (Brillouin, 1926, Kramers, 1926, Wentzel, 1926) des u^ε où sont décrits ces termes de couches limites. Celles-ci sont, ici, à classer en deux catégoris. Les premières sont les couches limites caractéristiques. Elles sont de taille $\sqrt{\varepsilon}$ et sont décrites par une variable $\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}$. Les secondes sont les couches limites non caractéristiques sont de taille ε et correspondent à une variable rapide $\frac{x_n}{\varepsilon}$. Lorsque leur amplitude est en $O(1)$ (en norme L^∞), leur norme L^2 est en $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ pour les couches limites caractéristiques et $\sqrt{\varepsilon}$ pour les couches limites non caractéristiques.

3. Régime faiblement non linéaire. L'intérêt des problèmes mixtes (et plus particulièrement des conditions aux limites de type Dirichlet–Neumann (12)–(13)) considéré(e)s ici est justement que les couches limites ne sont pas d'amplitude en $O(1)$ mais de petites amplitudes. En effet, le choix des conditions aux limites force le problème parabolique à suivre un régime que l'on peut qualifier de faiblement non linéaire, par analogie avec l'optique géométrique. Les termes de couches limites caractéristiques (resp. non caractéristiques) apparaissent à l'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ (resp. ε).

4. Propriété de transparence. De plus, l'Hypothèse 1.3 peut se voir comme une version affaiblie de la propriété de dégénerescence linéaire bien connue en optique géometrique pour assurer des propriétés de transparence. Cette hypothèse rend possible un changement non linéaire de fonction inconnue qui transforme le problème initial en un problème pour lequel la matrice normale de l'opérateur hyperbolique est redressée (cf. Section 4.1). Un point clé de l'article est ainsi que le comportement des couches limites est linéaire. La propriété de transparence du Lemme 4.1 joue un rôle crucial dans ce fait et, par conséquent, dans l'existence et la convergence vers u^0 des u^ε *jusqu'au temps* T_0. Nous reviendrons sur ce point après le Théorème 2.1, qui constitue le résultat central de l'article.

5. Comparaison avec la condition de Dirichlet homogène. Il est intéressant de comparer la situation présente au cas où l'on prescrit une condition de Dirichlet homogène $u^\varepsilon = 0$ pour les problèmes paraboliques. Commençons par rappeler les résultats dont on dispose concernant ce dernier cas.

Dans le cas non caractéristique, signalons les travaux de Gisclon (1996), de Grenier et Guès (1998), de Rousset (2001) et récemment de Métivier et Zumbrun (2005) qui élucide la question de la stabilité.

Dans le cas caractéristique, on ne dispose pas, à ma connaissance, de résultat général. Guès (1995) et Sueur (2006a) traitent le cas semilinéaire, Grenier (1996) le cas quasilinéaire totalement caractéristique.

Venons-en à la comparaison annoncée.

Une première différence essentielle réside dans la problèmatique elle-même. Lorsqu'on considère des problèmes mixtes paraboliques avec condition de Dirichlet, on identifie un problème mixte hyperbolique limite. Ensuite, on étudie la convergence des problèmes paraboliques vers le problème hyperbolique limite. Dans le Théorème 1.2, on s'intéresse à un *problème inverse*. On considère un problème mixte hyperbolique et on cherche à en approcher les solutions régulières par celles de perturbations visqueuses du problème hyperbolique initial.

Ensuite, lorsqu'on considère des problèmes mixtes paraboliques avec condition de Dirichlet, que le bord soit caractéristique ou non, il se forme en général des couches limites d'amplitude $O(1)$. Ces dernières font obstruction à la convergence dans L^∞ et $H^{\frac{1}{2}}$, limitent le temps de convergence et ralentissent la convergence dans L^2. Au contraire, la suite (u^ε) du Théorème 1.7 converge sur $(0, T_0)$ et il n'y a pas de condition de stabilité supplémentaire à imposer. La solution hyperbolique u^0 est limite dans L^∞ et dans L^2 des u^ε. On verra dans la section suivante que u^0 est aussi limite des u^ε dans H^s pour $s < \frac{3}{2}$.

Notons aussi que l'on atteint avec les conditions aux limites (12) et (13) des problèmes mixtes symétriques hyperboliques qui ne sont pas limite des problèmes mixtes symétriques paraboliques avec condition de Dirichlet homogène:

$$\begin{cases} \mathscr{L}^\varepsilon u^\varepsilon = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ u^\varepsilon = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T. \end{cases} \tag{15}$$

En effet, dans le cas semilinéaire, Sueur (2006a) montre que la limite des problèmes (15) est un problème hyperbolique strictement dissipatif. De plus, même dans le cas où l'on dispose d'un problème mixte hyperbolique strictement dissipatif $\mathbf{P}^0(T)$, la convergence des problèmes (15) vers $\mathbf{P}^0(T)$ recquiert une condition non triviale sur la matrice normale $E_{n,n}$ du tenseur de viscosité (cf. Rauch, 1979). Au contraire, le Théorème 1.7 est valide pour toute viscosité uniformément elliptique. L'obtention des problèmes mixtes hyperboliques conservatifs comme limite de problèmes mixtes symétriques paraboliques avec conditions de Dirichlet est une question ouverte (cf. Rauch, 1979). L'exemple des équations d'Euler suggère notamment que l'on peut obtenir des problèmes mixtes symétriques hyperboliques conservatifs comme limite de problèmes mixtes symétriques paraboliques dégénérés. Signalons également l'article de Sueur (2005) qui traite d'une question voisine.

Rappelons que l'on donne aussi dans ce papier des résultats sur des conditions de Dirichlet non homogènes très particulières, à savoir les conditions de Dirichlet (6). On renvoie à la Section 2.2 pour la présentation de ces résultats et une comparaison entre les conditions de Dirichlet–Neumann du Théorème 1.7 et les conditions de Dirichlet (6).

6. Approximation numérique. Une motivation importante pour ce travail est liée à l'approximation discrète des problèmes aux limites hyperboliques.

La discrétisation introduit un effet comparable à celui d'un terme de diffusion. On parle de viscosité numérique. Aussi, en présence d'un bord apparaît un phénomène de couches limites numériques qui limite la convergence du schéma considéré. De telles couches limites ont été étudiées par Gisclon et Serre (1997) (schéma de Godunov) et par Chainais-Hillairet et Grenier (2001) (schéma de Lax Friedrichs). Citons également les travaux de Joseph et LeFloch (1999), de Michelson (1983, 1987) et le guide de Serre (2001). Dans l'approximation numérique, le pas d'espace Δx joue le rôle de l'échelle de viscosité ε. Aussi, on ne s'attend pas, en présence d'une couche limite caractéristique (respectivement non caractéristique) d'ordre zero, à un ordre de convergence meilleure que $\frac{1}{4}$ (resp. $\frac{1}{2}$). Cependant, si le but recherché est la simulation du problème hyperbolique, on peut espérer que des choix particuliers de conditions aux limites "tuent" la couche à l'ordre zero. Ainsi le Théorème 1.7 suscite l'espoir d'une convergence d'ordre $\frac{3}{4}$. Nous renvoyons aux rapports de Dubois (2002) et de Ghidaglia (2002), et Pascal pour des exemples d'utilisation de conditions aux limites discrètes de type mixte Dirichlet–Neumann. Signalons également l'article de Coudière et al. (2000) qui donne un résultat de convergence en $O(\Delta x^{\frac{1}{2}})$ de schémas de volumes finis explicites pour des systèmes linéaires dans un domaine borné par un bord non caractéristique en plusieurs dimensions d'espace.

7. Hypothèse 1.6 et conditions aux limites "physiques". Il est remarquable que des conditions aux limites qui ont un sens physique satisfont l'Hypothèse 1.6. Un exemple extrême (au sens où $r = 0$) est donné par le micromagnétisme (cf. Carbou et al., 2002). Pour les perturbations paraboliques, on prescrit des conditions aux limites qui sont purement de type Neumann. D'autres exemples sont donnés par la mécanique des fluides comme les conditions de glissement (ou de friction) de Navier considérées, pour l'équation de Navier-Stokes incompressible en dimension 2, par Clopeau et al. (1998), qui prouvent la convergence vers les équations d'Euler pour une vorticité initiale L^∞. Ce résultat est étendu aux cas des vorticités initiales L_p, pour $p > 2$, par Lopes Filho et al. (2005). L'existence de solutions à l'équation de Navier-Stokes incompressible avec condition de glissement dans des espaces de Hølder a été étudiée par Itoh et al. (2003) en dimensions 2 et 3. Le cas particulier, plus favorable, des conditions libres (ou conditions de surface ouverte) est etudi'e par Lions (1969) en dimension 2, par Xiao et Xin (2005) en dimension 3. Citons également les travaux de Fabrie et Galusinski (2001) qui utilisent la condition de surface ouverte dans des regimes faiblement compressibles et ceux de Itoh et al. (2003), de Burnat et Zajaczkowski (1997) qui traitent des conditions de glissement pour l'équation de Navier-Stokes compressible. Pour ces modèles, la viscosité étant dégénérée, les résultats de ce papier ne sont pas directement applicables. Il est cependant vraisemblable qu'on puisse encore mener une analyse BKW révélant des couches limites de petites amplitudes.

8. Propriété d'involution. Ce commentaire concerne les problèmes mixtes hyperboliques. Le Théorème 1.4, montré par Guès (1990), constitue une extension au cadre quasilinéaire des travaux de Rauch (1985) pour le problème linéaire. Des travaux sur les problèmes linéaires, antérieurs à l'article de Rauch (1985), ont été réalisés dans le cas non caractéristique par Kreiss (1970), Rauch et Massey (1974) et dans le cas caractéristique, sous des hypothèses plus restrictives, par Friedrichs (1958), Lax et Phillips (1960), Majda et Osher (1975). Pour le problème quasilinéaire caractéristique, on dispose également des résultats de Secchi (1996), ainsi que de ceux d'Agemi (1981), Beirão da Veiga (1993, 1994), et Schochet (1986) pour le système d'Euler, de Yanagisawa et Matsumura (1991), Secchi (2002) pour la magnétohydrodynamique. L'Hypothèse 1.3 joue un rôle majeur dans Guès (1990) (elle est aussi utilisée implicitement dans les autres travaux susmentionnés) et révèle un aspect géométrique du problème qui n'apparaît pas dans les cas semilinéaires ou non caractéristiques. Cette hypothèse est naturelle: elle est notamment valide pour les systèmes de lois de conservations. Cette hypothèse rend possible un changement non linéaire de fonction inconnue qui transforme le problème initial en un problème pour lequel la matrice normale du système est diagonale par blocs (cf. Section 4.1.1). L'intérêt de cette diagonalisation est le "bon comportement" des commutations de l'opérateur aux dérivations conormales. En l'absence d'une telle hypothèse, l'analyse du problème linéarisé conduit à des inégalités d'énergie avec perte d'une dérivée, des coefficients vers la solution. Une question intéressante est de savoir s'il est possible d'utiliser une paralinéarisation (comme Métivier, 1991 dans le problème voisin des ondes soniques) ou une stratégie de type Nash–Moser pour obtenir l'existence de solutions régulières sans l'Hypothèse 1.3. Si tel est le cas, signalons qu'il est encore possible de construire un développement asymptotique, à la différence près que le comportement de la couche limite caractéristique d'amplitude $\sqrt{\varepsilon}$ fait intervenir un terme non linéaire de type Burgers. En général, ce dernier provoque une limitation du temps de convergence des (u^ε) vers u^0.

9. Condition mixte Dirichlet–Neumann. Notons qu'une conséquence de l'Hypothèse 1.6 est que les matrices $\Pi(\theta)$ sont surjectives. Seuls leurs noyaux importent dans l'analyse. En effet, si $\widetilde{\Pi}(\theta)$ est un autre champ C^∞ de matrices $(N-r)\times N$ appartenant à $\mathscr{C}$ alors, pour tout $\theta := (b,u) \in \mathbb{R}^{N'} \times \Lambda_b$, $\ker \widetilde{\Pi}(\theta) = \ker \Pi(\theta)$. Par conséquent, il existe des matrices carrées $G(\theta)$ de taille $N-r$ de classe C^∞ telles que $\widetilde{\Pi}(\theta) = G(\theta).\Pi(\theta)$. Alors les conditions aux limites (7) peuvent se réecrire $\widetilde{\Psi}^\varepsilon(b,u,\partial_x u) = 0$ où les fonctions $\widetilde{\Psi}^\varepsilon$ sont définies, pour tout $(\varepsilon,\theta,v) \in [0,1] \times \mathbb{R}^{N'+N} \times (\mathbb{R}^N)^n$, par

$$\widetilde{\Psi}^\varepsilon(\theta,v) := \widetilde{\Psi}(\sqrt{\varepsilon},\theta,v),$$

avec, pour tout $(\epsilon,\theta,v := (v',v_n)) \in [0,1] \times \mathbb{R}^{N'+N} \times (\mathbb{R}^N)^n$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}(\epsilon,\theta,v) &:= \widetilde{\Pi}(\theta)v_n + \widetilde{K}(\epsilon,\theta,v',\epsilon v_n) \qquad \text{et}\\ \widetilde{K}(\epsilon,\theta,v',v_n) &:= G(\theta).K(\epsilon,\theta,v',v_n)\end{aligned}$$

et vérifient l'Hypothèse 1.6.

Dans cet article, on ne se pose pas la question de savoir quel est l'ensemble des familles de conditions aux limites $(\mathscr{C}^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1}$ vérifiant (i) et (ii), ni de savoir quel est l'ensemble des familles $(\mathscr{C}^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1}$ pour lesquelles le Théorème 1.7 est valide. Le champ Π utilisé ici relève tout au moins d'un choix canonique effectué en vue d'utiliser une méthode d'énergie. Cependant notons (cf. Kreiss et Lorenz, 1989) que la méthode d'énergie se révèle souvent beaucoup moins générale que la méthode de Fourier–Laplace dans le cadre de problèmes mixtes paraboliques avec des conditions aux limites mixtes Dirichlet–Neumann. Une question intéressante est de savoir s'il est possible d'adapter la méthode de Métivier et Zumbrun (2005) à des conditions mixtes. Notons toutefois que cette dernière concerne des problèmes hyperboliques limites non caractéristiques vérifiant la condition de Lopatinski uniforme.

10. Caractère intrinsèque des hypothèses. Les hypothèses sont préservées par changement non linéaire de fonction inconnue. D'une part, cette préservation des hypothèses est satisfaisante intellectuellement puisque le choix d'une inconnue revêt, à priori, un caractère arbitraire. D'autre part, au cours de la preuve, nous allons utiliser successivement deux changements d'inconnus (cf. Section 4). Ceux-ci jouent des rôles essentiels. Le premier d'entre eux est indépendant du paramètre ε. Nous allons voir qu'un tel changement de fonction inconnue préserve les hypothèses sur la famille de problèmes mixtes $(\mathbf{P}^\varepsilon(T_0))_\varepsilon$.

Pour être tout à fait clair et parceque cela nous permet de mettre en place des notations pour la suite, précisons ce que l'on entend par préservation des hypothèses. Supposons qu'il existe w_1 voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^{N'}$, w_2, $\tilde{w}_2$ voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^N$ et un difféomorphisme C^∞

$$\begin{aligned} \chi : \tilde{w} &\to w \qquad \text{où} \qquad w := w_1 \times w_2 \\ (b, \tilde{u}) &\mapsto (b, u) = (b, \mathscr{M}(b, \tilde{u})) \qquad \tilde{w} := w_1 \times \tilde{w}_2. \end{aligned}$$

La lettre $\tilde{u}$ désigne ainsi la nouvelle inconnue. Nous allons également introduire la nouvelle fonction paramètre $\tilde{b} := (b, \partial b, \partial^2 b)$. Notons que l'on supposait C^∞ la fonction b, et la fonction $\tilde{b}$ l'est donc aussi.

Regardons dans un premier temps les problèmes mixtes hyperboliques de la forme $\mathbf{P}^0(T)$. Multipliant à gauche l'équation (1) par les matrices inversibles ${}^t\partial_{\tilde{u}}\mathscr{M}$, on obtient une équation de la forme $\widetilde{\mathscr{H}}(\tilde{b}, \tilde{u}, \partial) = \widetilde{F}(\tilde{b}, \tilde{u})$, où

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathscr{H}}(\tilde{b}, \tilde{u}, \partial) &:= \sum_{0 \le j \le n} \widetilde{A}_j(\tilde{b}, \tilde{u})\partial_j, \\ \widetilde{F}(\tilde{b}, \tilde{u}) &:= ({}^t\partial_{\tilde{u}}\mathscr{M}.Fo\chi)(b, \tilde{u}) + \sum_{0 \le j \le n} \widehat{A}_j(b, \tilde{u}).\partial_j b, \end{aligned}$$

avec, pour $0 \le j \le n$,

$$\widetilde{A}_j := {}^t\partial_{\tilde{u}}\mathscr{M}.A_j o\chi.\partial_{\tilde{u}}\mathscr{M}, \qquad \widehat{A}_j =:= {}^t\partial_{\tilde{u}}\mathscr{M}.A_j o\chi.\partial_b\mathscr{M}.$$

La condition aux limites (2) se réecrivent $\widetilde{\mathbf{\Phi}}(b, \tilde{u}) = 0$ où $\widetilde{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{\Phi} o\chi$. Un instant de réflexion convainc que l'on obtient ainsi un problème mixte vérifiant les mêmes hypothèses que le problème initial $\mathbf{P}^0(T)$.

Examinons maintenant les perturbations visqueuses. Multipliant l'équation (1) à gauche par ${}^t\partial_{\tilde{u}}\mathscr{M}$, on obtient une équation de la forme $\widetilde{\mathscr{L}}^\varepsilon(\tilde{b}, \tilde{u}^\varepsilon, \partial_x\tilde{u}^\varepsilon, \partial)\tilde{u}^\varepsilon = 0$ où l'opérateur $\widetilde{\mathscr{L}}^\varepsilon$ s'écrit

$$\widetilde{\mathscr{L}}^\varepsilon(b, \tilde{u}, \partial_x\tilde{u}, \partial)\tilde{u} := \widetilde{\mathscr{H}}(b, \tilde{u}, \partial)\tilde{u} - (\widetilde{F}(b, \tilde{u}) + \varepsilon\widetilde{\mathscr{E}}(\tilde{b}, \tilde{u}, \partial_x\tilde{u}, \partial_x)\tilde{u}).$$

On a

$$\widetilde{\mathscr{E}}(\tilde{b}, \tilde{u}, \partial_x\tilde{u}, \partial_x)\tilde{u} := \sum_{1 \le i,j \le n} \partial_i\widetilde{E}_{i,j}(b, \tilde{u})\partial_j\tilde{u} + \widetilde{E}(\tilde{b}, \tilde{u}, \partial_x\tilde{u})$$

où, pour $1 \le i, j \le n$, les matrices $\widetilde{E}_{i,j}$ sont définies par

$$\widetilde{E}_{i,j} := {}^t\partial_{\tilde{u}}\mathscr{M}.E_{i,j}o\chi.\partial_{\tilde{u}}\mathscr{M}$$

et la fonction $\widetilde{E}$ est définie par

$$\widetilde{E}(\tilde{b}, \tilde{u}, \partial_x \tilde{u}) := {}^t\partial_{\tilde{u}}\mathcal{M}(b, \tilde{u}) E(\chi(b, \tilde{u}), \mathcal{M}_x) + \sum_{1 \le i,j \le n} \Gamma_{i,j}$$

où $\mathcal{M}_x$ désigne la collection des dérivées spatiales de $\mathcal{M}(b, \tilde{u})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &:= \partial_x(\mathcal{M}(b, \tilde{u})), \\ &= \partial_b \mathcal{M}(b, \tilde{u}).\partial_x b + \partial_{\tilde{u}} \mathcal{M}(b, \tilde{u}).\partial_x \tilde{u}, \end{aligned}$$

et, pour $1 \le i, j \le n$,

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,j} := {}& {}^t\partial_{\tilde{u}}\mathcal{M}(b, \tilde{u}).(E_{i,j})_\theta.\partial_b \mathcal{M}(b, \tilde{u}).\partial_j b + {}^t\partial_{\tilde{u}}\mathcal{M}(b, \tilde{u}).E_{i,j}(\chi(b, \tilde{u})).(\partial_b \mathcal{M}.\partial_j b)_i \\ & - ({}^t\partial_{\tilde{u}}\mathcal{M})_i.E_{i,j}(\chi(b, \tilde{u})).\partial_{\tilde{u}}\mathcal{M}(b, \tilde{u}).\partial_j \tilde{u}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (E_{i,j})_\theta &:= \partial_b E_{i,j}(\chi(b, \tilde{u})).\partial_i b + \partial_u E_{i,j}(\chi(b, \tilde{u})).(\partial_b \mathcal{M}(b, \tilde{u}).\partial_i b + \partial_{\tilde{u}} \mathcal{M}(b, \tilde{u}).\partial_i \tilde{u}), \\ (\partial_b \mathcal{M}.\partial_j b)_i &:= \partial_b^2 \mathcal{M}(b, \tilde{u}).\partial_i b.\partial_j b + \partial_b \mathcal{M}(b, \tilde{u}).\partial_{ij} b + \partial_{\tilde{u}b} \mathcal{M}(b, \tilde{u}).\partial_i \tilde{u}.\partial_j b, \\ ({}^t\partial_{\tilde{u}}\mathcal{M})_i &:= {}^t\partial_{\tilde{u}}^2 \mathcal{M}(b, \tilde{u}).\partial_i \tilde{u} + {}^t\partial_{\tilde{u}}^2 \mathcal{M}(b, \tilde{u}).\partial_i b. \end{aligned}$$

La condition aux limites (13) se reformule en

$$\widetilde{\Psi}^\varepsilon(\tilde{b}, \tilde{u}^\varepsilon, \partial_x \tilde{u}^\varepsilon) = 0$$

avec, pour $\tilde{u} \in \mathbb{R}^N$ et $\tilde{v} := (\tilde{v}', \tilde{v}_n) \in (\mathbb{R}^N)^{n-1} \times \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}^\varepsilon(\tilde{b}, \tilde{u}, \tilde{v}) &:= \widetilde{\Pi}(b, \tilde{u})\tilde{v}_n + \widetilde{K}(\sqrt{\varepsilon}, b, \tilde{u}, \tilde{v}', \sqrt{\varepsilon}\tilde{v}_n), \qquad \text{où} \\ \widetilde{\Pi} &:= \Pi o \chi.\partial_{\tilde{u}}\mathcal{M}, \\ \widetilde{K}(\epsilon, \tilde{b}, \tilde{u}, \tilde{v}) &:= K(\epsilon, \chi(b, \tilde{u}), \mathcal{V}(\tilde{b}, \tilde{u}, \tilde{v})) + (\Pi o \chi.\partial_b \mathcal{M})(b, \tilde{u}).\partial_n b, \qquad \text{avec} \\ \mathcal{V}(\tilde{b}, \tilde{u}, \tilde{v}) &:= \partial_{\tilde{u}}\mathcal{M}(b, \tilde{u}).\tilde{v} + \partial_b \mathcal{M}(b, \tilde{u}).\partial_y b. \end{aligned}$$

La famille de problèmes mixtes paraboliques obtenues vérifient les mêmes hypothèses que les problèmes $\mathbf{P}^\varepsilon(T_0)$. En particulier, en notant

$$\widetilde{\Lambda}_b := \{\tilde{u} \in \mathbb{R}^N / \widetilde{\mathbf{\Phi}}(b, \tilde{u}) = 0\},$$

on a la propriété d'orthogonalité

$$\forall (b, \tilde{u}) \in \mathbb{R}^{N'} \times \widetilde{\Lambda}_b, \qquad \ker \widetilde{\Pi}(b, \tilde{u}) = (\ker D_{\tilde{u}} \widetilde{\mathbf{\Phi}}(b, \tilde{u}))^{\perp \widetilde{E}_{n,n}(b,\tilde{u})}.$$

11. Extensions. On a choisi un cadre simplifié. Les résultats s'étendent aux cas de domaines situés localement du même côté de leur bord C^∞, à des solutions de régularité finie et à des conditions initiales (ou dans le passé) plus générales (Sueur, 2006a).

2. Exposé des Résultats

2.1. *Résultat Principal*

Dans cette section, nous allons donner le résultat principal de l'article à travers un théorème plus précis que le Théorème 1.7 donné en introduction et qui s'obtient par une analyse du type BKW.

Considèrons un temps T positif quelconque et introduisons les espaces

$$\mathcal{N}_\theta(T) := H^\infty(\Omega_T^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_\theta^+)), \qquad \mathcal{N}_z(T) := H^\infty(\Omega_T^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_z^+)), \tag{16}$$

où $\mathcal{S}$ désigne l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide, et l'espace de profils

$$\mathcal{P}(\Omega_T^+) := \{\mathcal{U}(t,x,z,\theta) = \mathcal{U}_a(t,x) + \mathcal{U}_b(t,x,\theta) + \mathcal{U}_c(t,x,z) \text{ où } \mathcal{U}_a \in H^\infty(\Omega_T^+), \\ \times\, \mathcal{U}_b \in \mathcal{N}_\theta(T) \text{ et } \mathcal{U}_c \in \mathcal{N}_z(T)\}.$$

La fonction $\mathcal{U}_a$ est la partie régulière ou intérieur du profil, $\mathcal{U}_b$ est un terme de couche limite caractéristique et $\mathcal{U}_c$ un terme de couche limite non caractéristique.

On note, pour $0 \le i \le n-1$, $Z_i := \partial_i$ et $Z_n := h(x_n)\partial_n$ où h est une fonction C^∞ à valeurs strictement positives et bornée sur $\mathbb{R}_+$ telle que $h(x_n) = x_n$ quand $0 \le x_n \le 1$. La famille $Z := (Z_i)_{0\le i\le n}$ est génératrice de l'algèbre des champs de vecteurs C^∞ tangents à $\{x_n = 0\}$. Pour un $n+1$-uplet $\alpha := (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}$, on note $|\alpha|$ la longueur $|\alpha| := \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$ et $Z^\alpha := Z_0^{\alpha_0}\cdots Z_n^{\alpha_n}$.

On définit pour $s \in \mathbb{N}$, les normes

$$|u\|_{s,T} := \sum_{|\alpha|\le s} \|Z^\alpha u\|_{L^2(\Omega_T^+)}, \tag{17}$$

$$|\!|\!|u|\!|\!|_{s,T}^\varepsilon := \begin{cases} |u\|_{s,T} & \text{si } s = 0 \\ |u\|_{s,T} + \sum_{k=1}^{s} \varepsilon^{k-\frac12} \left\|\partial_n^k u^\varepsilon\right\|_{s-k,T} & \text{si } s \ge 1, \end{cases} \tag{18}$$

et les ensembles

$$\Lambda^s(T) := \left\{(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \left(L^2\left(\Omega_T^+\right)\right)^{]0,1]} / \exists \varepsilon' \in]0,1] / \sup_{\varepsilon\in]0,\varepsilon']} |\!|\!|u^\varepsilon|\!|\!|_{s,T}^\varepsilon < \infty\right\}.$$

Remarquons que Λ^s est un ensemble de familles de fonctions (à un paramètre) adapté au problème puisque si $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\Omega_T^+)$ alors la famille $(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par

$$u^\varepsilon(t,x) := \mathcal{U}\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \tag{19}$$

est pour tout $s \in \mathbb{N}$ dans $\Lambda^s(T)$. Insistons notamment sur le fait qu'un profil de couche limite non caractéristique est un $O(\sqrt{\varepsilon})$ dans L^2 alors qu'un profil de couche limite caractéristique est un $O(\varepsilon^{\frac14})$.

Ainsi si l'on dispose d'un développement

$$w^\varepsilon(t,x) := \sum_{j=0}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \tag{20}$$

on peut écrire, pour $0 \leq k' \leq k$,

$$w^\varepsilon(t,x) := \sum_{j=0}^{k'} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}^{k'+1} r^\varepsilon(t,x) \tag{21}$$

avec $r^\varepsilon \in \Lambda^s(T)$, pour tout $s \in \mathbb{N}$.

De tels développements à trois échelles, pour des problèmes où apparaissent à la fois des couches limites caractéristiques et non caractéristiques, ont été introduit par Guès (1995). L'article Sueur (2006a) introduit pour ce type de problème l'espace de profil $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$ et les ensembles $\Lambda^s(T)$. Signalons aussi que des outils similaires sont utilisés dans Sueur (2006b).

Le résultat central de l'article est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Il existe un réel $\varepsilon_0 \in]0,1]$ tel que pour tout entier naturel $k \geq 2$, pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, le problème $\mathbf{P}^\varepsilon(T_0)$ admette une et une seule solution u^ε et*

$$u^\varepsilon(t,x) = u^0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\,\mathcal{U}_b^1\left(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{j=2}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}^{k+1} R^\varepsilon(t,x)$$

où $\mathcal{U}_b^1 \in \mathcal{N}_\theta(T_0)$, les $(\mathcal{U}^j)_{2\leq j\leq k}$ sont dans $\mathcal{P}(\Omega_{T_0}^+)$ et $R^\varepsilon \in \Lambda^s(T_0)$, pour tout $s \in \mathbb{N}$.

Indications sur la preuve. Dans la Section 4, nous donnons un schéma détaillé de la preuve du Théorème 2.1. Nous évoquons ici, plus succinctement, les points clés de la preuve.

L'Hypothèse 1.3 rend possible un changement non linéaire de fonction inconnue qui transforme le problème initial en un problème pour lequel la matrice normale de l'opérateur hyperbolique est redressée (cf. Section 4.1). Ce redressement est la manifestation d'une propriété de *transparence* conférée au problème par l'Hypothèse 1.3.

On cherche une famille de solutions approchées sous la forme d'un développement BKW (cf. Sections 4.2 et 5). On résoud pour cela une succession de problèmes pour les profils du développement. Signalons ici que si l'on utilise des profils similaires à ceux de Sueur (2006a,b), et que les équations de profils sont de même type, les conditions aux limites diffèrent. Un point crucial est que les couches limites sont de *petites amplitudes*. L'analyse spectrale du champ complémentaire Π, menée dans la Section 5.2, est déterminante dans la compréhension de ce fait. L'ordre de résolution des problèmes pour les profils n'est par conséquent pas le même que dans Sueur (2006a,b). De plus, exploitant la structure redressée de la matrice normale de l'opérateur hyperbolique, on observe que le comportement des couches limites caractéristiques est linéaire. On obtient ainsi une famille de solutions approchées jusqu'au temps T_0.

On prouve ensuite l'existence d'une famille de solutions exactes des problèmes mixtes paraboliques ayant pour partie principale la famille de solutions approchées de la première étape (cf. Sections 4.3, 4.4 et 6). La différence est une famille de restes que l'on obtient comme solutions de problèmes mixtes paraboliques quasilinéaires et pour lesquels on établit des estimations uniformes en ε. Parceque nous considèrons des conditions aux limites non linéaires ET de type Dirichlet–Neumann, cette étape est très difficile. Nous surmontons cette difficulté en réalisant une *famille de changements de fonctions inconnues*. Cetter famille est paramétrée par ε par l'intermédiaire de la famille de solutions approchées construites lors de la première étape. Les changements de fonctions inconnues sont linéaires. On obtient une famille de problèmes pour lesquelles la partie la plus singulière des conditions aux limites est redressée.

Comparaison avec l'optique géométrique. Notons ici l'analogie avec l'optique géométrique: pour la propagation d'oscillations monophasées pour un système hyperbolique quasilinéaire, on a, en général, des résultats positifs que dans le régime dit faiblement non linéaire. Ce dernier correspond à des oscillations d'amplitude ε et de fréquence de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$. Les oscillations sont transportées par un champ caractéristique de l'opérateur hyperbolique. En général, l'équation des paquets d'onde contient un terme non linéaire de type Burgers, précédé d'un coefficient d'interaction γ. Lorsque le champ caractéristique est linéairement dégénérée, ce coefficient s'annule. C'est le phénomène de transparence. Dans le cas des couches limites caractéristiques avec une viscosité d'ordre ε, l'équivalent du régime faiblement non linéaire est le cas de couches caractéristiques avec des valeurs en $O(\sqrt{\varepsilon})$. Nous verrons dans la Section 5 que les profils $\mathcal{U}_b^j$ vérifient des problèmes de type hyperbolique-parabolique. L'équation de profil pour $\mathcal{U}_b^1$ fait, à priori, intervenir un terme non linéaire de type Burgers. Le changement non linéaire de fonction inconnue induit par l'Hypothèse 1.3 (cf. Section 4.1) assure que ce terme est nul, caractérisant ainsi un phénomène de transparence.

Notons également que dans le cas d'un champ caractéristique linéairement dégénérée, on peut augmenter la force des oscillations. Aussi, dispose t'on aujourd'hui de résultats positifs concernant la propagation d'oscillations de grandes amplitudes i.e., d'amplitudes en O(1) en dimension un d'espace. L'amplitude ne peut pas être autant poussée, en général, en plusieurs dimension d'espace, comme le montre le travail de Serre (1995). Cheverry et al. (2003) donne pourtant des résultats positifs pour ce que les auteurs appellent des oscillations fortes c'est-à-dire d'amplitude en $O(\sqrt{\varepsilon})$. Cheverry et al. (2004) montre qu'il est même possible de propager des solutions sous forme d'oscillations de grande amplitude polarisées sur l'entropie pour le système d'Euler. Il serait intéressant de chercher des résultats analogues pour les couches limites.

Polarisation et estimation. Le Théorème 1.7 donné en introduction est une conséquence du Théorème 2.1. En fait, on peut même déduire du Théorème 2.1 des estimations plus précises de $u^\varepsilon - u^0$ dans des espaces de type Sobolev. Nous allons présenter ces estimations plus bas dans cette section. Avant cela, nous donnons des propriétés de polarisation des profils de couches limites intervenant dans le Théorème 2.1. Celles-ci sont montrées au cours de sa démonstration. Ces propriétés de polarisation permettent de donner des estimations plus précises de $u^\varepsilon - u^0$ pour certaines coordonnées.

Lorsqu'on dispose d'une fonction régulière u (à valeurs vectorielles ou matricielles) sur Ω_T^+, on note $\mathring{u}$ sa trace sur Γ_T. On définit également, pour tout $(t, y) \in \Gamma_T$,

$$\mathring{A}_n(t, y) := A_n(\mathring{b}(t, y), \mathring{u}^0(t, y)),$$
$$\mathring{E}_n(t, y) := E_{n,n}(\mathring{b}(t, y), \mathring{u}^0(t, y)).$$

On introduit les champs d'espaces vectoriels:

$$E_+(t,y) := \sum_{\lambda>0} \ker\big(\mathring{E}_{n,n}^{-1}\mathring{A}_n(t,y) - \lambda Id\big), \qquad E_0(t,y) := \ker \mathring{A}_n(t,y),$$
$$E_-(t,y) := \sum_{\lambda<0} \ker\big(\mathring{E}_{n,n}^{-1}\mathring{A}_n(t,y) - \lambda Id\big).$$

A ces trois sous-espaces on associe, pour tout (t,y), leur dimension respective d_+, d_0, et d_- et les projecteurs Π_+, Π_0, et Π_- associés à la décomposition de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N = E_+ \oplus E_0 \oplus E_-$. Par exemple, Π_+ est le projecteur sur E_+ parallélement à $E_- \oplus E_0$. En général, ces projecteurs ne sont donc pas orthogonaux. Une conséquence de l'Hypothèse 1.1 est que les valeurs d_+, d_-, et d_0 sont indépendantes de (t,y). Une conséquence de l'Hypothèse 1.2 est que $r = d_+$. Au niveau de la couche limite caractéristique, on a l'équation de polarisation:

$$(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^1 = 0 \tag{22}$$

et la relation de polarisation suivante pour les deux premiers profils de couche limite non caractéristique:

$$(Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^2 = (Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^3 = 0. \tag{23}$$

En fait, ces propriétés (22) et (23) sont vérifiées respectivement par le premier profil non nul de couche limite caractéristique et par les deux premiers profils non nuls de couche limite non caractéristique. C'est en tenant compte des propriétés (22) et (23) que l'on déduit du Théorème 2.1 les estimations qui suivent. On introduit les normes

$$\|u\|_{H^{m,s}(\Omega_T)} := \sum_{i+|\alpha|\le m;\, i\le s} \|Z^\alpha \partial_n^i u\|_{L^2(\Omega_T^+)}$$

qui différentient régularités normale et conormale. On définit les quantités

$$U_+^\varepsilon := \Pi_+(u^\varepsilon - u^0), \qquad U_-^\varepsilon := \Pi_-(u^\varepsilon - u^0), \qquad U_0^\varepsilon := \Pi_0(u^\varepsilon - u^0). \tag{24}$$

Elles vérifient, lorsque $\varepsilon \to 0^+$, les estimations suivantes:

- dans la norme L^∞

$$\|U_+^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_{T_0}^+)} = O(\varepsilon), \qquad \|U_-^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_{T_0}^+)} = O(\varepsilon), \qquad \|U_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_{T_0}^+)} = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

- dans les normes $H^{m,s}$,

$$\|U_+^\varepsilon\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} = O\big(\varepsilon\big(1 + \varepsilon^{\frac14 - \frac s2}\big)\big) \qquad \forall s \in \left[0, \frac52\right],$$
$$\|U_-^\varepsilon\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} = O\big(\varepsilon\big(1 + \varepsilon^{\frac12 - s} + \varepsilon^{\frac14 - \frac s2}\big)\big) \qquad \forall s \in \left[0, \frac32\right],$$
$$\|U_0^\varepsilon\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} = O\big(\varepsilon^{\frac34 - \frac s2}\big) \qquad \forall s \in \left[0, \frac32\right].$$

Dans le cas où le bord est non caractéristique, du fait que les couches limites non caractéristiques sont plus petites que les couches limites caractéristiques, on peut améliorer les estimations en

$$\|U_+^\varepsilon\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} = O\big(\varepsilon\big(1+\varepsilon^{\frac{3}{2}-s}\big)\big) \qquad \forall s \in \left[0, \frac{5}{2}\right], \tag{25}$$

$$\|U_-^\varepsilon\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} = O\big(\varepsilon\big(1+\varepsilon^{\frac{1}{2}-s}\big)\big) \qquad \forall s \in \left[0, \frac{3}{2}\right]. \tag{26}$$

On notera donc que la limitation de la convergence des u^ε vers u^0 provient des différentiations normales et de certaines composantes. Ceci est du à la présence de couches limites de faibles amplitudes.

2.2. *Conditions de Dirichlet* (6)

Nous examinons ici les cas des conditions de Dirichlet (6). Avec les techniques de cette article, on obtient le résultat suivant, à mettre en parallèle au Théorème 2.1.

Théorème 2.2. *Il existe un réel* $\varepsilon_0 \in]0, 1]$ *tel que pour tout entier naturel* $k \geq 2$, *pour* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, *le problème*

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^\varepsilon(b, u^\varepsilon, \partial_x u^\varepsilon, \partial)u^\varepsilon &= 0 \qquad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0}^+, \\ u^\varepsilon &= 0 \qquad \text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+, \\ u^\varepsilon &= u^0 \qquad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_0}, \end{aligned}$$

admette une et une seule solution u^ε *et*

$$u^\varepsilon(t,x) = u^0(t,x) + \sum_{j=2}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j \mathscr{U}^j\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}^{k+1} R^\varepsilon(t,x)$$

où les $(\mathscr{U}^j)_{2\leq j\leq k}$ *sont dans* $\mathscr{P}(\Omega_{T_0}^+)$ *et* $R^\varepsilon \in \Lambda^s(T_0)$, *pour tout* $s \in \mathbb{N}$.

On donne dans la Section 7 de l'article des indications sur la preuve de ce résultat. Elle suit les mêmes lignes que la preuve du Théorème 2.1, en plus simple. Une diffèrence essentielle entre les Théorèmes 2.1 et 2.2 est l'absence de couche limite caractéristique à l'ordre $\sqrt{\varepsilon}$: $\mathscr{U}_b^1$.

Michelson (1989) qui obtient des développements de couche limite de faible amplitude pour des problèmes hyperboliques perturbés par des viscosités dégénérées. D. Michelson considère des conditions très générales sur un bord non caractéristique mais suppose que la solution du problème hyperbolique limite u^0 vérifie des conditions au bord surdéterminées. Pour une condition de type Dirichlet, cette stratégie consiste à supposer que la fonction u^0 donnée par le Théorème 1.4 vérifie $u^0 = 0$ quand $(t,x) \in \Gamma_{T_0}$; et à considèrer pour les perturbations paraboliques des conditions de Dirichlet homogènes $u^\varepsilon = u^0$ pour $(t,x) \in \Gamma_{T_0}$. Le Théorème 2.2 généralise ceci au cas de bord caractéristique.

Comme dans la Section 2.1, les premiers profils de couches limites ont des propriétés de polarisation. Ici, le premier profil de couche limite caractéristique est $\mathcal{U}_b^2$ qui vérifie $(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^2$. Les deux premiers profils de couche limite non caractéristique $\mathcal{U}_c^2$ et $\mathcal{U}_c^3$ vérifient (23).

On déduit du Théorème 2.2 et des remarques précèdentes, lorsque $\varepsilon \to 0^+$, les estimations suivantes:

1. dans la norme L^∞ : $\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^\infty(\Omega_{T_0}^+)} = O(\varepsilon)$;
2. dans les normes $H^{m,s}$,

$$\|U_+^\varepsilon\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} = O\big(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{7}{4}-\frac{s}{2}} + \varepsilon^{\frac{5}{2}-s}\big) \qquad \forall s \in \left[0, \frac{5}{2}\right],$$

$$\|U_-^\varepsilon\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} = O\big(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{3}{2}-s} + \varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}}\big)) \qquad \forall s \in \left[0, \frac{3}{2}\right],$$

$$\|U_0^\varepsilon\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0}^+)} = O\big(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{5}{4}-\frac{s}{2}}\big) \qquad \forall s \in \left[0, \frac{5}{2}\right].$$

Dans le cas où le bord est non caractéristique, on a les estimations (25)–(26).

Dans la section suivante, nous donnons des exemples d'applications. Les sections suivantes sont consacrées à la démonstration du Théorème 2.1.

3. Applications

3.1. *Le Cas Unidimensionnel*

Un système hyperbolique linéaire en dimension $n = 1$ avec une condition aux limites portant sur un bord non caractéristique et satisfaisant la condition de Lopatinski peut se mettre sous une forme symétrique pour laquelle la condition aux limites est strictement dissipative (Serre, 1996).

3.2. *Les Équations de Maxwell dans le Vide Avec Condition d'onde Entrante*

Dans le vide, le système de Maxwell peut s'écrire:

$$\partial_t E - c.\operatorname{rot} B = 0, \qquad \partial_t B + c.\operatorname{rot} E = 0.$$

On considère la condition aux limites dite d' "onde entrante" (Donnat, 1994)

$$(E - cB \wedge \nu) \wedge \nu = 0$$

où ν est la normale sortante au milieu. Le problème vérifie les Hypothèses 1.1 ($d_0 = 2$), 1.2 (il est même strictement dissipatif) et 1.3 (le problème est linéaire). Prenant pour viscosité le Laplacien, on introduit le problème parabolique:

$$\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} \partial_t E^\varepsilon - c.\operatorname{rot} B^\varepsilon = \varepsilon \Delta E^\varepsilon \\ \partial_t B^\varepsilon + c.\operatorname{rot} E^\varepsilon = \varepsilon \Delta B^\varepsilon \end{array}\right\} & \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ \left.\begin{array}{l} (E^\varepsilon - cB^\varepsilon \wedge \nu) \wedge \nu = 0 \\ (\partial_\nu E^\varepsilon + c\partial_\nu B^\varepsilon \wedge \nu) \wedge \nu = 0 \\ \partial_\nu E^\varepsilon \wedge \nu = \partial_\nu B^\varepsilon \wedge \nu = 0 \end{array}\right\} & \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \end{array}\right. \tag{27}$$

où ∂_ν désigne la dérivée normale.

Notons que dans cette application, on considère des systèmes linéaires si bien que l'existence de solutions régulières aux problèmes (27) sur l'intervalle de temps $(0, T_0)$ est dans ce cas-là assurée. Le Théorème 2.1 donne cependant d'autres informations pertinentes sur les solutions u^ε. Il donne une description asymptotique, pour $\varepsilon \to 0^+$, des solutions u^ε à travers un développement de type BKW. De plus, une conséquence de ce développement est la convergence des solutions $(E^\varepsilon, B^\varepsilon)$ vers la solution (E^0, B^0) du problème:

$$\left.\begin{aligned} \partial_t E^0 - c.\operatorname{rot} B^0 = 0 \\ \partial_t B^0 + c.\operatorname{rot} E^0 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+$$
$$(E^0 - cB^0 \wedge \nu) \wedge \nu = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T.$$

Les quantités U_+, U_-, et U_0 correspondent ici à

$$U_+ := (E - cB \wedge \nu) \wedge \nu, \qquad U_- := (E + cB \wedge \nu) \wedge \nu, \qquad U_0 := \begin{bmatrix} (E.\nu)\nu \\ (B.\nu)\nu \end{bmatrix}.$$

3.3. *Solutions Discontinues de Systèmes Hyperboliques Semilinéaires*

On considère un opérateur

$$\mathscr{H} = A_0(t,x)\partial_t + \sum_{1 \le j \le n} A_j(t,x)\partial_j + B(t,x)$$

symétrique hyperbolique linéaire et on s'intéresse à des solutions particulières du problème

$$\begin{cases} \mathscr{H}u = F(t,x,u) + f(t,x) & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T, \\ u = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Omega_0, \end{cases} \tag{28}$$

où $\Omega_T := (0,T) \times \mathbb{R}^n$, sous forme de fonctions régulières de part et d'autre d'une hypersurface Γ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Les singularités envisagées sont des sauts de u ou de ses dérivées, l'hypersurface Γ étant supposée lisse et caractéristique. Comme on s'interesse à des résultats locaux, on peut, quitte à la redresser, supposer sans perte de généralité que $\Gamma = \{x_n = 0\}$.

On note $p - H^\infty(\Omega_T)$ l'espace des fonctions H^∞ de part et d'autre de Γ_T et on suppose que $f \in p - H^\infty(\Omega_T)$. Le fait que Γ soit une surface caractéristique se traduit par $Ker\,A_n \neq \{0\}$. Le saut n'est possible que sur la projection orthogonale sur $Ker\,A_n$ (condition de Rankine–Hugoniot cf. par exemple le livre de Serre, 1996). On suppose

Hypothèse 3.1. *L'espace $Ker\,A_n$ est de dimension constante sur* Γ.

C'est en particulier le cas lorsque l'opérateur est strictement hyperbolique. On dispose du résultat suivant (Métivier, 1986; Sueur, 2006b):

Théorème 3.2. *Il existe un temps T_0 et une unique solution régulière $u^0 \in p - H^\infty(\Omega_T)$ du problème*

$$\begin{cases} \mathscr{H}u = F(t,x,u) + f(t,x) & \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0}, \\ u = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Omega_0, \end{cases} \tag{29}$$

On va montrer que l'on peut obtenir ces solutions comme limites de solutions sur Ω_T^+ et $\Omega_T^- := (0,T) \times \mathbb{R}^n_-$ de l'équation perturbée par une petite viscosité. Par souci de simplicité, on choisira le Laplacien mais les résultats sont les mêmes pour toute viscosité uniformément elliptique. On considère l'équation

$$\mathscr{L}^\varepsilon u^\varepsilon = 0 \tag{30}$$

où

$$\mathscr{L}^\varepsilon u := \mathscr{H}u - (F(t,x,u) + f(t,x) + \varepsilon\Delta u). \tag{31}$$

Montrons en quoi ceci est un exemple d'application des résultats de la Section 2. On ramène, pour cela, le problème à un problème dans le demi-espace doublant le nombre d'inconnues.

- En ce qui concerne le problème hyperbolique, les conditions de transmission imposées par l'équation (conditions de Rankine–Hugoniot) se traduisent par des conditions aux limites maximales dissipatives (en fait même conservatives).

A u défini sur Ω_T^+, on associe u_+ sa restriction à Ω_T^+, u_- par $u_-(t,x) := u(t,y,-x_n)$, pour tout $(t,x) \in \Omega_T^+$ et $\mathbf{u} := \left[\begin{smallmatrix} u_+ \\ u_- \end{smallmatrix}\right]$. Pour tout (t,y), on note $\Pi_0(t,y)$ le projecteur orthogonal sur $\ker \mathring{A}_n(t,y)$. On a alors que u vérifie (29) si et seulement si $\mathbf{u}$ vérifie le problème mixte hyperbolique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathscr{H}}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t,x) & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ M\mathbf{u} = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \\ \mathbf{u} = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+ \end{cases} \tag{32}$$

où

$$M := \begin{bmatrix} (Id - \Pi_0) & -(Id - \Pi_0) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathscr{H}} := \begin{bmatrix} \mathscr{H}_+ & 0 \\ 0 & \mathscr{H}_- \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{H}_+ := \mathscr{H}, \qquad \mathscr{H}_- := A_{0,-}(t,x)\partial_t + \sum_{1 \le j \le n-1} A_{j,-}(t,x)\partial_j - A_{n,-}(t,x)\partial_n + B_-(t,x),$$

$$\mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) := \begin{bmatrix} F(t,x,u_+) \\ F(t,y,-x_n,u_-) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} := \begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix}.$$

Le problème (32) rentre ainsi dans le cadre des Théorèmes 1.4 et 2.1. La matrice normale du système est

$$\mathbf{A_n} := \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & -A_n \end{bmatrix}.$$

L'Hypothèse 3.1 assure que $\mathbf{A_n}$ vérifie l'Hypothèse 1.1. Le lemme suivant assure l'Hypothèse 1.2:

Lemme 3.3. *La condition aux limites est maximale dissipative i.e., la forme quadratique* $\langle \mathring{\mathbf{A}}_n ., .\rangle$ *est négative sur le sous-espace* $\ker M$ *et* $\ker M$ *est maximale pour cette propriété.*

Preuve. Soit $\mathbf{u} := \left[\begin{smallmatrix} u_+ \\ u_- \end{smallmatrix}\right] \in \ker M$. On a donc $(Id - \Pi_0)u_+ = (Id - \Pi_0)u_-$. Or,

$$\langle\langle \mathring{\mathbf{A}}_n \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathring{A}_n u_+, u_+\rangle - \langle \mathring{A}_n u_-, u_-\rangle.$$

Utilisant l'identité $\mathring{A}_n \Pi_0 = 0$ et la symétrie de $\mathring{A}_n$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathring{\mathbf{A}}_n \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle &= \langle \mathring{A}_n (Id - \Pi_0)u_+, (Id - \Pi_0)u_+\rangle - \langle \mathring{A}_n (Id - \Pi_0)u_-, (Id - \Pi_0)u_-\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi la forme quadratique $\langle \mathring{\mathbf{A}}_n ., .\rangle$ est négative sur le sous-espace $\ker M$. De plus, $\mathring{\mathbf{A}}_n$ possède $N + d_0$ valeurs propres négatives ou nulles et la somme des sous-espaces spectraux associés constitue un sous-espace maximal sur lequel la forme quadratique $\langle \mathring{\mathbf{A}}_n ., .\rangle$ est négative. Comme tous les sous-espaces maximaux pour cette propriété ont la même dimension $N + d_0 = dim \ker M$, le lemme est prouvé. □

L'Hypothèse 1.3 est trivialement satisfaite car l'opérateur $\mathscr{H}$ est linéaire. On note $\mathbf{\Pi}_0$ le projecteur orthogonal sur $\ker \mathring{\mathbf{A}}_n$.

- Intéressons nous maintenant aux perturbations paraboliques. La condition aux limites $\Pi \partial_n \mathbf{u} = 0$ équivaut à

$$(Id - \Pi_0)\partial_n u_+ = -(Id - \Pi_0)\partial_n u_- \qquad \text{et} \qquad \Pi_0 \partial_n u_+ = \Pi_0 \partial_n u_- = 0.$$

On associe à la fonction u^ε, une fonction $\mathbf{u}^\varepsilon$ définie sur Ω_T^+ à valeurs dans $\mathbb{R}^{2N}$ par $\mathbf{u}^\varepsilon := \left[\begin{smallmatrix} u_+^\varepsilon \\ u_-^\varepsilon \end{smallmatrix}\right]$, où u_+^ε est la restriction de u^ε à Ω_T^+ et u_-^ε est définie par

$$u_-^\varepsilon(t, x) := u^\varepsilon(t, y, -x_n) \qquad \text{pour } (t, x) \in \Omega_T^+.$$

On a alors l'équivalence suivante: u^ε vérifie (30) si et seulement si $\mathbf{u}^\varepsilon$ vérifie

$$\mathscr{L}^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon = 0 \qquad \text{sur} \qquad \Omega_T^+$$

où

$$\mathscr{L}^\varepsilon \mathbf{u} := \mathscr{H}\mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{\Delta} u - \mathbf{F}(t, x, \mathbf{u}) - \mathbf{f}$$

avec $\mathbf{\Delta} := \left[\begin{smallmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{smallmatrix}\right]$.

On considère donc les problèmes mixtes paraboliques:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon &= 0 && \text{pour } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ \left.\begin{aligned} M\mathbf{u}^\varepsilon &= 0 \\ \Pi \partial_n \mathbf{u}^\varepsilon &= 0 \end{aligned}\right\} && && \text{pour } (t, x) \in \Gamma_T \\ \mathbf{u}^\varepsilon &= 0 && \text{pour } (t, x) \in \Omega_0^+ \end{aligned}$$

On insiste sur le fait que les approximations $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ que l'on considère ici ne sont pas solutions de (11) sur Ω_T. Les conditions aux limites que l'on prescrit pour le problème réduit (à un demi-espace) diffèrent des conditions de raccord considérées dans Sueur (2006b). Précisemment, ce sont les conditions aux limites portant sur $\mathbf{\Pi}_0\mathbf{u}^\varepsilon$ qui sont modifiées. On définit $\mathbf{\Pi}_+$ (resp. $\mathbf{\Pi}_-$) le projecteur orthogonal associé à la somme directe des sous-espaces propres correspondants à des valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives). Les estimations de la Section 2 tiennent pour

$$U_+^\varepsilon := \mathbf{\Pi}_+(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0), \qquad U_-^\varepsilon := \mathbf{\Pi}_-(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0), \qquad U_0^\varepsilon := \mathbf{\Pi}_0(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0).$$

On notera le gain de régularité par rapports aux estimations de Sueur (2006b). Essentiellement, l'espace critique pour la convergence est $H^{\frac{1}{2}}$ dans Sueur (2006b) et $H^{\frac{3}{2}}$ ici. Le gain s'exprime aussi en vitesse de convergence dans L^2: celle-ci est de $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ dans Sueur (2006b) et de $\varepsilon^{\frac{3}{4}}$ ici.

Dans Sueur (2006b), on constate que l'on peut affiner les estimations dans le cas où la discontinuité n'affecte qu'une dérivée de la fonction. Plus précisemment, on montre que la convergence des u^ε vers u^0 tient dans des espaces de Sobolev H^s avec s d'autant plus élevé que la singularité est faible, c'est à dire plus la discontinuité affecte une dérivée d'ordre élevée. Dans le cas d'un saut de dérivée, les conditions de raccord de Sueur (2006b) peut donc conduire à une meilleure estimation que celle obtenue ici avec le champ complémentaire Π.

3.4. *Le Système d'Euler*

On note respectivement p, v, et s la pression, la vitesse et l'entropie, $\rho(p,s)$ la densité volumique, supposée strictement positive, et $\alpha(p,s) := \frac{\partial_p \rho(p,s)}{\rho(p,s)}$, le système d'Euler peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_v s &= 0, \\ \rho \mathbb{X}_v v + \nabla p &= 0, \\ \alpha \mathbb{X}_v p + \nabla . v &= 0, \end{aligned}$$

où l'on a noté $\mathbb{X}_v$ la dérivée particulaire $\mathbb{X}_v := \partial_t + v.\nabla$, soit encore

$$\left(A_0 \partial_t + \sum_{i=1}^n A_i \partial_i \right) \begin{bmatrix} s \\ v \\ p \end{bmatrix} = 0$$

où $A_0 := diag(1, \rho I_n, \alpha)$ et, pour $1 \le i \le n$, $A_i = \begin{bmatrix} v_i & 0 & 0 \\ 0 & \rho v_i I_n & e_i \\ 0 & {}^t e_i & \alpha v_i \end{bmatrix}$, où les $(e_i)_{1 \le i \le n}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Notons que dans cet exemple, on a $N = n + 2$. On supposera que α est strictement positif. En particulier, notant $v = (w, v_n)$ les vitesses tangentielles et normale, on a

$$A_n = v_n A_0 + \begin{bmatrix} 0_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On va considérer, pour condition aux limites, la condition naturelle $v_n = 0$. Le problème:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{X}_{v^0} s^0 = 0 \\ \rho(p^0, s^0)\mathbb{X}_{v^0} v^0 + \nabla p^0 = 0 \\ \alpha(p^0, s^0)\mathbb{X}_{v^0} p^0 + \nabla . v^0 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+$$
$$v^0.\nu = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T$$

est alors conservatif. Le bord est caractéristique de multiplicité constante égale à n. Guès (1990) assure que l'Hypothèse 1.3 est vérifiée. On introduit le problème mixte parabolique:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{X}_{v^\varepsilon} s^\varepsilon = \varepsilon \Delta s^\varepsilon \\ \rho(p^\varepsilon, s^\varepsilon)\mathbb{X}_{v^\varepsilon} v^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = \varepsilon \Delta v^\varepsilon \\ \alpha(p^\varepsilon, s^\varepsilon)\mathbb{X}_{v^\varepsilon} p^\varepsilon + \nabla . v^\varepsilon = \varepsilon \Delta p^\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+$$
$$\left.\begin{aligned} v^\varepsilon.\nu = 0 \\ \partial_\nu p^\varepsilon = \partial_\nu w^\varepsilon = \partial_\nu s^\varepsilon = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T.$$

Le Théorème 1.7 assure alors la convergence des solutions $(s^\varepsilon, v^\varepsilon, p^\varepsilon)$ vers (s^0, v^0, p^0). Les quantités U_+, U_-, et U_0 définies en (24) correspondent ici à

$$U_+ := v_n + p, \qquad U_- := v_n - p, \qquad U_0 := \begin{bmatrix} s \\ w \end{bmatrix}.$$

4. Schéma de la Preuve du Théorème 2.1

On prouve le Théorème 2.1 avec la stratégie de Sueur (2006a) et Sueur (2006b): on commence par prouver l'existence de solutions approchées sous la forme de développements BKW, puis on utilise un théorème d'approximation. Une difficulté est liée aux nonlinéarités. D'une part, le système de départ est quasilinéaire, au lieu de semilinéaire dans Sueur (2006a) et Sueur (2006b). D'autre part, nous considérons des conditions aux limites non linéaires, et qui plus est, de type mixte Dirichlet-Neumann.

Au cours de la preuve, nous allons utiliser de manière essentielle deux changements d'inconnus. Seul le premier est non linéaire.

4.1. *Changement Non Linéaire de Fonction Inconnue*

L'Hypothèse 1.3 rend possible un changement non linéaire de fonction inconnue qui transforme le problème initial en un problème pour lequel la condition aux limites (12) et, dans un certain sens, la matrice normale du système sont redressées. Ce problème redressé possède une propriété de transparence qui joue un rôle essentiel dans nos résultats. En particulier, elle permet d'obtenir une famille de solutions approchées jusqu'au temps T_0.

Explicitons l'Hypothèse 1.3. On note $(e_i)_{1\leq i\leq N}$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$ et M est la matrice constante, de taille $r \times N$, $M := [\, Id_r \;\; 0_{r,N-r} \,]$, de sorte que $\ker M = \mathrm{Vect}(e_i)_{N-r+1\leq i\leq N}$. On note aussi F_0 le sous-espace $F_0 := \mathrm{Vect}(e_i)_{N-d_0+1\leq i\leq N}$. Il existe

w_1 voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^{N'}$, w_2, $\tilde{w}_2$ voisinages ouverts de zero dans $\mathbb{R}^N$ et un difféomorphisme C^∞ de la forme

$$\chi : \tilde{w} \to w$$
$$(b, \tilde{u}) \mapsto (b, u) = (b, \mathscr{M}(b, \tilde{u}))$$

où $w := w_1 \times w_2$, $\tilde{w} := w_1 \times \tilde{w}_2$ tels qu'en notant $\tilde{\Lambda}_b := \mathscr{M}(b, .)^{-1}(\Lambda_b)$, on ait

- pour tout $b \in w_1$,

$$\widetilde{\Lambda}_b \cap \tilde{w}_2 = (\ker M) \cap \tilde{w}_2, \tag{33}$$

- pour tout couple de vecteurs $(b, \tilde{u}) \in w_1 \times ((\ker M) \cap \tilde{w}_2)$,

$$(\partial_{\tilde{u}} \mathscr{M}(b, \tilde{u}))^{-1}. \ker A_n o\chi(b, \tilde{u}) = F_0. \tag{34}$$

Dans le premier point, on redresse les conditions aux limites tandis que dans le second point, on redresse le noyau de la matrice normale du système. Notons que ce changement de fonction inconnue est utilisé par O. Guès dans sa preuve du Théorème 1.4 (cf. Guès, 1990).

4.1.1. Structure par Blocs de la Matrice Normale. Introduisons la matrice carrée, de taille $N \times N$, de variable $(b, \tilde{u})$:

$$\widetilde{A}_n :=^t \partial_{\tilde{u}} \mathscr{M}.A_n o\chi.\partial_{\tilde{u}} \mathscr{M}.$$

Compte-tenu de (34), on a, pour $(b, \tilde{u})$ dans $w_1 \times (\ker M \cap \tilde{w}_2)$,

$$\ker \widetilde{A}_n(b, \tilde{u}) = F_0. \tag{35}$$

Comme, de plus, la matrice $\widetilde{A}_n$ est symétrique, elle est, pour $(b, \tilde{u}) \in w_1 \times (\ker M \cap \tilde{w}_2)$, de la forme

$$\widetilde{A}_n(b, \tilde{u}) = \begin{bmatrix} H(b, \tilde{u}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où H est une matrice carrée de taille $N - d_0$ inversible.

4.1.2. Propriété de Transparence. On va déduire de ce qui précède le lemme suivant qui établit une propriété de transparence.

Lemme 4.1. *Pour tout couple de vecteurs* $(b, \tilde{u}, \tilde{h}) \in w_1 \times (\ker M \cap \tilde{w}_2) \times \ker M$,

$$\ker \widetilde{A}_n(b, \tilde{u}) \subset \ker(D_{\tilde{u}} \widetilde{A}_n(b, \tilde{u}).\tilde{h}). \tag{36}$$

Preuve. En effet, on a, pour $(b, \tilde{u}, \tilde{h}) \in w_1 \times (\ker M \cap \tilde{w}_2) \times \ker M$,

$$D_{\tilde{u}} \widetilde{A}_n(b, \tilde{u}).\tilde{h} = \begin{bmatrix} D_{\tilde{u}} H(b, \tilde{u}).\tilde{h} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, pour $N - d_0 + 1 \leq i \leq N$, on a $D_{\tilde{u}}\widetilde{A}_n(b, \tilde{u}).\tilde{h}.e_i = 0$. Avec (35), ceci prouve (36). $\square$

Nous allons voir que l'inclusion (36) reste vraie si, au lieu de parcourir $\ker M$, la variable $\tilde{h}$ parcourt $\ker \widetilde{A}_n(b, \tilde{u})$.

Corollaire 4.2. *Pour tout couple de vecteurs* $(b, \tilde{u}, \tilde{h}) \in w_1 \times (\ker M) \cap \tilde{w}_2 \times \ker \widetilde{A}_n(b, \tilde{u})$, *on a l'inclusion* (36).

Preuve. Commençons par rappeler que l'espace tangent à la variété Λ_b en un point u est $T_\theta \Lambda_b = \ker D_u \mathbf{\Phi}(\theta)$, où $\theta = (b, u)$. Une conséquence de l'Hypothèse 1.2 est que pour θ dans w,

$$\phi(\theta) = 0 \Rightarrow \ker A_n(\theta) \subset \ker D_u \mathbf{\Phi}(\theta). \tag{37}$$

De plus, on a par hypothèse que, pour tout $b \in w_1$,

$$\mathcal{M}^{-1}(b, .)(\Lambda_b \cap w_2) = \ker M \cap \tilde{w}_2.$$

En conséquence, on a, pour $\tilde{\theta} := (b, \tilde{u}) \in \tilde{w}$,

$$(\partial_{\tilde{u}} \mathcal{M})^{-1}(\tilde{\theta}).(\ker D_u \mathbf{\Phi}(\chi(\tilde{\theta}))) = \ker M.$$

Appliquant $(\partial_{\tilde{u}} \mathcal{M})^{-1}$ à l'inclusion (37), on a $\ker \widetilde{A}_n(b, \tilde{u}) \subset \ker M$. On obtient ainsi le résultat souhaité. $\square$

Remarque 4.3. Au premier abord, on pourrait penser que la propriété énoncée dans le Lemme 4.2 est plus faible que l'Hypothèse 1.3 dont nous sommes partis, puisque nous avons restreint le domaine que parcourt $\tilde{h}$. Il en est autrement puisque nous allons montrer une réciproque. On suppose que les Hypothèses 1.1 et 1.2 sont vérifiées. Supposons maintenant qu'il existe w_1 voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^{N'}$, w_2, $\tilde{w}_2$ voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^N$ et un difféomorphisme C^∞ de la forme

$$\begin{aligned} \chi : \tilde{w} &\to w \\ (b, \tilde{u}) &\mapsto (b, u) = (b, \mathcal{M}(b, \tilde{u})) \end{aligned}$$

où $w := w_1 \times w_2$, $\tilde{w} := w_1 \times \tilde{w}_2$ tels qu'en notant $\tilde{\Lambda}_b := \mathcal{M}(b, .)^{-1}(\Lambda_b)$, on a pour tout couple de vecteurs $(b, \tilde{u}, \tilde{h}) \in w_1 \times \tilde{\Lambda}_b \cap \tilde{w}_2 \times \ker \widetilde{A}_n(b, \tilde{u})$, l'inclusion (36).

Soit $(r_1(\tilde{\theta}), \ldots, r_{d_0}(\tilde{\theta}))$ une base de $\ker \widetilde{A}_n(\tilde{\theta})$, dépendant de façon C^∞ de $\tilde{\theta}$ parcourant $w_1 \times (\tilde{\Lambda}_b \cap \tilde{w}_2)$. Considèrons un couple p, q d'entiers compris entre 1 et d.

Comme l'identité $(\widetilde{A}_n r_p)(\tilde{\theta}) = 0$ tient pour tout $\tilde{\theta} \in w_1 \times (\tilde{\Lambda}_b \cap \tilde{w}_2)$ et que $\ker \widetilde{A}_n(\tilde{\theta}) \subset T_\theta \tilde{\Lambda}_b$, on peut appliquer le champ de vecteurs $r_q.\nabla_{\tilde{u}}$, d'où

$$\{(r_q.\nabla_{\tilde{u}})\widetilde{A}_n\} r_p + \widetilde{A}_n \{(r_q.\nabla_{\tilde{u}}) r_p\} = 0. \tag{38}$$

Comme, pour tout couple de vecteurs $(b, \tilde{u}, \tilde{h}) \in w_1 \times (\tilde{\Lambda}_b \cap \tilde{w}_2) \times \ker \widetilde{A}_n(b, \tilde{u})$, on a, par hypothèse, l'inclusion l'inclusion (36), il vient

$$r_p(b, \tilde{u}) \in \ker \widetilde{A}_n(b, \tilde{u}) \subset \ker D_{\tilde{u}} \widetilde{A}_n(b, \tilde{u}).r_q(b, \tilde{u}) = \ker(r_q.\nabla_{\tilde{u}})\widetilde{A}_n(b, \tilde{u}),$$

c'est à dire $\{(r_q.\nabla_{\tilde{u}})\widetilde{A}_n\}r_p = 0$.

De (38), on tire alors $\widetilde{A}_n\{(r_q.\nabla_{\tilde{u}})r_p\} = 0$ c'est à dire $(r_q.\nabla_{\tilde{u}})r_p \in \ker \widetilde{A}_n$.

En échangeant p et q, on a de même $(r_p.\nabla_{\tilde{u}})r_q \in \ker \widetilde{A}_n$. Par soustraction, on obtient que le crochet de Lie $[r_p(b, .), r_q(b, .)]$ appartient à $\ker \widetilde{A}_n(b, .)$. On a ainsi montré que, pour $\tilde{\theta}$ voisin de 0, la distribution $\ker \widetilde{A}_n(b, .)$ sur $\tilde{\Lambda}_b$ est involutive. Comme cette notion est préservée par difféomorphisme, on en déduit l'hypothèse 1.3.

Remarque 4.4. Supposons que l'on ait (36) pour tout couple de vecteurs $(b, \tilde{u}, \tilde{h}) \in w_1 \times \tilde{\Lambda}_b \cap \tilde{w}_2 \times \ker \widetilde{A}_n(b, \tilde{u})$, et considèrons le changement d'inconnue linéaire $\tilde{u} = G(b)\check{u}$. Notons

$$\check{\Lambda}_b := G(b)^{-1}\tilde{\Lambda}_b \qquad \text{et} \qquad \check{A}_n(b, \check{u}) := {}^tG_2(b).A_n(b, G(b)\check{u}).G(b).$$

On a alors pour tout $(\check{u}, \check{h}) \in \check{\Lambda}_b \times \ker \check{A}_n(b, u)$, l'inclusion

$$\ker \check{A}_n(b, u) \subset D_{\check{u}}\check{A}_n(b, \check{u}).\check{h}.$$

4.1.3. Réécriture des Problèmes Initiaux. On supposera, dans la suite, le changement de fonction inconnue du début de la Section 4.1 effectué.

Pour ne pas alourdir l'écriture, on conservera les notations des problèmes initiaux, omettant volontairement les tildes. Par ailleurs, nous avons vu dans le commentaire 10, qui suit le Théorème 1.7 que les hypothèses sont préservées par changement non linéaire de fonction inconnue. Nous travaillons donc désormais avec des problèmes perturbés qui s'écrivent

$$\mathscr{L}^\varepsilon(b, u^\varepsilon, \partial_x u^\varepsilon, \partial)u^\varepsilon = 0 \qquad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+, \tag{39}$$

$$Mu^\varepsilon = 0 \qquad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_{T_0}, \tag{40}$$

$$\Psi^\varepsilon(b, u^\varepsilon, \partial_x u^\varepsilon) = 0 \qquad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_{T_0}, \tag{41}$$

$$u^\varepsilon = 0 \qquad \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+, \tag{42}$$

et qui satisfont pour tout couple de vecteurs $(b, u, h) \in w_1 \times ((\ker M) \cap \tilde{w}_2) \times \ker A_n (b, \tilde{u})$ l'inclusion $\ker A_n(b, u) \subset \ker(D_u A_n(b, u).h)$. La condition d'orthogonalité (9) se réexprime ainsi:

$$\text{si}\, Mu = 0 \qquad \text{alors} \qquad \ker \Pi(b, u) = (\ker M)^{\perp E_{n,n}(b,u)}. \tag{43}$$

Remarque 4.5. Notons que la condition aux limites (13) n'est, elle, pas redressée: la condition (41) n'est en général pas plus simple que la condition (13). Simplifier la condition (13), en même temps que l'on réduit la condition (12) et la matrice normale de la partie hyperbolique, n'est pas possible en position générale. Malgré la nonlinéarité de la condition (41), la construction d'une famille de solutions approchées est néanmoins possible. Rappelons que dans notre problématique (cf. introduction), la viscosité est supposée donnée. Si, au lieu de ça, on se laisse le choix d'une viscosité parmi celles vérifiant l'hypothèse 1.5, il est alors possible de redresser la condition (13). Plus précisemment, un choix judicieux conduit à une matrice $E_{n,n}(b, u)$ dans les équations (39) et (43) ne dépendant pas de u. On considère alors un champ de matrices Π ne dépendant pas non plus de u. On redresse alors ce champ au moyen d'un changement linéaire d'inconnue qui préserve la matrice normale A_n et la condition aux limites (40). Dans ce cas, la suite de la preuve peut être simplifiée. En particulier, dans la preuve du théorème 4.7, les changements d'inconnues de la Section 6.3 deviennent inutiles.

4.2. *Construction d'une Famille de Solutions Approchées*

Le théorème suivant prouve l'existence de solutions approchées de la forme (20) de tout ordre. Par commodité, compte-tenu de la méthode de démonstration, on préfère introduire un profil de couche limite caractéristique et deux profils de couche limite non caractéristique supplémentaires. On introduit aussi, pour tout $T \geq 0$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, les espaces

$$\mathscr{B}^s(T) := \left\{(v^\varepsilon)_\varepsilon \in (H^s(\Gamma_T))^{]0,1]} / \sup_{0<\varepsilon\leq 1} \|v^\varepsilon\|_{H^s(\Gamma_T)} < \infty\right\}.$$

Théorème 4.6. *Pour tout entier naturel $k \geq 2$, il existe des profils $\mathscr{U}_b^1 \in \mathscr{N}_\theta(T_0)$, $(\mathscr{U}^j)_{2\leq j\leq k} \in \mathscr{P}(\Omega_{T_0}^+)$, $\mathscr{U}_b^{k+1} \in \mathscr{N}_\theta(T_0)$, $\mathscr{U}_c^{k+1}$, $\mathscr{U}_c^{k+2} \in \mathscr{N}_z(T_0)$ tel que la famille $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par*

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(t,x) &= u^0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\,\mathscr{U}_b^1\left(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{j=2}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j \mathscr{U}^j\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ &\quad + \sqrt{\varepsilon}^{k+1}\left\{\mathscr{U}_b^{k+1}\left(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \mathscr{U}_c^{k+1}\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}\right)\right\} + \sqrt{\varepsilon}^{k+2}\mathscr{U}_c^{k+2}\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}\right) \end{aligned} \tag{44}$$

vérifie

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^\varepsilon(b, a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, \partial)a^\varepsilon &= \sqrt{\varepsilon}^{k+1} R^\varepsilon && \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0}^+, \\ \left.\begin{aligned} Ma^\varepsilon &= \sqrt{\varepsilon}^{k+1} R_1^\varepsilon \\ \Psi^\varepsilon(b, a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon) &= \sqrt{\varepsilon}^{k+1} R_2^\varepsilon \end{aligned}\right\} & && \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_0}, \\ a^\varepsilon &= 0 && \text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+ \end{aligned}$$

où $R_\varepsilon \in \Lambda^s(T_0)$; R_1^ε et R_2^ε sont dans $\mathscr{B}^s(T_0)$, pour tout s entier naturel.

La preuve du Théorème 4.6 fait l'objet de la Section 5.

4.3. *Existence d'une Famille de Solutions Exactes*

Le théorème suivant prouve l'existence d'une famille de solutions exactes de la famille de problèmes $\mathbf{P}^\varepsilon$ admettant un développement asymptotique dont la partie principale est une famille de solutions approchées des problèmes $\mathbf{P}^\varepsilon$.

Soient, pour T positif et $m \in \mathbb{N}$, les ensembles

$$\mathscr{A}^m(T) := \Big\{ (a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in W^{m,\infty}(\Omega_T^+)/\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2/j+k \leq m$$
$$\sup_{\varepsilon\in]0,1]} \|(\varepsilon\partial_n)^{max(0,k-1)} Z^j a^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_T^+)} < \infty \Big\}.$$

Notons que si $\mathscr{U} \in \mathscr{P}(\Omega_T^+)$ alors la famille $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par (44) est dans $\mathscr{A}^m(T)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Théorème 4.7. *Soit $M > 1$ et $m_0 \geq \frac{n}{2} + 1$. Alors si $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \mathscr{A}^{m_0+1}(T_0)$ est une famille de solutions approchées de $\mathbf{P}^\varepsilon(T_0)$ au sens où*

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^\varepsilon(b, a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, \partial) a^\varepsilon &= \varepsilon^M g^\varepsilon && \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0}^+ \\ \left.\begin{aligned} Ma^\varepsilon &= 0 \\ \Psi^\varepsilon(b, a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon) &= \varepsilon^M h^\varepsilon \end{aligned}\right\} & && \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_0} \\ a^\varepsilon &= 0 && \text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+ \end{aligned}$$

avec $(g^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \Lambda^{m_0}(T_0)$ alors il existe un réel $\varepsilon_0 \in]0,1]$ et une famille $(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ de solutions exactes des problèmes $\mathbf{P}^\varepsilon(T_0)$ telle que

$$\left(\frac{u^\varepsilon - a^\varepsilon}{\varepsilon^M}\right)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \Lambda^{m_0}(T_0).$$

Ce théorème, démontré à la Section 6, s'inspire des théorèmes d'approximations utilisés dans Sueur (2006a) et Sueur (2006b). Les différences essentielles résident dans les conditions aux limites et dans le caractère quasilinéaire. Si dans le cas semilinéaire, le contrôle des semilinéarités peut se faire par une norme L^∞, on utilise ici une norme Lipschitz. C'est pourquoi, on est ici amené à faire l'hypothèse $M > 1$ alors que dans le cas semilinéaire, on ne supposait que $M > \frac{1}{4}$.

Au cours de la preuve du Théorème 4.7, nous cherchons une famille de solutions exactes $(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ sous la forme $u^\varepsilon = a^\varepsilon + \varepsilon^M\ w^\varepsilon$. Nous obtenons pour $(w^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ une famille de problèmes mixtes paraboliques dans lesquelles les a^ε jouent le rôle de paramètres. Pour chaque valeur de ε, nous effectuons un changement linéaire d'inconnue qui permet de redresser les conditions aux limites. Il s'agit donc d'une famille de changements d'inconnues, paramétrée par ε par l'intermédiaire de la famille de solutions approchées $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ construites lors de la première étape. Ce redressement joue un rôle essentiel dans le contrôle, uniforme en ε, des commutateurs des dérivations conormales avec les conditions aux limites.

4.4. *Relèvement Partiel des Conditions aux Limites*

Le Théorème 2.1 s'obtient en appliquant le Théorème 4.7 avec, pour famille de solutions approchées (a^ε) un relèvement du développement donné par le Théorème 4.6, pour $k \geq 2$. Précisons cela. Nous allons considérer la famille de solutions $(\tilde{a}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par $\tilde{a}^\varepsilon(t,x) := a^\varepsilon(t,x) + \check{a}^\varepsilon(t,x)$ où $\check{a}^\varepsilon(t,x) := \sqrt{\varepsilon}^{k+1}\mathbf{R}_1^\varepsilon(t,y)e^{-x_n}$ et $\mathbf{R}_1^\varepsilon := {}^t[\, R_1^\varepsilon \ \ 0\,]$. Notons pour commencer que la famille $(\tilde{a}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ est bien dans $\mathscr{A}^{m_0+1}(T)$.

De plus, on a le résultat suivant.

Proposition 4.8. *La famille $(\tilde{a}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ vérifie*

$$\mathscr{L}^\varepsilon(b,\tilde{a}^\varepsilon,\partial_x\tilde{a}^\varepsilon,\partial)\tilde{a}^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}^{k+1}\tilde{R}^\varepsilon \qquad \text{quand } (t,x)\in\Omega^+_{T_0}, \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned} M\tilde{a}^\varepsilon &= 0 \\ \Psi^\varepsilon(b,\tilde{a}^\varepsilon,\partial_x\tilde{a}^\varepsilon) &= \sqrt{\varepsilon}^{k+1}\tilde{R}^\varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{quand } (t,x)\in\Gamma_{T_0}, \tag{46}$$

$$\tilde{a}^\varepsilon = 0 \qquad \text{quand } (t,x)\in\Omega^+_0, \tag{47}$$

où $(\widetilde{R}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}\in\Lambda^s(T_0)$ et $(\widetilde{R}^\varepsilon_2)_{\varepsilon\in]0,1]}\in\mathscr{B}^s(T_0)$, pour tout s entier naturel.

Preuve. Par un développement de Taylor, on obtient l'existence

- de matrices $E^\flat_{i,j}$ de taille $N^2\times N$, de classe C^∞ telles que, pour tout $(b,u,v)\in\mathbb{R}^{N'}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$,

$$E_{i,j}(b,u+v) = E_{i,j}(b,u) + v.E^\flat_{i,j}(b,u,v).$$

Ecrivant les matrices $E^\flat_{i,j}$ par blocs:

$$E^\flat_{i,j} := \begin{bmatrix} E^{\flat,1}_{i,j} \\ \vdots \\ E^{\flat,N}_{i,j}\end{bmatrix}$$

où les $E^{\flat,k}_{i,j}$ sont des matrices $N\times N$, la notation $v.E^\flat_{i,j}$ correspond à

$$v.E_{i,j} := \sum_{1\le k\le N} v_k.E^{\flat,k}_{i,j}, \tag{48}$$

où $v=(v_1,\ldots,v_N)$.
Introduisons l'opérateur $\mathscr{E}_P$ tel que

$$\mathscr{E}_P(b,u,\partial) := \sum_{1\le i,j\le n}\partial_i E_{i,j}(b,u)\partial_j. \tag{49}$$

On obtient

$$\mathscr{E}_P(b,u+v,\partial_x) = \mathscr{E}_P(b,u,\partial_x) + (v,\partial_x v).\mathscr{E}^\flat_P(b,u,v,\partial_x) \tag{50}$$

où

$$\mathscr{E}^\flat_P(b,u,v,\partial_x) = \begin{bmatrix}\mathscr{E}^{\flat,0}_P(b,u,v,\partial_x) \\ \mathscr{E}^{\flat,1}_P(b,u,v,\partial_x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathscr{E}^{\flat,n}_P(b,u,v,\partial_x)\end{bmatrix}$$

avec

$$\mathscr{E}^{\flat,0}_P(b,u,v,\partial_x) := \sum_{1\le i,j\le n}\partial_i E^\flat_{i,j}(u,v)\partial_j,$$

$$\mathscr{E}^{\flat,k}_P(b,u,v,\partial_x) := \sum_{1\le j\le n} E^\flat_{k,j}(u,v)\partial_j \qquad \text{pour } 1\le k\le n.$$

On a noté $(v, \partial_x v).\mathscr{E}_P^\flat(b, u, v, \partial)$ pour

$$(v, \partial_x v).\mathscr{E}_P^\flat = v.\mathscr{E}_P^{\flat,0} + \sum_{1 \le k \le n} \partial_k v.\mathscr{E}_P^{\flat,k},$$

où chaque produit est à prendre au sens de (48).

- d'opérateur $\mathscr{H}^\flat$ tel que pour tout $(b, u, v) \in \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$,

$$\mathscr{H}(b, u + v, \partial) := \mathscr{H}(b, u, \partial) + v.\mathscr{H}^\flat(b, u, v, \partial), \tag{51}$$

- de matrices $F^\flat$, régulières, de tailles $N \times N$ telles que

$$F(u + v) = F(u) + v.F^\flat(u, v), \tag{52}$$

- de matrices $E^\flat(b, u, v, \partial_x u, \partial_x v)$, régulières, de tailles $N^2.(1 + n) \times N$, telles que

$$E(b, u + v, \partial_x u + \partial_x v) = E(b, u, \partial_x u) + (v, \partial_x v).E^\flat(b, u, v, \partial_x u, \partial_x v)$$

où $E^\flat := \begin{bmatrix} E^{\flat,0} \\ \vdots \\ E^{\flat,n} \end{bmatrix}$ et les matrices $(E^{\flat,k})_{1 \le k \le n}$ sont de taille $N^2 \times N$ et se décomposent à leur tour en

$$E^{\flat,k} := \begin{bmatrix} E^{\flat,k,1} \\ \vdots \\ E^{\flat,k,N} \end{bmatrix},$$

où les matrices $(E^{\flat,k,l})_{1 \le k,l \le n}$ sont de taille $N \times N$. A l'instar de ce que l'on avait fait pour $\mathscr{E}_P^\flat$, on a noté $(v, \partial_x v).E^\flat$ pour

$$(v, \partial_x v).E^\flat = v.E^{\flat,0} + \sum_{1 \le k \le n} \partial_k v.E^{\flat,k}.$$

- de fonctions $\Psi^{\varepsilon,\flat}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^{(1+n)\times N^2}$) telles que

$$\Psi^\varepsilon(b, u + v, \partial_x(u + v)) = \Psi^\varepsilon(b, u, \partial_x u) + (v, \partial_x v).\Psi^{\varepsilon,\flat}(b, u, v, \partial_x u, \partial_x v).$$

On introduit les opérateurs $(\mathscr{L}_P^\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ tels que

$$\mathscr{L}_P^\varepsilon(b, u, \partial) := \mathscr{H}(b, u, \partial) - \varepsilon \mathscr{E}_P(b, u, \partial_x). \tag{53}$$

Rappelons que l'opérateur $\mathscr{E}_P$ est défini en (49). Ainsi,

$$\mathscr{L}^\varepsilon(b, u, \partial_x u, \partial)u = \mathscr{L}_P^\varepsilon(b, u, \partial)u - F(b, u) - \varepsilon E(b, u, \partial_x u). \tag{54}$$

On introduit les fonctions $(\mathscr{L}^{\varepsilon,\flat})_{\varepsilon \in]0,1]}$ tels que

$$\begin{aligned}(v, \partial_x v).\mathscr{L}^{\varepsilon,\flat}(b, u, v, \partial u, \partial_x v, \partial_x^2 u) &= v.\{\mathscr{H}^\flat(b, u, v, \partial)u - F^\flat(u, v)\} \\ &- \varepsilon(v, \partial_x v).(\mathscr{E}_P^\flat(b, u, v, \partial_x) + E^\flat(b, u, v, \partial_x u, \partial_x v)).\end{aligned} \tag{55}$$

Substituant $u+v$ à u dans la relation (55), on a donc

$$\mathcal{L}^\varepsilon(b, u+v, \partial_x(u+v), \partial)(u+v) = \mathcal{L}^\varepsilon_P(b, u+v, \partial)(u+v) - F(b, u+v) \\ - \varepsilon E(b, u+v, \partial_x(u+v)).$$

On décompose le premier terme:

$$\mathcal{L}^\varepsilon(b, u+v, \partial_x(u+v), \partial)(u+v) = \mathcal{L}^\varepsilon_P(b, u+v, \partial)u + \mathcal{L}^\varepsilon_P(b, u+v, \partial)v \\ - F(b, u+v) - \varepsilon E(b, u+v, \partial_x(u+v)).$$

Revenant aux définitions (35) et (53), et exploitant les relations (50)–(53), on obtient

$$\mathcal{L}^\varepsilon(b, u+v, \partial_x(u+v), \partial)(u+v) = \mathcal{L}^\varepsilon(b, u, \partial_x u, \partial)u + \mathcal{L}^\varepsilon_P(b, u+v, \partial)v \\ + (v, \partial_x v).\mathcal{L}^{\varepsilon,\flat}(b, u, v, \partial u, \partial_x v, \partial_x^2 u). \quad (56)$$

Ainsi, on obtient (45)–(46) avec

$$\tilde{R}^\varepsilon := R^\varepsilon + R_1^\varepsilon e^{-x_n}\{\mathcal{H}^\flat(b, a^\varepsilon, \check{a}^\varepsilon, \partial)a^\varepsilon - F^\flat(a^\varepsilon, \check{a}^\varepsilon)\} - \varepsilon(\mathbf{R}_1^\varepsilon e^{-x_n}, \partial_x(\mathbf{R}_1^\varepsilon e^{-x_n})) \\ .(\mathcal{E}_P^\flat(b, a^\varepsilon, \check{a}^\varepsilon, \partial_x)a^\varepsilon + \mathcal{E}_P(b, a^\varepsilon, \check{a}^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, \partial_x \check{a}^\varepsilon)),$$
$$\tilde{R}_1^\varepsilon := R_1^\varepsilon + (R_1^\varepsilon e^{-x_n}, \partial_x R_1^\varepsilon e^{-x_n}).\Psi^{\varepsilon,\flat}(b, a^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, \check{a}^\varepsilon, \partial_x \check{a}^\varepsilon).$$

On voit que $(\tilde{R}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \Lambda^s(T_0)$ et $(\tilde{R}_2^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \mathcal{B}^s(T_0)$, pour tout s entier naturel. Enfin, le fait que $a^\varepsilon = 0$ pour $(t, x) \in \Omega_0^+$ entraîne que $\tilde{R}^\varepsilon = 0$ pour $(t, x) \in \Omega_0^+$. Ainsi, on a $\tilde{a}^\varepsilon = 0$ pour $(t, x) \in \Omega_0^+$. □

5. Preuve du Théorème 4.6

Cette section est consacrée à la preuve du Théorème 4.6. On commence par énoncer, dans la Section 5.1, une propriété des développements de couches limites analogue á celle qui est démontrée dans Sueur (2006b). Dans la Section 5.2, nous réalisons une analyse spectrale du champ complémentaire $\mathring{\Pi}$ définie par

$$\mathring{\Pi}(t, y) := \Pi(\mathring{b}(t, y), \mathring{u}^0(t, y)).$$

Cette analyse joue un rôle essentiel dans le fait que couches limites présentes dans le cadre de cet article sont de petite amplitude. En particulier, nous montrons qu'il existe des matrices $\mathfrak{R}(t, y)$ telles que

$$\mathring{\Pi}u = 0 \Leftrightarrow \Pi_0 u = 0 \quad \text{et} \quad (\Pi_- + \mathfrak{R}\Pi_+)u = 0.$$

Dans les Sections 5.3 et 5.4, nous énonçons des résultats sur les équations de profils correspondantes respectivement aux couches limites caractéristiques et non caractéristiques. Le choix de conditions aux limites différentes induisent des variations mineures par rapport à Guès (1995), Sueur (2006a,b). Dans la Section 5.5, nous substituons le développement

$$u^0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{U}_b^1\left(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{j\geq 2} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \tag{57}$$

à la place de u^ε dans (11). La Proposition 5.2 assure que l'on obtient un développement de la même nature et nous détaillons ce développement. Dans la Section 5.6, nous faisons une étude similaire pour les conditions aux limites. Dans les Sections 5.7 à 5.10, nous montrons comment l'obtention d'une solution approchée sous la forme d'un développement de la forme (57) équivaut à une succession de problèmes pour les profils et nous résolvons "en cascade" ces problèmes.

Considèrons un temps T positif quelconque.

5.1. *Composition Non Linéaire Des Profils*

Definition 5.1. On dira qu'une famille de fonctions régulières $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ satisfait

$$u^\varepsilon \sim \sum_{j\geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

pour une suite donnée de profils $\mathcal{U}^j$ de $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$ si pour tout k entier naturel, la famille $(r_k^\varepsilon)_\varepsilon$ définie par

$$r_k^\varepsilon := u^\varepsilon - \sum_{j=0}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

est dans $\Lambda^m(T)$.

On énonce un résultat de stabilité des développements du type (57) par composition non linéaire.

Proposition 5.2. *Soit $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de fonctions de $H^\infty(\Omega_T^+)$ satisfaisant*

$$u^\varepsilon \sim u^0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{U}_b^j\left(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{j\geq 2} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{U}^j\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

pour une suite donnée de profils $\mathcal{U}^1 \in \mathcal{N}_\theta(T)$, $(\mathcal{U}^j)_{j\geq 2}$ de $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$. Soit $G(t,x,u)$ une fonction de $C^\infty(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ telle que $G(t,x,0) = 0$. Alors la fonction $G(t,x,u^\varepsilon(t,x))$ est dans $H^\infty(\Omega_T^+)$ et il existe $\mathcal{V}_b^1 \in \mathcal{N}_\theta(T)$, $(\mathcal{V}^j)_{j\geq 1}$ dans $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$ tels que

$$G(t,x,u^\varepsilon(t,x)) \sim G(t,x,u^0(t,x)) + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{V}_b^1\left(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{j\geq 2} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{V}^j\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

où

$$\mathcal{V}_b^1 = D_u G(t,x,u^0(t,x)).\mathcal{U}_b^1.$$

De plus, pour tout $j \geq 2$, il existe des fonctions $(Q_a^j, Q_b^j, Q_c^j)_{j\geq 2}$ C^∞ de leurs arguments tels que $\mathcal{V}^j$ se décompose en $\mathcal{V}^j = \mathcal{V}_a^j + \mathcal{V}_b^j + \mathcal{V}_c^j$ avec

$$\mathcal{V}_a^j := D_u G(t, x, u^0(t, x)).\mathcal{U}_a^j + Q_a^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j-1}),$$
$$\mathcal{V}_b^j := D_u G(t, x, u^0(t, x)).\mathcal{U}_b^j + Q_b^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_b^k)_{k\leq j-1}),$$
$$\mathcal{V}_c^j := Q_c^j(t, x, z, (\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_c^k)_{k\leq j}, (\partial_\theta^i \mathring{\mathcal{U}}_b^k)_{i+k\leq j}).$$

Ce résultat est tout à fait analogue à la Proposition 5.1 de Sueur (2006a). L'esprit de la proposition est le suivant: notre analyse fait intervenir des développements avec des profils et un reste. Aussi, la propriété d'algèbre n'est pas essentielle si l'erreur commise peut être incluse dans le reste. La stratégie de la démonstration se résume ainsi: on introduit une algèbre de profils plus vaste contenant $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$ où sont autorisés des profils dépendants à la fois de $\frac{x_n}{\varepsilon}$ et de $\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}$. C'est un développement avec de tels profils que l'on obtient à priori par composition non linéaire. On redéveloppe les profils couplés en un développement de couche limite non caractéristique en contrôlant l'erreur à tout ordre. On renvoit à la preuve de la Proposition 5.1 de Sueur (2006a). Cette dernière contient tous les ingrédients nécessaires à la preuve de la Proposition 6.1 énoncée ci-dessus.

5.2. *Analyse Spectrale du Champ Complémentaire*

Comme le suggère les relations de polarisation (22) et (23), on ne s'attend pas à pouvoir prescrire les valeurs de $(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^1$ et $(Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^2$ au bord (ni de leur dérivée). Aussi, on prend soin d'analyser les conditions aux limites (12)–(13) au moyen des projecteurs spectraux Π_+, Π_- et Π_0.

Proposition 5.3. *Il existe un champ régulier (C^∞) de matrices $S(t, y)$, de taille $N \times N$, tel que l'on ait, pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^N$, pour tout (t, y), l'équivalence suivante*:

$$Mu = 0 \Leftrightarrow \Pi_+(t, y)u = S(t, y)\Pi_-(t, y)u$$

Preuve. Pour rester concis, on omettra au cours de la preuve les variables (t, y). On introduit la racine carrée de $\mathring{E}_{n,n}$: $R := \mathring{E}_{n,n}^{\frac{1}{2}}$, qui est symétrique définie positive. On définit la matrice symétrique $\Lambda := R^{-1}\mathring{A}_n R^{-1}$. Le sous-espace d'équation $MR^{-1}u = 0$ est maximal dissipatif pour Λ. On introduit les champs d'espaces vectoriels:

$$\widetilde{E}_+ := \sum_{\lambda>0} \ker(\Lambda - \lambda Id), \qquad \widetilde{E}_0 := \ker \Lambda, \qquad \widetilde{E}_- := \sum_{\lambda<0} \ker(\Lambda - \lambda Id).$$

A ces trois sous-espaces on associe les projecteurs orthogonaux respectifs P_+, P_0, et P_-. Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^N$, on a la propriété suivante:

$$P_+u \neq 0 \quad \text{et} \quad MR^{-1}u = 0 \quad \text{implique} \quad P_-u \neq 0. \tag{58}$$

En effet, dans le cas contraire, on aurait que le produit scalaire $\langle \Lambda u, u\rangle$ est strictement positif, ce qui est absurde. Utilisant (58), on a que l'application $\mathbf{\Phi}$:

$$\ker MR^{-1} \to \widetilde{E}_- \oplus \widetilde{E}_0$$
$$u \to (P_-u, P_0u)$$

est injective. Comptant les dimensions, on a même que $\mathbf{\Phi}$ est un isomorphisme. On a ainsi l'existence de matrices carrées, de tailles $N \times N$, S' et T' telles que

$$Mu = 0 \Leftrightarrow P_+Ru = S'P\_Ru + T'P_0Ru.$$

Montrons que $T'P_0 = 0$. Dans le cas contraire, on pourrait considérer un vecteur u de $\mathbb{R}^N$ tel que $T'P_0Ru \neq 0$, $P\_Ru = 0$ et $P_+Ru = S'P\_Ru$. Ceci contredirait (58). Remarquant que $P_\delta R = R\Pi_\delta$ où δ est une notation commune pour les indices $+$, $-$ et 0, le résultat suit avec $S = R^{-1}S'R$. □

Remarquons que, quitte à substituer $\Pi_+S\Pi\_$ à S, on peut supposer que

$$ImS = E_+ \qquad \text{et} \qquad \ker S = E_0 \oplus E\_. \tag{59}$$

Notons qu'avec ces conditions supplémentaires, S est uniquement déterminée.

On définit, pour tout $(t, y) \in \Gamma_T$, la matrice $N \times N$:

$$\Pi^\natural := \Pi_0 + \Pi\_ + \Re\Pi_+ \qquad \text{où} \qquad \Re := \mathring{E}_{n,n}^{-1}({}^tS)\mathring{E}_{n,n}.$$

Lemme 5.4. *Les matrices* $\Pi^\natural$, *ainsi définies, vérifient* $\ker \Pi^\natural = (\ker M)^{\perp \mathring{E}_{n,n}}$.

Preuve. Pour cela, on montre que pour tout couple de vecteurs (a, b) de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ vérifiant les conditions $Ma = 0$ et $\Pi^\natural b = 0$, on a $\langle a, \mathring{E}_{n,n}b\rangle = 0$.

En effet, on a

$$\langle a, \mathring{E}_{n,n}b\rangle = \langle Ra, Rb\rangle = \langle P_+Ra, P_+Rb\rangle + \langle P\_Ra, P\_Rb\rangle + \langle P_0Ra, P_0Rb\rangle,$$

en utilisant l'orthogonalité des projecteurs.

Or la condition $Ma = 0$ se réexprime par $P_+Ra = S'P\_Ra$ et la condition $\Pi^\natural b = 0$ par $P\_Rb = -{}^tS'P_+Rb$ et $P_0Rb = 0$. On conclut en remarquant que

$$\langle P\_Ra, P\_Rb\rangle = \langle P\_Ra, -{}^tS'P_+Rb\rangle = -\langle S'P\_Ra, P_+Rb\rangle = -\langle P_+Ra, P_+Rb\rangle. \quad \square$$

Du résultat de ce lemme, de (43) et des identités (59), on déduit, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^N$, les équivalences suivantes:

$$\mathring{\Pi}u = 0 \Leftrightarrow \Pi^\natural u = 0 \Leftrightarrow \Pi_0 u = 0 \qquad \text{et} \qquad (\Pi\_ + \Re\Pi_+)u = 0. \tag{60}$$

Notons bien que si $\mathring{\Pi}$ et $\Pi^\natural$ ont même noyau, $\Pi^\natural$ est une matrice carré $N \times N$ tandis que $\mathring{\Pi}$ est une matrice $(N - r) \times N$ surjective.

5.3. *Problème Hyperbolique-Parabolique*

On donne ici un résultat qui nous sera utile dans la construction des couches limites caractéristiques. Il existe des matrices $A_n^\flat(t, x)$, de régularité C^∞, telles que $A_n(b(t, x), u^0(t, x)) = \mathring{A}_n(t, y) + x_nA_n^\flat(t, x)$. Notons $\mathscr{H}_0$ le linéarisé de $\mathscr{H}$ en u^0, i.e., $\mathscr{H}_0(b, \partial) := \mathscr{H}(b, u^0, \partial)$, et

$$\mathbb{H} :={}^t\, \Pi_0\mathscr{H}_0\Pi_0 +{}^t\, \Pi_0A_n^\flat\Pi_0\theta\partial_\theta.$$

$\mathbb{H}$ est un opérateur symétrique hyperbolique pour lequel le bord $\{x_n = 0\}$ est totalement caractéristique. Introduisons l' opérateur

$$\Xi := \mathbb{H} -^t \Pi_0 \mathring{E}_{n,n} \partial_\theta^2.$$

On définit le problème hyperbolique-parabolique linéaire:

$$\begin{cases} (Id - \Pi_0)W = 0, & \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_\theta^+, \\ \Xi W = f & \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_\theta^+, \\ \partial_\theta W|_{\theta=0} = d & \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0}^+ \\ W = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+ \end{cases} \tag{61}$$

où f est dans $\mathcal{N}_\theta(T_0)$ et d dans $H^\infty(\Omega_{T_0}^+)$, vérifie $(Id - \Pi_0)d = 0$ et $d|_{t\le 0} = 0$. On a alors le théorème suivant:

Théorème 5.5. *Il existe un unique W dans $\mathcal{N}_\theta(T_0)$ solution de* (61).

Rappelons que l'espace $\mathcal{N}_\theta(T_0)$ est défini en (16). Le Théorème 5.5 est une variante facile des théorèmes, semilinéaires, montrés dans Sueur (2006a) et Sueur (2006b). La condition aux limites est ici de type Neumann mais les techniques de démonstration s'adaptent sans difficulté.

5.4. *Couche Limite Non Caractéristique*

L'étude des couches limites non caractéristiques fait intervenir des équations de la forme

$$(-\partial_z^2 + \mathring{E}_{n,n}^{-1} \mathring{A}_n \partial_z)\mathcal{U} = \mathbf{\Phi} \qquad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_z^+, \tag{62}$$

où $\mathbf{\Phi} \in \mathcal{N}_z(T_0)$ et des conditions aux limites de la forme:

$$\Pi_- \partial_z \mathcal{U} = L \qquad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_{T_0}^+ \times \{0\} \tag{63}$$

où L est dans $H^\infty(\Omega_{T_0}^+)$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire en z paramétrée par (t,x). On a la proposition suivante, très classique (Sueur, 2006a,b):

Proposition 5.6. 1. *Si* $\mathbf{\Phi} = 0$ *et* $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_z(T_0)$ *est solution de* (62) *alors on a* $(Id - \Pi_-)\mathcal{U} = 0$.

2. *Si* $\Pi_- \mathbf{\Phi} = 0$ *alors* (62) *admet une et une seule solution* $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_z(T_0)$ *telle que* $\Pi_- \mathcal{U} = 0$.
3. *Si* $(Id - \Pi_-)\mathbf{\Phi} = 0$ *et si* $(Id - \Pi_-)L = 0$ *alors* (62)–(63) *admet une et une seule solution* $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_z(T_0)$ *telle que* $(Id - \Pi_-)\mathcal{U} = 0$.

Rappelons que l'espace $\mathcal{N}_z(T_0)$ est défini en (16).

5.5. *L'ansatz de Résolution*

En utilisant à plusieurs reprises la Proposition 5.2, nous allons voir que la substitution du développement (57) à la place de u^ε dans (11) donne un développement (l'ansatz de résolution)

$$\sum_{j\geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{F}^j\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

où les profils $\mathcal{F}^j$ sont dans $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$.

5.5.1. Partie Hyperbolique. Pour $0 \leq i \leq n$, la Proposition 5.2 assure l'existence de profils $(\mathcal{V}^j(A_i))_{j\geq 2}$ dans $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$ tels que

$$A_i(b, u^\varepsilon) \sim A_i(b, u^0) + \sqrt{\varepsilon} D_u A_i(b, u^0).\mathcal{U}_b^1\left(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{j\geq 2} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{V}^j(A_i)\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

avec, pour $j \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_a^j(A_i) &:= Q_a^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j}),\\
\mathcal{V}_b^j(A_i) &:= Q_b^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j}, (\mathcal{U}_b^k)_{k\leq j}),\\
\mathcal{V}_c^j(A_i) &:= Q_c^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j}, (\partial_\theta^i \mathring{\mathcal{U}}_b^k)_{i+k\leq j}, (\mathcal{U}_c^k)_{k\leq j}).
\end{aligned}$$

Pour $0 \leq i \leq n-1$, on a

$$\partial_i u^\varepsilon \sim \partial_i u^0 + \sqrt{\varepsilon} \partial_i \mathcal{U}_b^1\left(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{j\geq 2} \sqrt{\varepsilon}^j \partial_i \mathcal{U}^j\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Ainsi, pour $0 \leq i \leq n-1$, on a

$$_i(b, u^\varepsilon)\partial_i u^\varepsilon \sim A_i(b, u^0).\partial_i u^0 + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{V}_b^1 + \sum_{j\geq 2} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{V}^j(A_i\partial_i)$$

où

$$\mathcal{V}_b^1 = A_i(b, u^0).\partial_i \mathcal{U}_b^1 + D_u A_i(b, u^0).\mathcal{U}_b^1.\partial_i u^0,$$

et pour tout $j \geq 2$, le profil $\mathcal{V}_a^j(A_i\partial_i)$ est dans $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$ et vaut

$$\mathcal{V}^j(A_i\partial_i) = A_i(b, u^0).\partial_i \mathcal{U}^j + D_u A_i(b, u^0).\mathcal{U}_b^1.\partial_i \mathcal{U}^{j-1} + \sum_{k+l=j;k\geq 2} \mathcal{V}^k(A_i).\partial_i \mathcal{U}^l.$$

Dans la somme précédente, on a noté $\mathcal{U}^0 := u^0$ et $\mathcal{U}^1 := \mathcal{U}_b^1$.

Ainsi, on peut écrire les $\mathcal{V}_a^j(A_i\partial_i)$ comme (bien sûr, les fonctions Q^j ne sont pas les mêmes que précèdemment)

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_a^j(A_i\partial_i) &= A_i(b, u^0)\partial_i \mathcal{U}_a^j + Q_a^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j}, (\partial_i \mathcal{U}_a^k)_{k\leq j-1}),\\
\mathcal{V}_b^j(A_i\partial_i) &= A_i(b, u^0)\partial_i \mathcal{U}_b^j + Q_b^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j}, (\mathcal{U}_b^k)_{k\leq j}, (\partial_i \mathcal{U}_b^k)_{k\leq j-1}),\\
\mathcal{V}_c^j(A_i\partial_i) &= A_i(b, u^0)\partial_i \mathcal{U}_c^j + Q_c^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j}, (\partial_\theta^i \mathring{\mathcal{U}}_b^k)_{i+k\leq j-1}, (\mathcal{U}_c^k)_{k\leq j}, (\partial_i \mathcal{U}_c^k)_{k\leq j-1}).
\end{aligned}$$

On a

$$\partial_n u^\varepsilon \sim \sum_{j\geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j (\partial_n \mathcal{U}^j + \partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1} + \partial_z \mathcal{U}_c^{j+2}). \tag{64}$$

ainsi

$$A_n(b, u^\varepsilon)\partial_n u^\varepsilon \sim \sum_{j\geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{V}^j(A_n\partial_n)$$

où

$$\mathcal{V}^0(A_n\partial_n) = A_n(b, u^0).(\partial_n u^0 + \partial_\theta \mathcal{U}_b^1 + \partial_z \mathcal{U}_c^2)$$
$$\mathcal{V}^1(A_n\partial_n) = A_n(b, u^0).(\partial_n \mathcal{U}^1 + \partial_\theta \mathcal{U}_b^2 + \partial_z \mathcal{U}_c^3) + D_u A_n(b, u^0).\mathcal{U}_b^1.(\partial_n u^0 + \partial_\theta \mathcal{U}_b^1 + \partial_z \mathcal{U}_c^2)$$

et pour tout $j \geq 2$, le profil $\mathcal{V}^j(A_n\partial_n)$ est dans $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$ et vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^j(A_n\partial_n) = {} & A_n(b, u^0).(\partial_n \mathcal{U}^j + \partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1} + \partial_z \mathcal{U}_c^{j+2}) \\ & + D_u A_n(b, u^0).\mathcal{U}_b^1.(\partial_n \mathcal{U}^{j-1} + \partial_\theta \mathcal{U}_b^j + \partial_z \mathcal{U}_c^{j+1}) \\ & + \sum_{k+l=j;k\geq 2} \mathcal{V}^k(A_i).(\partial_n \mathcal{U}^l + \partial_\theta \mathcal{U}^{l+1} + \partial_z \mathcal{U}^{l+2}).\end{aligned}$$

Remarquons que pour tout profil $\mathcal{U}_b \in \mathcal{N}_\theta(T_0)$ (respectivement $\mathcal{U}_c \in \mathcal{N}_\theta(T_0)$), la fonction $\theta\partial_\theta \mathcal{U}_b$ (respectivement $z\partial_z \mathcal{U}_c$) est encore dans $\mathcal{N}_\theta(T_0)$ (respectivement $\mathcal{N}_z(T_0)$). De plus, on a

$$(A_n(b, u^0)\partial_\theta \mathcal{U}_b)\left(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = (\mathring{A}_n \partial_\theta \mathcal{U}_b)\left(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}(A_n^\flat \theta \partial_\theta \mathcal{U}_b)\left(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$
$$(A_n(b, u^0)\partial_z \mathcal{U}_c)\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}\right) = (\mathring{A}_n \partial_z \mathcal{U}_c)\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}\right) + \varepsilon(A_n^\flat z \partial_z \mathcal{U}_c)\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}\right).$$

On a ainsi

$$A_n(b, u^\varepsilon)\partial_n u^\varepsilon \sim \sum_{j\geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j \widetilde{\mathcal{V}}^j(A_n\partial_n)$$

où

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{V}}^0(A_n\partial_n) &= A_n(b, u^0).\partial_n u^0 + \mathring{A}_n(\partial_\theta \mathcal{U}_b^1 + \partial_z \mathcal{U}_c^2) \\ \widetilde{\mathcal{V}}^1(A_n\partial_n) &= A_n(b, u^0).\partial_n \mathcal{U}^1 + A_n^\flat \theta \partial_\theta \mathcal{U}_b^1 + \mathring{A}_n(\partial_\theta \mathcal{U}_b^2 + \partial_z \mathcal{U}_c^3) \\ & \quad + D_u A_n(b, u^0).\mathcal{U}_b^1.(\partial_n u^0 + \partial_\theta \mathcal{U}_b^1 + \partial_z \mathcal{U}_c^2)\end{aligned}$$

où, pour tout $j \geq 2$, le profil $\mathcal{V}^j(A_n\partial_n)$ est dans $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$ et vaut

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{V}}^j(A_n\partial_n) = {} & A_n(b, u^0).\partial_n \mathcal{U}^j + A_n^\flat \theta \partial_\theta \mathcal{U}_b^j + A_n^\flat z \partial_z \mathcal{U}_c^j + \mathring{A}_n(\partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1} + \partial_z \mathcal{U}_c^{j+2}) \\ & + D_u A_n(b, u^0).\mathcal{U}_b^1.(\partial_n \mathcal{U}^{j-1} + \partial_\theta \mathcal{U}_b^j + \partial_z \mathcal{U}_c^{j+1}) \\ & + \sum_{k+l=j;\, k\geq 2} \mathcal{V}^k(A_n).(\partial_n \mathcal{U}^l + \partial_\theta \mathcal{U}^{l+1} + \partial_z \mathcal{U}^{l+2}).\end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire

$$\widetilde{\mathcal{V}}_a^0(A_n\partial_n) = A_n(b, u^0)\partial_n u^0 \quad \text{et pour } j \geq 1$$
$$\widetilde{\mathcal{V}}_a^j(A_n\partial_n) = A_n(b, u^0)\partial_n \mathcal{U}_a^j + Q_a^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j}, (\partial_n \mathcal{U}_a^k)_{k\leq j-1}),$$
$$\widetilde{\mathcal{V}}_b^0(A_n\partial_n) = \mathring{A}_n\partial_\theta \mathcal{U}_b^1$$
$$\widetilde{\mathcal{V}}_b^1(A_n\partial_n) = \mathring{A}_n\partial_\theta \mathcal{U}_b^2 + A_n(b, u^0)\partial_n \mathcal{U}_b^1 + D_u A_n(b, u^0).\mathcal{U}_b^1.(\partial_n u^0 + \partial_\theta \mathcal{U}_b^1)$$
$$\widetilde{\mathcal{V}}_b^j(A_n\partial_n) = \mathring{A}_n\partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1} + A_n(b, u^0)\partial_n \mathcal{U}_b^j + D_u A_n(b, u^0).\mathcal{U}_b^1.\partial_\theta \mathcal{U}_b^j$$
$$+ Q_b^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j}, (\mathcal{U}_b^k)_{k\leq j}, (\partial_n \mathcal{U}_b^k)_{k\leq j-1}, (\partial_\theta \mathcal{U}_b^k)_{k\leq j-1}), \qquad \text{pour } j \geq 2$$
$$\widetilde{\mathcal{V}}_c^0(A_n\partial_n) = \mathring{A}_n\partial_z \mathcal{U}_c^2 \qquad \text{et pour } j \geq 1$$
$$\widetilde{\mathcal{V}}_c^j(A_n\partial_n) = \mathring{A}_n\partial_z \mathcal{U}_c^j + Q_c^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j}, (\partial_\theta^i \mathring{\mathcal{U}}_b^k)_{i+k\leq j}, (\mathcal{U}_c^k)_{k\leq j}, (\partial_n \mathcal{U}_c^k)_{k\leq j}, (\partial_z \mathcal{U}_c^k)_{k\leq j+1}).$$

On en déduit

$$\mathcal{H}(b, u^\varepsilon, \partial)u^\varepsilon \sim \sum_{j\geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{V}^j(\mathcal{H}) \qquad \text{où} \qquad \mathcal{V}^j(\mathcal{H}) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{V}^j(A_i\partial_i) + \widetilde{\mathcal{V}}^j(A_n\partial_n).$$

On a donc

$$\mathcal{V}_a^0(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_0 u^0, \qquad \mathcal{V}_b^0(\mathcal{H}) = \mathring{A}_n\partial_\theta \mathcal{U}_b^1, \qquad \mathcal{V}_c^0(\mathcal{H}) = \mathring{A}_n\partial_z \mathcal{U}_c^2,$$

et, pour $j \geq 1$,

$$\mathcal{V}_a^j(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_0 \mathcal{U}_a^j + Q_a^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j}, (\partial \mathcal{U}_a^k)_{k\leq j-1}),$$
$$\mathcal{V}_b^j(\mathcal{H}) = \mathring{A}_n\partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1} + \mathcal{H}_0 \mathcal{U}_b^j + A_n^\flat \theta\partial_\theta \mathcal{U}_b^j + D_u A_n(b, u^0).\mathcal{U}_b^1.(\partial_n \mathcal{U}^j + \partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1})$$
$$+ Q_b^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j}, (\mathcal{U}_b^k)_{k\leq j}, (\partial \mathcal{U}_b^k)_{k\leq j-1}, (\partial_\theta \mathcal{U}_b^k)_{k\leq j-1}),$$
$$\mathcal{V}_c^j(\mathcal{H}) = \mathring{A}_n\partial_z \mathcal{U}_c^{j+2} + Q_c^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j}, (\partial_\theta^i \mathring{\mathcal{U}}_b^k)_{i+k\leq j}, (\mathcal{U}_c^k)_{k\leq j}, (\partial \mathcal{U}_c^k)_{k\leq j}, (\partial_z \mathcal{U}_c^k)_{k\leq j+1}).$$

5.5.2. *Terme Source.* Appliquant encore une fois la Proposition 5.2, on a l'existence de profils $(\mathcal{V}^j(F))_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$ telle que

$$F(b, u^\varepsilon) \sim u^0(t, x) + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{V}_b^1(F) + \sum_{j\geq 2} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{V}^j(F)$$

où

$$\mathcal{V}_b^1(F) = D_u F(b, u^0).\mathcal{U}_b^1.$$

De plus, pour tout $j \geq 2$, il existe des fonctions $(Q_a^j, Q_b^j, Q_c^j)_{j\geq 2}$ de classe C^∞ de leurs arguments tels que $\mathcal{V}^j$ se décompose en $\mathcal{V}^j = \mathcal{V}_a^j + \mathcal{V}_b^j + \mathcal{V}_c^j$ avec

$$\mathcal{V}_a^j(F) := D_u F(b, u^0(t, x)).\mathcal{U}_a^j + Q_a^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k)_{k\leq j-1}),$$
$$\mathcal{V}_b^j(F) := D_u F(b, u^0(t, x)).\mathcal{U}_b^j + Q_b^j(t, x, (\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_b^k)_{k\leq j-1}),$$
$$\mathcal{V}_c^j(F) := Q_c^j(t, x, z, (\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_c^k)_{k\leq j}, (\partial_\theta^i \mathring{\mathcal{U}}_b^k)_{i+k\leq j}).$$

5.5.3. Partie Elliptique. Dans le traitement de la viscosité, nous allons utiliser, comme pour la partie hyperbolique, un développement de Taylor de la matrice normale, ici en l'occurrence, la matrice $E_{n,n}$. Il existe des matrices $E^{\flat}_{n,n}(t,x)$, dépendantes de façon C^∞ de (t,x), tels que $E_{n,n}(b(t,x),u(t,x)) = \mathring{E}_{n,n}(t,y) + x_n.E^{\flat}_{n,n}(t,x)$. Par suite, pour des profils $\mathcal{U}_b \in \mathcal{N}_\theta(T_0)$, $\mathcal{U}_c \in \mathcal{N}_z(T_0)$, on a

$$(E_{n,n}\partial_\theta \mathcal{U}_b)\left(t,x,\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = (\mathring{E}_{n,n}\partial_\theta \mathcal{U}_b)\left(t,x,\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\varepsilon}(E^{\flat}_{n,n}\theta\partial_\theta \mathcal{U}_b)\left(t,x,\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$
$$(E_{n,n}\partial_z \mathcal{U}_c)\left(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon}\right) = (\mathring{E}_{n,n}\partial_z \mathcal{U}_c)\left(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon}\right) + \varepsilon(E^{\flat}_{n,n}z\partial_z \mathcal{U}_c)\left(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon}\right).$$

On a

$$\varepsilon\mathcal{E}(b,\partial)u^\varepsilon \sim \sum_{j\geq} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{V}^j(\mathcal{E})$$

avec

$$\mathcal{V}^0_a(\mathcal{E}) = \mathcal{V}^1_a(\mathcal{E}) = 0 \quad \text{ et pour } j \geq 2, \quad \mathcal{V}^j_a(\mathcal{E}) = \mathcal{E}\mathcal{U}^{j-2}$$
$$\mathcal{V}^0_b(\mathcal{E}) = 0, \quad \mathcal{V}^1_b(\mathcal{E}) = \mathring{E}_{n,n}\partial^2_\theta \mathcal{U}^1_b \quad \text{ et pour } j \geq 2,$$
$$\mathcal{V}^j_b(\mathcal{E}) = \mathring{E}_{n,n}\partial^2_\theta \mathcal{U}^j_b + \mathcal{E}_b \mathcal{U}^{j-1}_b + \mathcal{E}\mathcal{U}^{j-2}_b$$
$$\mathcal{V}^j_c(\mathcal{E}) = \mathring{E}_{n,n}\partial^2_z \mathcal{U}^{j+2}_c + \mathcal{E}_c \mathcal{U}^j_c + \mathcal{E}\mathcal{U}^{j-2}_c \quad \text{ pour } j \geq 0,$$

avec

$$\mathcal{E}_b := \sum_{i=1}^n \partial_n(E_{in}\partial_\theta.) + \partial_\theta(E_{ni}\partial_n.) + E^{\flat}_{n,n}\theta\partial^2_\theta,$$
$$\mathcal{E}_c := \sum_{i=1}^n \partial_n(E_{in}\partial_z.) + \partial_z(E_{ni}\partial_n.) + E^{\flat}_{n,n}z\partial^2_z.$$

et la convention $\mathcal{U}^j_c = 0$ pour $j \leq 2$.

5.5.4. Conclusion. Les profils $(\mathcal{F}^j)_{j\in\mathbb{N}}$ se décomposent de la manière suivante:

$$\mathcal{F}^0_a = \mathcal{H}(b,u^0,\partial)u^0 - F(b,u^0)$$
$$\mathcal{F}^0_b = \mathring{A}_n\partial_\theta \mathcal{U}^1_b$$
$$\mathcal{F}^0_c = \mathring{A}_n\partial_z \mathcal{U}^2_c - \mathring{E}_{n,n}\partial_{zz}\mathcal{U}^2_c,$$

et, pour $j \geq 1$,

$$\mathcal{F}^j_a = \mathcal{H}_0\mathcal{U}^j_a - D_uF(b,u^0)\mathcal{U}^j_a + q^j_a,$$
$$\mathcal{F}^j_b = \mathring{A}_n\partial_\theta \mathcal{U}^{j+1}_b + (\mathcal{H}_0 + A^{\flat}_n\theta\partial_\theta + D_uA_n(b,u^0).\mathcal{U}^1_b\partial_\theta)\mathcal{U}^j_b - \mathring{E}_{n,n}\partial_{\theta\theta}\mathcal{U}^j_b + q^j_b,$$
$$\mathcal{F}^j_c = \mathring{A}_n\partial_z \mathcal{U}^{j+2}_c - \mathring{E}_{n,n}\partial_{zz}\mathcal{U}^{j+2}_c + q^j_c,$$

où

$$q^1_a = 0, \quad q^1_b = D_uA_n(b,u^0).\mathcal{U}^1_b\partial_n u^0 - D_uF(b,u^0).\mathcal{U}^1_b, \quad q^1_c = 0,$$

et, pour $j \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
q_a^j &:= -\mathscr{E}\mathscr{U}_a^{j-2} - Q_a^j(t, x, (\mathscr{U}_a^k)_{k\leq j}, (\partial\mathscr{U}_a^k)_{k\leq j-1}),\\
q_b^j &:= -\mathscr{E}_b\mathscr{U}_b^{j-1} - \mathscr{E}\mathscr{U}_b^{j-2} - Q_b^j(t, x, (\mathscr{U}_a^k)_{k\leq j}, (\mathscr{U}_b^k)_{k\leq j}, (\partial\mathscr{U}_b^k)_{k\leq j-1}, (\partial_\theta\mathscr{U}_b^k)_{k\leq j-1}),\\
q_c^j &:= (\mathscr{H}_0 - \mathscr{E}_c)\mathscr{U}_c^j - \mathscr{E}\mathscr{U}_c^{j-2}\\
&\quad - Q_c^j(t, x, (\mathscr{U}_a^k)_{k\leq j}, (\partial_\theta^i \mathring{\mathscr{U}}_b^k)_{i+k\leq j}, (\mathscr{U}_c^k)_{k\leq j}, (\partial\mathscr{U}_c^k)_{k\leq j}, (\partial_z\mathscr{U}_c^k)_{k\leq j+1}).
\end{aligned}
$$

Noter que si l'on a choisi ici, pour la clarté de l'exposé, de chercher directement un développement de la forme (57), le lecteur curieux pourra introduire un développement plus complet

$$\sum_{j\geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j \mathscr{U}^j\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

et constater que les profils d'ordre zero et 1 sont nécessairement u^0 et un profil de couche limite caractéristique.

5.6. *L'ansatz de Résolution des Conditions aux Limites*

La Proposition 5.2 assure l'existence de profils $(\mathscr{V}^j(\Pi))_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{P}(\Omega_T^+)$ tels que

$$\Pi(b, u^\varepsilon) \sim \Pi(b, u^0) + \sqrt{\varepsilon} D_u\Pi(b, u^0).\mathscr{U}_b^1\left(t, x, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \sum_{j\geq 2} \sqrt{\varepsilon}^j \mathscr{V}^j(\Pi)\left(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

avec, pour $j \geq 2$, $\mathscr{V}^j(\Pi) := Q^j(t, x, (\mathscr{U}^k)_{k\leq j})$. Avec (64), on obtient donc

$$\Pi(b, u^\varepsilon)\partial_n u^\varepsilon \sim \sum_{j\geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathscr{V}^j(\Pi\partial_n)$$

où,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{V}^0(\Pi\partial_n) &:= \Pi(b, u^0).(\partial_n u^0 + \partial_\theta\mathscr{U}_b^1 + \partial_z\mathscr{U}_c^2),\\
\mathscr{V}^1(\Pi\partial_n) &:= \Pi(b, u^0).(\partial_n\mathscr{U}^1 + \partial_\theta\mathscr{U}_b^2 + \partial_z\mathscr{U}_c^3) + D_u\Pi(b, u^0).\mathscr{U}_b^1.(\partial_n u^0 + \partial_\theta\mathscr{U}_b^1 + \partial_z\mathscr{U}_c^2),
\end{aligned}
$$

et, pour tout $j \geq 2$, le profil $\mathscr{V}^j(\Pi\partial_n)$ est dans $\mathscr{P}(\Omega_T^+)$ et vaut

$$
\begin{aligned}
\mathscr{V}^j(\Pi\partial_n) = \Pi(b, u^0)&.(\partial_n\mathscr{U}^j + \partial_\theta\mathscr{U}_b^{j+1} + \partial_z\mathscr{U}_c^{j+2})\\
&+ D_u\Pi(b, u^0).\mathscr{U}_b^1.(\partial_n\mathscr{U}^{j-1} + \partial_\theta\mathscr{U}_b^j + \partial_z\mathscr{U}_c^{j+1})\\
&+ \sum_{k+l=j;\, k\geq 2} \mathscr{V}^k(\Pi).(\partial_n\mathscr{U}^l + \partial_\theta\mathscr{U}^{l+1} + \partial_z\mathscr{U}^{l+2}).
\end{aligned}
$$

Il existe des matrices $\Pi^\flat(t, x)$, de régularité C^∞, telles que $\Pi(b(t, x), u^0(t, x)) = \mathring{\Pi}_n(t, y) + x_n\Pi^\flat(t, x)$. On a ainsi

$$\Pi(b, u^\varepsilon)\partial_n u^\varepsilon \sim \sum_{j\geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \widetilde{\mathscr{V}}^j(\Pi\partial_n)$$

où,

$$\widetilde{\mathcal{V}}^0(\Pi\partial_n) = \Pi(b, u^0).\partial_n u^0 + \mathring{\Pi}(\partial_\theta \mathcal{U}_b^1 + \partial_z \mathcal{U}_c^2)$$
$$\widetilde{\mathcal{V}}^1(\Pi\partial_n) = \Pi(b, u^0).\partial_n \mathcal{U}^1 + \Pi^\flat \theta\partial_\theta \mathcal{U}_b^1 + \mathring{\Pi}(\partial_\theta \mathcal{U}_b^2 + \partial_z \mathcal{U}_c^3) + D_u\Pi(b, u^0).\mathcal{U}_b^1.(\partial_n u^0 + \partial_\theta \mathcal{U}_b^1 + \partial_z \mathcal{U}_c^2)$$

où, pour tout $j \geq 2$, le profil $\widetilde{\mathcal{V}}^j(\Pi\partial_n)$ est dans $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$ et vaut

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{V}}^j(\Pi\partial_n) = {}& \Pi(b, u^0).\partial_n \mathcal{U}^j + \Pi^\flat \theta\partial_\theta \mathcal{U}_b^j + \Pi^\flat z\partial_z \mathcal{U}_c^j + \mathring{\Pi}(\partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1} + \partial_z \mathcal{U}_c^{j+2}) \\ &+ D_u\Pi(b, u^0).\mathcal{U}_b^1.(\partial_n \mathcal{U}^{j-1} + \partial_\theta \mathcal{U}_b^j + \partial_z \mathcal{U}_c^{j+1}) \\ &+ \sum_{k+l=j;k\geq 2} \mathcal{V}^k(\Pi).(\partial_n \mathcal{U}^l + \partial_\theta \mathcal{U}_b^{l+1} + \partial_z \mathcal{U}^{l+2}).\end{aligned}$$

Appliquant encore une fois la Proposition 5.2, on a l'existence de profils $(\mathcal{V}^j(K))_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{P}(\Omega_T^+)$ telle que

$$K(\sqrt{\varepsilon}, b, u^\varepsilon, \partial_y u^\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}\partial_n u^\varepsilon) \sim K(0, b, u^0, \partial_y u^0, 0) + \sum_{j\geq 1} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{V}^j(K)$$

où, pour tout $j \geq 1$, il existe des fonctions $(Q^j)_{j\geq 2} C^\infty$ de leurs arguments tels que

$$\mathcal{V}^j(K) := Q^j(t, x, (\mathcal{U}^k)_{k\leq j}, (\partial_y \mathcal{U}^k)_{k\leq j}, (\partial_n \mathcal{U}^k)_{k\leq j-1}(\partial_\theta \mathcal{U}_b^k)_{k\leq j}, (\partial_z \mathcal{U}_c^k)_{k\leq j+1}).$$

Par suite, on a

$$\Psi^\varepsilon(b, u^\varepsilon, \partial_n u^\varepsilon) \sim \sum_{j\geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{V}^j(\Psi^\varepsilon)$$

où

$$\mathcal{V}^0(\Psi^\varepsilon) := \mathring{\Pi}.(\partial_\theta \mathcal{U}_b^1 + \partial_z \mathcal{U}_c^2) + Q^0(t, x) \qquad \text{avec}$$
$$Q^0(t, x) := \Pi(b, u^0).\partial_n u^0 + K(0, b, u^0, \partial_y u^0, 0)$$

et, pour $j \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^j(\Psi^\varepsilon) := {}& \mathring{\Pi}.(\partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1} + \partial_z \mathcal{U}_c^{j+2}) + Q^j\big(t, x, (\mathcal{U}^k)_{k\leq j}, (\partial_x \mathcal{U}^k)_{k\leq j}, (\partial_\theta \mathcal{U}_b^k)_{k\leq j}, \\ & \theta\partial_\theta \mathcal{U}_b^j, (\partial_z \mathcal{U}_c^k)_{k\leq j+1}, z\partial_z \mathcal{U}_c^{j+1}\big). \qquad (65)\end{aligned}$$

La substitution du développement (57) à la place de u^ε dans (12) et (13) donnent les ansatz de résolution

$$\sum_{j\geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{F}_{cl0}^j(t, y), \qquad \sum_{j\geq 0} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{F}_{cl1}^j(t, y)$$

où pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}^j_{cl0} = M\mathcal{U}^j|_{x_n=0}$ et $\mathcal{F}^j_{cl1} = \mathcal{V}^j(\Psi^\varepsilon)|_{x_n=\theta=z=0}$. On considère alors, pour $j \geq 0$, les problèmes

$$(S^j_{cl}(T_0)) : \begin{cases} M\mathcal{U}^j|_{x_n=0} = 0 \\ \mathcal{V}^j(\Psi^\varepsilon)|_{\theta=z=0} = 0. \end{cases}$$

Comme les matrices $\mathring{\Pi}$ sont surjectives, les valeurs que prennent les fonctions $(Q^j)_{j\in\mathbb{N}}$ de la formule (65) admettent des antécédents, que l'on notera K^j. En utilisant les équivalences (60), on obtient que le problème $(S^0_{cl}(T_0))$ est équivalent à

$$\begin{cases} Mu^0|_{x_n=0} = 0 \\ \Pi_0(\partial_\theta \mathcal{U}^1_b|_{\theta=0} + \partial_z \mathcal{U}^2_c|_{z=0} + K^0) = 0 \\ (\Pi_- + \Re\Pi_+)(\partial_\theta \mathcal{U}^1_b|_{\theta=0} + \partial_z \mathcal{U}^2_c|_{z=0} + K^0) = 0, \end{cases}$$

et, pour $j \geq 1$, le problème $(S^j_{cl}(T_0))$ est équivalent à

$$\begin{cases} M\mathcal{U}^j|_{x_n=0} = 0 \\ \Pi_0(\partial_\theta \mathcal{U}^{j+1}_b|_{\theta=0} + \partial_z \mathcal{U}^{j+2}_c|_{z=0} + K^j|_{\theta=z=0}) = 0 \\ (\Pi_- + \Re\Pi_+)(\partial_\theta \mathcal{U}^{j+1}_b|_{\theta=0} + \partial_z \mathcal{U}^{j+2}_c|_{z=0} + K^j|_{\theta=z=0}) = 0. \end{cases}$$

5.7. *Le Tableau de la Cascade*

On considère, pour $j \geq 0$, les problèmes

$$(S^j(T_0)) \colon \begin{cases} \mathcal{F}^j_a = (Id - {}^t\Pi_0)\mathcal{F}^j_b = \mathcal{F}^j_c = {}^t\,\Pi_0\mathcal{F}^{j+1}_b = 0 \\ \text{quand}(t, x, \theta, z) \in \Omega^+_{T_0} \times \mathbb{R}^+_\theta \times \mathbb{R}^+_z, \end{cases}$$

et on illustre notre statégie de résolution en cascade par le tableau suivant:

	(S^0)	(S^1)	(S^2)
$\mathcal{F}^0$	$\mathcal{F}^0_a, (Id -{}^t\,\Pi_0)\mathcal{F}^0_b, \mathcal{F}^0_c$		
$\mathcal{F}^1$	${}^t\Pi_0\mathcal{F}^1_b$	$\mathcal{F}^1_a, (Id -{}^t\,\Pi_0)\mathcal{F}^1_b, \mathcal{F}^1_c$	
$\mathcal{F}^2$		${}^t\Pi_0\mathcal{F}^2_b$	$\mathcal{F}^2_a, (Id -{}^t\,\Pi_0)\mathcal{F}^2_b, \mathcal{F}^2_c$

Chaque terme de la première colonne est la somme de la ligne correspondante. Lors de la résolution du problème (S^j), les profils inconnus sont $\mathcal{U}^j_a$, $\mathcal{U}^{j+1}_b$ et $\mathcal{U}^{j+2}_c$. Notons que compte-tenu de la forme de $\mathcal{F}^0_b$, on a ${}^t\Pi_0\mathcal{F}^0_b = 0$.

Dans le cas où l'opérateur est semilinéaire, on dispose des résultats de Guès (1995) et Sueur (2006a) pour le cas où on prescrit des conditions aux limites de type Dirichlet aux problème parabolique et des résultats de Sueur (2006b) pour l'approximation d'une discontinuité. Aussi, il est possible de faire une analyse comparée. Dans Sueur (2006b), on montre qu'il est possible de ramener le problème de l'approximation d'une discontinuité le long d'une hypersurface caractéristique à un problème dans le demi-espace. Selon une propriété dite de Rankine-Hugoniot, la discontinuité est polarisée sur le noyau de la matrice normale. Les conditions aux limites pour les perturbations visqueuses sont la retranscription des conditions de raccord portant sur la fonction et sa dérivée. Au niveau de la cascade, passer de Dirichlet à ces conditions revenait à décaler d'un cran vers la gauche les profils de couche limite non caractéristique. Passer au champ Π exhibé dans cet article revient alors à décaler à leur tour d'un cran vers la gauche les profils de couche limite caractéristique, et d'un cran de plus les couches limites non caractéristiques. Ce dernier point provient du couplage induit par la partie "Neumann" des conditions aux limites.

En optique géométrique, pour des oscillations de fréquence $\frac{1}{\varepsilon}$, (Cheverry et al., 2003) ont défini la terminologie suivante: les oscillations d'amplitudes $O(\varepsilon)$ sont dites de faibles amplitudes, les oscillations d'amplitudes $O(\sqrt{\varepsilon})$ sont dites de fortes amplitudes, et les oscillations d'amplitudes $O(1)$ de grandes amplitudes. Par analogie, une couche limite non caractéristique (respectivement caractéristique) d'amplitude $O(\varepsilon)$ (resp. $O(\sqrt{\varepsilon})$) est dite de faible amplitude, une couche limite caractéristique ou non d'amplitude $O(1)$ de grande amplitude, une couche limite non caractéristique (resp. caractéristique) d'amplitude $O(\sqrt{\varepsilon})$ (resp. $O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$) de forte amplitude. Passer, pour les perturbations paraboliques, de conditions aux limites de type Dirichlet aux conditions exposées ici, c'est passer de couches limites de grande amplitude à des couches limites de faibles amplitudes.

Voyons comment se résolvent successivement les problèmes $(S^j(T_0)) - (S^j_{cl}(T_0))$ pour $j \geq 0$. Nous commençons par détailler le cas $j = 0$, qui est un peu particulier.

5.8. $(S^0(T_0)) - (S^0_{cl}(T_0))$

On définit l'opérateur $\Xi^{[1]}$ par $\Xi^{[1]}W := \Xi W + K^{[1]}W\partial_\theta W$ où $K^{[1]}$ désigne le tenseur $K^{[1]} :=^t \Pi_0 D_u A_n(b, \mathring{u}^0).\Pi_0$ et on considère le problème

$$\left.\begin{aligned}(Id - \Pi_0)\mathcal{U}^1_b = 0\\ \Xi^{[1]}\mathcal{U}^1_b = 0\end{aligned}\right\} \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega^+_{T_0} \times \mathbb{R}^+_\theta,$$

$$\partial_\theta \mathcal{U}^1_b|_{\theta=0} = -\Pi_0 K^0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega^+_{T_0},$$

$$\mathcal{U}^1_b = 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega^+_0.$$

Rappelons, pour le confort du lecteur, que l'opérateur Ξ est défini à la Section 7.3. A priori, ce problème est non linéaire en raison du terme $K^{[1]}\mathcal{U}^1_b\partial_\theta\mathcal{U}^1_b$. Cependant, sous la condition $(Id - \Pi_0)\mathcal{U}^1_b = 0$, la propriété de transparence du Corollaire 4.2 assure que ce terme est nul. L'opérateur $\Xi^{[1]}$ coïncide alors avec l'opérateur Ξ. Le théorème 5.5 assure ainsi l'existence d'une solution régulière $\mathcal{U}^1_b \in \mathcal{N}_\theta(T_0)$.

A l'aide de la Proposition 5.6, on construit $\mathcal{U}^2_c$ comme solution dans $\mathcal{N}_z(T_0)$ de l'EDO en z paramétré en (t, x):

$$(-\mathring{E}_{n,n}\partial^2_z + \mathring{A}_n\partial_z)\mathcal{U}^2_c = 0 \quad \text{quand } (t, x, z) \in \Omega^+_{T_0} \times \mathbb{R}^+_z,$$

$$\partial_z\mathcal{U}^2_c|_{z=0} = -(\Pi_- + \Re\Pi_+)K^0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega^+_{T_0}.$$

Avec ces choix de $\mathcal{U}^1_b$ et $\mathcal{U}^2_c$, les problèmes $(S^0(T_0)) - (S^0_{cl}(T_0))$ sont vérifiées.

Notons que les deux problèmes sont découplés. Cela provient essentiellement des relations de polarisation $(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^1 = 0$ et $(Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^2 = 0$ (cf. point 1 de la Proposition 5.6).

Aux ordres supérieurs, il en est autrement. Les différents types de termes (partie régulière, couche limite caractéristique et non caractéristique) sont couplés par les conditions aux limites.

5.9. $(S^j(T_0)) - (S^j_{cl}(T_0))$; $j \geq 1$

On va se servir, là encore, des résultats des Sections 6.3 et 6.4.

On prend pour $\mathcal{U}_a^j$ la solution du problème mixte symétrique hyperbolique linéaire:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0\mathcal{U}_a^j &= F_u'(b, u^0)\mathcal{U}_a^j + q_a^j \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+, \\ M\mathcal{U}_a^j &= -M(\mathcal{U}_b^j|_{\theta=0} + \mathcal{U}_c^j|_{z=0}) \quad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_{T_0}, \\ \mathcal{U}_a^j &= 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+. \end{aligned}$$

On détermine ensuite, dans l'ordre que l'on veut, $(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^{j+1}$ et $(Id - \Pi_-)$ $\mathcal{U}_c^{j+2}$ comme suit. On prend $(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^{j+1}$ comme l'unique solution dans $\mathcal{N}_\theta(T_0)$ de

$$\mathring{A}_n\partial_\theta(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^{j+1} = \phi_b^{j+1} \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_\theta^+,$$

où $\phi_b^{j+1} := -(Id -{}^t\,\Pi_0)[(\mathcal{H}_0 + A_n^\flat\theta\partial_\theta - F_u'(b, u^0) - \mathring{E}_{n,n}\partial_\theta^2)\mathcal{U}_b^j - q_b^j]$. L'unicité provient de ce que l'opérateur ∂_θ réalise un automorphisme de $\mathcal{N}_\theta(T_0)$.

On construit $(Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^{j+2}$ comme solution dans $\mathcal{N}_z(T_0)$ de l'EDO en $z \in \mathbb{R}^+$ paramétrée par $(t, x) \in \Omega_{T_0}^+$:

$$(-\partial_z^2 + \mathring{E}_{n,n}^{-1}\mathring{A}_n\partial_z)(Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^{j+2} = (Id - \Pi_-)\mathring{E}_{n,n}^{-1}q_c^j. \tag{66}$$

Reste à determiner $\Pi_0\mathcal{U}_b^{j+1}$ et $\Pi_-\mathcal{U}_c^{j+2}$. Cela se fait, encore une fois, dans l'ordre que l'on veut, comme suit: on construit $\Pi_0\mathcal{U}_b^{j+1}$ comme l'unique solution dans $\mathcal{N}_\theta(T_0)$ du problème hyperbolique-parabolique

$$\begin{aligned} \Xi\mathcal{U}_b^{j+1} &= \psi_b^{j+1} \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_\theta^+, \\ \Pi_0\partial_\theta\mathcal{U}_b^{j+1}|_{\theta=0} &= d_b^{j+1} \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+ \\ \Pi_0\mathcal{U}_b^{j+1} &= 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \psi_b^{j+1} &:= {}^t\Pi_0(q_b^j -{}^t\,\Pi_0(\mathcal{H}_0 + A_n^\flat\theta\partial_\theta - \mathring{E}_{n,n}\partial_\theta^2)(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^{j+1}) \\ d_b^{j+1} &:= -\Pi_0(\partial_z\mathcal{U}_c^{j+2}|_{z=0} + K^j|_{\theta=z=0}). \end{aligned}$$

On construit $\Pi_-\mathcal{U}_c^{j+2}$ comme solution dans $\mathcal{N}_z(T_0)$ de l'EDO en z paramétrée en (t, x):

$$\begin{aligned} (-\partial_z^2 + \mathring{E}_{n,n}^{-1}\mathring{A}_n\partial_z)\Pi_-\mathcal{U}_c^{j+2} &= \Pi_-\mathring{E}_{n,n}^{-1}q_c^j \quad \text{quand } (t, x, z) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_z^+, \\ \Pi_-\partial_z\mathcal{U}_c^{j+2}|_{z=0} &= L_c^{j+2} \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+, \end{aligned}$$

où

$$L_c^{j+2} := -\Pi_-(\partial_\theta \mathscr{U}_b^{j+1}|_{\theta=0} + K^j|_{\theta=z=0}) - \Re\Pi_+(\partial_\theta \mathscr{U}_b^{j+1}|_{\theta=0} + \partial_z \mathscr{U}_c^{j+2}|_{z=0} + K^j|_{\theta=z=0}).$$

5.10. *Conclusion*

Avec la stratégie précédente, on obtient que le développement (44) satisfait les problèmes $(S^j(T_0))_{0\leq j\leq k}$ et $(S^j_{cl}(T_0))_{0\leq j\leq k}$. Or, se référant au tableau de la Section 6.7, on remarque lorsque les problèmes $(S^j(T_0))_{0\leq j\leq k}$ sont vérifiés, les premiers termes non nuls de l'ansatz de résolution sont

$$\sqrt{\varepsilon}^{k+1}(\mathscr{F}_a^{k+1} + (Id -^t \Pi_0)\mathscr{F}_b^{k+1} + \mathscr{F}_c^{k+1}).$$

On a ainsi un reste de la forme $\sqrt{\varepsilon}^{k+1}R_\varepsilon$, avec $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \Lambda^m(T_0)$, pour tout entier naturel m. Ainsi se conclut la preuve du Théorème 4.6.

Pour être complet, signalons comment obtenir la deuxième moitié des propriétés de polarisation (23). Il suffit de se rappeler que $q_c^1 = 0$ (cf. Section 6.5) et qu'ainsi le second membre dans l'équation (66) est nul. La Proposition 5.6 permet de conclure.

6. Preuve du Théorème 4.7

Pour ne pas accabler le lecteur, on omet le paramètre b dans les lignes qui suivent. Celui-ci ne joue pas de rôle majeur dans l'analyse mathématique du problème.

6.1. *Reformulation du Problème*

On va reformuler le problème de manière à jauger la force des non linéarités en fonction du petit paramètre ε. On cherche une famille de solutions exactes de $\mathbf{P}^\varepsilon(T_0)$ (au moins pour une gamme de ε petits) sous la forme $u^\varepsilon = a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon$.

Nous utilisons les définitions de la sous-Section 4.4. Définissons

$$F_R^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, w, \partial_x w, \partial_x^2 a^\varepsilon) := -(w, \partial_x w).\mathscr{L}^{\varepsilon,\flat}(a^\varepsilon, \varepsilon^M w, \partial a^\varepsilon, \varepsilon^M \partial_x w, \partial_x^2 a^\varepsilon). \tag{67}$$

Rappelons que les fonctions $\mathscr{L}^{\varepsilon,\flat}$ sont définies en (55), Section 4.

Introduisons, pour simplifier les notations, la fonction J définie, pour tout $(\epsilon, u, v) \in [0,1] \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N)^n$, par $J(\epsilon, u, v) := K(\epsilon, u, v', \epsilon v_n)$, où $v := (v' := (v_1, \ldots, v_{n-1}), v_n)$.

Par un développement de Taylor, on obtient l'existence d'une fonction $J^\flat$, à valenrs dans $\mathbb{R}^{(1+n)\times N^2}$, telle que, pour tout $(\epsilon, u_1, u_2, v_1, v_2) \in [0,1] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N)^n \times (\mathbb{R}^N)^n$,

$$J(\epsilon, u_1 + u_2, v_1 + v_2) = J(\epsilon, u_1, v_1) + (u_2, v_2).J^\flat(\epsilon, u_1, u_2, v_1, v_2). \tag{68}$$

On renvoie à (48), Section 4 pour le sens du produit dans l'expression précédente.

De la même façon, on a l'existence de matrices $\Pi^\flat$ de tailles $(N-r)\times N$, de classe C^∞, telles que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$,

$$\Pi(u+v) = \Pi(u) + v.\Pi^\flat(u,v).$$

On introduit aussi, pour tout $(\varepsilon, u, v) \in [0,1] \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N)^n$,

$$K_R^\varepsilon(a^\varepsilon, u, \partial_x a^\varepsilon, v) := u.\Pi^\flat(a^\varepsilon, \varepsilon^M u).(\partial_n a^\varepsilon + \varepsilon^M v_n) \\ + (u, v).J^\flat(\sqrt{\varepsilon}, a^\varepsilon, \varepsilon^M u, \partial_x a^\varepsilon, \varepsilon^M v). \quad (69)$$

Proposition 6.1. *Soit T un réel positif. Pour chaque ε, u^ε vérifie le problème $\mathbf{P}^\varepsilon(T)$ si et seulement si w^ε vérifie le problème*:

$$\begin{cases} \mathscr{L}_P^\varepsilon(u^\varepsilon, \partial)w^\varepsilon = F_R^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, w^\varepsilon, \partial_x w^\varepsilon, \partial_x^2 a^\varepsilon) - g^\varepsilon & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ \left.\begin{aligned} Mw^\varepsilon = 0 \\ \Pi(a^\varepsilon)\partial_n w^\varepsilon + K_R^\varepsilon(a^\varepsilon, w^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, \partial_x w^\varepsilon) = -h^\varepsilon \end{aligned}\right\} & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \\ w^\varepsilon = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+. \end{cases} \quad (70)$$

Preuve. Nous ne montrons que le sens direct, laissant le lecteur remonter la preuve pour se convaincre de la réciproque. On commence par montrer la première équation. On utilise la relation (56) avec a^ε et $\varepsilon^M w^\varepsilon$ en lieu et place de u et v. Ainsi

$$\mathscr{L}^\varepsilon(u^\varepsilon, \partial_x u^\varepsilon, \partial)u^\varepsilon = \mathscr{L}^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, \partial)a^\varepsilon + \mathscr{L}_P^\varepsilon(u^\varepsilon, \partial)\varepsilon^M w^\varepsilon \\ + \varepsilon^M(w^\varepsilon, \partial_x w^\varepsilon).\mathscr{L}^{\varepsilon,\flat}(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, \varepsilon^M \partial_x w^\varepsilon, \varepsilon^M \partial_x^2 w^\varepsilon). \quad (71)$$

Par l'équation (11), on a $\mathscr{L}^\varepsilon(u^\varepsilon, \partial_x u^\varepsilon, \partial)u^\varepsilon = 0$ et par hypothèse du Théorème 4.7, on a $\mathscr{L}^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, \partial)a^\varepsilon = \varepsilon^M g^\varepsilon$. L'identité (71) devient donc plus simplement:

$$0 = \varepsilon^M g^\varepsilon + \mathscr{L}_P^\varepsilon(u^\varepsilon, \partial)\varepsilon^M w^\varepsilon - \varepsilon^M F_R^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, w^\varepsilon, \partial_x w^\varepsilon, \partial_x^2 a^\varepsilon),$$

ce qui, arrangée, donne la première équation de (70).

Les deuxièmes et quatrièmes équation de (70) sont triviales. Il nous reste à détailler la troisième. Par l'équation (13), on a $\Psi^\varepsilon(u^\varepsilon, \partial_x u^\varepsilon) = 0$. Avec la définition (8) et la définition de J, ceci s'écrit encore

$$\Pi(u^\varepsilon)\partial_n u^\varepsilon + J(\sqrt{\varepsilon}, u^\varepsilon, \partial_x u^\varepsilon) = 0.$$

On décompose le premier terme. Ainsi, on obtient

$$\Pi(u^\varepsilon)\partial_n a^\varepsilon + \varepsilon^M \Pi(u^\varepsilon)\partial_n w^\varepsilon + J(\sqrt{\varepsilon}, u^\varepsilon, \partial_x u^\varepsilon) = 0.$$

On utilise les relations (68) et (69):

$$\Pi(a^\varepsilon)\partial_n a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon.\Pi^\flat(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon)\partial_n a^\varepsilon + \varepsilon^M \Pi(a^\varepsilon)\partial_n w^\varepsilon + \varepsilon^{2M}\Pi^\flat(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon)\partial_n w^\varepsilon \\ + J(\sqrt{\varepsilon}, a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon) + \varepsilon^M(w^\varepsilon, \partial_x w^\varepsilon).J^\flat(\sqrt{\varepsilon}, a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, \varepsilon^M \partial_x w^\varepsilon) = 0.$$

Avec les définitions (8) et (69), ceci s'écrit plus simplement

$$\Psi^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon) + \varepsilon^M K_R^\varepsilon(a^\varepsilon, w^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, \partial_x w^\varepsilon) + \varepsilon^M \Pi(a^\varepsilon)\partial_n w^\varepsilon = 0.$$

Comme par hypothèse du Théorème 4.7, on a $\Psi^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon) = \varepsilon^M h^\varepsilon$, on obtient l'équation souhaitée. □

Pour montrer le Théorème 4.7, il suffit donc de montrer qu'il existe une famille $(w^\varepsilon)_\varepsilon \in \Lambda^{m_0}(T_0)$ de solutions des problèmes (70).

6.2. *Analyse de F_R^ε*

Il est essentiel dans la suite (cf. Lemme 6.15) de savoir de quelle manière les termes F_R^ε et K_R^ε dépendent de ε. L'analyse du terme F_R^ε est subtile. Ce paragraphe lui est consacrée. On regarde la dépendance en les dérivées de a^ε et de w. Revenant aux définitions de la Section 4, on obtient l'existence d'un opérateur $\mathscr{E}_P^{\flat,x}(u, v, \partial)$ et d'une fonction $E^{\flat,x}(u, v, \partial_x u, \partial_x v)$ tels que

$$(v, \partial_x v).\mathscr{E}_P^\flat(u, v, \partial) = v.\mathscr{E}_P^{\flat,0}(u, v, \partial) + \partial_x v.\mathscr{E}_P^{\flat,x}(u, v, \partial),$$
$$(v, \partial_x v).E^\flat(u, v, \partial u, \partial v) = v.E^{\flat,0}(u, v, \partial u, \partial v) + \partial_x v.E^{\flat,x}(u, v, \partial u, \partial v).$$

On remarque alors qu'il existe trois fonctions, de classe C^∞, $\mathscr{L}_I$, $\mathscr{L}_{II}$ et $\mathscr{L}_{III}$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_I(u, v, \partial_x u).\partial_x^2 u &:= -\sum_{1\le i,j\le n} E_{i,j}^\flat(u, v)\partial_{ij}u,\\
\mathscr{L}_{II}(\varepsilon, u, v, \partial u, \partial_x v) &:= \mathscr{H}^\flat(u, v, \partial)u - \varepsilon\sum_{1\le i,j\le n}\partial_u E_{i,j}^\flat(u, v).\partial_i u.\partial_j u\\
&\quad - \varepsilon E^{\flat,0}(u, v, \partial_x u, \partial_x v),\\
\partial_x v.\mathscr{L}_{III}(u, v, \partial_x u, \partial_x v) &:= -v.\sum_{1\le i,j\le n}\partial_v E_{i,j}^\flat(u, v).\partial_i v.\partial_j u - \partial_x v.(\mathscr{E}_P^{\flat,x}(u, v, \partial)u\\
&\quad + E^{\flat,x}(u, v, \partial_x u, \partial_x v)),
\end{aligned}$$

telles que

$$\begin{aligned}
(v, \partial_x v).\mathscr{L}^{\varepsilon,\flat}(u, v, \partial u, \partial_x v, \partial_x^2 u) &= \varepsilon v.\mathscr{L}_I(u, v, \partial_x u).\partial_x^2 u + v.\mathscr{L}_{II}(\varepsilon, u, v, \partial u, \partial_x v)\\
&\quad + \varepsilon\partial_x v.\mathscr{L}_{III}(u, v, \partial_x u, \partial_x v). \qquad (72)
\end{aligned}$$

Combinant la Définition (67) et la relation (72), on a

$$\begin{aligned}
F_R^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, w, \partial_x w, \partial_x^2 a^\varepsilon) &:= F_{R,I}^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, w, \partial_x^2 a^\varepsilon) + F_{R,II}^\varepsilon(\varepsilon, a^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, w, \partial_x w)\\
&\quad + F_{R,III}^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, w, \partial_x w)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
F_{R,I}^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, w, \partial_x^2 a^\varepsilon) &:= w.\mathscr{L}_I(a^\varepsilon, \varepsilon^M w, \partial_x a^\varepsilon).\varepsilon\partial_x^2 a^\varepsilon\\
F_{R,II}^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, w, \partial_x w) &:= w.\mathscr{L}_{II}(\varepsilon, a^\varepsilon, \varepsilon^M w, \partial a^\varepsilon, \varepsilon^M\partial_x w)\\
F_{R,III}^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, w, \partial_x w) &:= \varepsilon\partial_x w.\mathscr{L}_{III}(a^\varepsilon, \varepsilon^M w, \partial_x a^\varepsilon, \varepsilon^M\partial_x w).
\end{aligned}$$

Le terme $F_{R,I}^\varepsilon$ contient des dérivées secondes de a^ε mais pas de dérivée de w. Le facteur ε sera utilisé avec les dérivées secondes de a^ε. Plus précisemment, la collection $\varepsilon\partial_x^2 a^\varepsilon$, ainsi que ses dérivées conormales, sont uniformément bornées en ε en norme L^∞.

Le terme $F^{\varepsilon}_{R,III}$ ne contient qu'au pire des dérivées premières de a^{ε} mais aussi des dérivées premières en w. Le facteur ε sera utilisé pour contrôler le terme $\varepsilon\partial_x w$ en facteur de $\mathscr{L}_{III}$.

Le terme $F^{\varepsilon}_{R,II}$ est plus inoffensif, contenant moins de dérivées que les deux termes précédents.

6.3. *Changements d'Inconnues*

On va effectuer, pour chaque ε, un changement linéaire d'inconnue qui permet de redresser la partie principale des conditions aux limites. Plus précisemment, on redresse le champ $\Pi(a^{\varepsilon})\partial_n$, tout en préservant la condition aux limites $Mw^{\varepsilon} = 0$. L'idée sous-jacente est exprimée dans le lemme algébrique suivant. Rappelons (cf. sous-Section 4.1) que F_0 désigne le sous-espace $F_0 := \mathrm{Vect}(e_i)_{N-d_0+1\leq i\leq N}$, où $(e_i)_{1\leq i\leq N}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$. M désigne la matrice $M = \begin{bmatrix} Id_r & 0_{r,N-r}\end{bmatrix}$. Ainsi $\ker M = \mathrm{Vect}(e_i)_{r+1\leq i\leq N}$.

Proposition 6.2. *Ils existent des matrices carrées $G_1(a)$ et $G_2(a)$, C^{∞}, de taille respective $N-r$ et N, inversibles, telles que pour tout $a \in \ker M$,*

$$G_2(a)(F_0) = F_0 \qquad G_2(a)(\ker M) = \ker M \qquad et \qquad (G_1\Pi G_2)(a) = \check{\Pi}$$

où $\check{\Pi}$ est la matrice de taille $(N-r)\times N$: $\check{\Pi} := \begin{bmatrix} O_{N-r,r} & Id_{N-r}\end{bmatrix}$.

Preuve. Notons $(\varepsilon_i(a))_{1\leq i\leq N-r}$ une base C^{∞} de $\ker \Pi(a) = (\ker M)^{\perp E_{n,n}(a)}$. On note $G_2(a)$ les matrices carrées $N\times N$ définies par

$$\begin{aligned} G_2(a).e_i &= \varepsilon_i(a) \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq r,\\ G_2(a).e_i &= e_i \qquad \text{pour } r+1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}^N$,

- $G_2(a)|_{\ker M} = Id|_{\ker M}$, donc à fortiori $G_2(a)(F_0) = F_0$ et $G_2(a)(\ker M) = \ker M$,
- $G_2(a)$ est inversible (car la famille $(\varepsilon_1(a), \ldots, \varepsilon_r(a), e_{r+1}, \ldots, e_N)$ est une base de $\mathbb{R}^N = \ker \Pi(a) \oplus_{\perp} \ker M$) et
- $(\Pi G_2)(a).e_i = 0 = \check{\Pi}.e_i$ pour $1 \leq i \leq r$.
  De plus, les matrices $G_2(a)$ dépendent de façon C^{∞} de a.

Utilisant à nouveau l'argument que, pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, $\ker M$ et $\ker \Pi(a)$ sont en somme directe orthogonale, la restriction $\Pi(a)|_{\ker M}$ est bijective. Appelons $(\beta_i)_{1\leq i\leq N-r}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{N-r}$ et, pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, $G_1(a)$ la matrice carrée $(N-r)\times(N-r)$ telle que $(G_1\Pi)(a).\varepsilon_{r+i} = \beta_i$ pour $1 \leq i \leq N-r$. Comme les matrices $\Pi(a)$ dépendent de façon C^{∞} de a, il en va de même pour $G_1(a)$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, on a,

$$\begin{aligned} &\text{pour } 1 \leq i \leq N-r, \quad (G_1\Pi G_2)(a).\varepsilon_{r+i} = (G_1\Pi)(a).\varepsilon_{r+i} = \beta_i = \check{\Pi}.\varepsilon_{r+i},\\ &\text{pour } 1 \leq i \leq r, \quad (G_1\Pi G_2)(a).\varepsilon_i = 0 = \check{\Pi}.\varepsilon_i. \end{aligned}$$

Ainsi $G_1\Pi G_2$ et $\check{\Pi}$ coincident sur l'ensemble $\{\varepsilon_i;\ 1 \leq i \leq N\}$, qui constitue une base de $\mathbb{R}^N$ donc $G_1\Pi G_2 = \check{\Pi}$. □

Pour chaque valeur de ε, on effectue le changement linéaire de fonction inconnue $w^\varepsilon = G_2(a^\varepsilon)\check{w}^\varepsilon$, et on note $\check{u}^\varepsilon = G_2(a^\varepsilon)^{-1}u^\varepsilon$. En multipliant la première équation (respectivement la troisième) par ${}^tG_2(a^\varepsilon)$ (resp. $G_1(a^\varepsilon)$), on obtient des problèmes redressés:

$$\begin{cases} \check{\mathscr{L}}^\varepsilon_P(\check{u}^\varepsilon, \partial)\check{w}^\varepsilon = \check{F}^\varepsilon_R(a^\varepsilon, \check{w}^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, \partial_x \check{w}^\varepsilon, \partial^2_x a^\varepsilon) - \check{g}^\varepsilon & \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \\ \left.\begin{array}{l} M\check{w}^\varepsilon = 0 \\ \check{\Pi}\partial_n \check{w}^\varepsilon + \check{K}^\varepsilon_R(a^\varepsilon, \check{w}^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, \partial_x \check{w}^\varepsilon) = -\check{h}^\varepsilon \end{array}\right\} & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \\ \check{w}^\varepsilon = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_0. \end{cases} \tag{73}$$

où l'opérateur $\check{\mathscr{L}}^\varepsilon$ est défini par $\check{\mathscr{L}}^\varepsilon_P(\check{u}, \partial)\check{w} := (\check{\mathscr{H}}^\varepsilon - \varepsilon\check{\mathscr{E}}^\varepsilon_P)(\check{u}, \partial)\check{w}$ avec

$$\check{\mathscr{H}}^\varepsilon(\check{u}, \partial) := \sum_{0\le j\le n} \check{A}^\varepsilon_j(\check{u})\partial_j, \; \check{\mathscr{E}}^\varepsilon_P(\check{u}, \partial) := \sum_{1\le i,j\le n} \partial_i \check{E}^\varepsilon_{i,j}(\check{u})\partial_j,$$

$$\text{où} \begin{cases} \check{A}^\varepsilon_j(\check{u}) := {}^tG_2(a^\varepsilon)A_j(G_2(a^\varepsilon)\check{u})G_2(a^\varepsilon) & \text{pour } 0 \le j \le n \\ \check{E}^\varepsilon_{i,j}(\check{u}) := {}^tG_2(a^\varepsilon)E_{i,j}(G_2(a^\varepsilon)\check{u})G_2(a^\varepsilon) & \text{pour } 1 \le i, j \le n. \end{cases} \tag{74}$$

La fonction $\check{F}^\varepsilon_R$ est de la forme

$$\begin{aligned} \check{F}^\varepsilon_R(a^\varepsilon, \check{w}, \partial a^\varepsilon, \partial_x \check{w}, \partial^2_x a^\varepsilon) &:= \check{F}^\varepsilon_{R,I}(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, \check{w}, \partial^2_x a^\varepsilon) + \check{F}^\varepsilon_{R,II}(a^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, \check{w}, \partial_x \check{w}) \\ &\quad + \check{F}^\varepsilon_{R,III}(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, \check{w}, \partial_x \check{w}) \end{aligned}$$

où

- $\check{F}^\varepsilon_{R,I} := \check{F}^\varepsilon_{R,I,1} + \check{F}^\varepsilon_{R,I,2}$ avec

$$\check{F}^\varepsilon_{R,I,1} := {}^tG_2(a^\varepsilon)F_{R,I}(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, G_2(a^\varepsilon)\check{w}, \partial^2_x a^\varepsilon)$$

$$\check{F}^\varepsilon_{R,I,2} := -\varepsilon^t G_2(a^\varepsilon). \sum_{0\le i,j\le n} E_{i,j}(G_2(a^\varepsilon).\check{u}).\partial^2_a G_2(a^\varepsilon).\partial_{ij}a^\varepsilon,$$

- $\check{F}_{R,II} := \check{F}_{R,II,1} + \check{F}_{R,II,2} + \check{F}_{R,II,3}$ avec

$$\check{F}^\varepsilon_{R,II,1} := {}^tG_2(a^\varepsilon)F_{R,II}(a^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, G_2(a^\varepsilon)\check{w}, \partial_x(G_2(a^\varepsilon))\check{w} + G_2(a^\varepsilon)\partial_x \check{w})$$

$$\check{F}^\varepsilon_{R,II,2} := {}^tG_2(a^\varepsilon). \sum_{0\le j\le n} A_j(G_2(a^\varepsilon).\check{u}).\partial_a G_2(a^\varepsilon).\partial_j a^\varepsilon$$

$$\check{F}^\varepsilon_{R,II,3} := -\varepsilon^t G_2(a^\varepsilon). \sum_{0\le i,j\le n} \Gamma_{i,j}$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,j} &:= \partial_u E_{i,j}(G_2(a^\varepsilon).\check{u}).\partial_a G_2(a^\varepsilon).\partial_i a^\varepsilon.\partial_a G_2(a^\varepsilon).\partial_j a^\varepsilon \\ &\quad + E_{i,j}(G_2(a^\varepsilon).\check{u}).\partial^2_a G_2(a^\varepsilon).\partial_i a^\varepsilon.\partial_j a^\varepsilon \end{aligned}$$

- $\check{F}^{\varepsilon}_{R,III} := \check{F}^{\varepsilon}_{R,III,1} + \check{F}^{\varepsilon}_{R,III,2}$ avec

$$\check{F}^{\varepsilon}_{R,III,1} := {}^tG_2(a^\varepsilon)F^{\varepsilon}_{R,III}(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, G_2(a^\varepsilon)\check{w}, \partial_x(G_2(a^\varepsilon))\check{w} + G_2(a^\varepsilon)\partial_x\check{w})$$
$$\check{F}^{\varepsilon}_{R,III,2} := -\varepsilon \sum_{0\le i,j\le n} {}^t\partial_a G_2(a^\varepsilon).\partial_i a^\varepsilon.E_{i,j}(G_2(a^\varepsilon).\check{u})\partial_j\check{w}.$$

La fonction $\check{g}^\varepsilon$ vaut $\check{g}^\varepsilon := {}^tG_2(a^\varepsilon)g^\varepsilon$. Les fonctions $\check{K}^\varepsilon_R$ et $\check{h}^\varepsilon$ sont définies par

$$\begin{aligned}\check{K}^\varepsilon_R(a^\varepsilon, \check{u}, \partial_x a^\varepsilon, \check{v}) := (G_1\Pi\partial_n G_2)(a^\varepsilon)\check{u} + G_1(a^\varepsilon)K_R(\sqrt{\varepsilon}, a^\varepsilon, G_2(a^\varepsilon)\check{u}, \partial_x a^\varepsilon,&\\ (\partial_x G_2)(a^\varepsilon)\check{v} + G_2(a^\varepsilon)\check{v}),& \quad (75)\\ \check{h}^\varepsilon := G_1(a^\varepsilon)h^\varepsilon.& \quad (76)\end{aligned}$$

On introduit les notations

$$||u||_{0,T} := ||u||_{L^\infty(\Omega_T^+)}, \qquad ||u||_{1,T} := ||u||_{0,T} + ||Zu||_{0,T}, \qquad ||u||_{Lip} := ||\partial u||_{0,T}.$$

On définit pour $s \in \mathbb{N}$ les ensembles

$$\Upsilon^s(T) := \{(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in (\mathscr{H}^s_{co}(0,T))^{]0,1]}/\exists\varepsilon' \in]0,1]/\underline{\upsilon}^{\varepsilon',s}(T) < \infty\},$$
où $\underline{\upsilon}^{\varepsilon',s}(T) := \sup_{\varepsilon\in]0,\varepsilon']}(\upsilon^{\varepsilon,s}(T) + \upsilon^{\varepsilon,s}_M(T))$
$$\text{avec}\begin{cases}\upsilon^{\varepsilon,s}(T) := |u^\varepsilon||_{s,T} + \sqrt{\varepsilon}|\partial_n u^\varepsilon||_{s,T} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}|\partial_n^2 u^\varepsilon||_{s,T},\\ \upsilon^{\varepsilon,s}_M(T) := \varepsilon^{M-\frac{3}{4}}||u^\varepsilon||_{1,T} + \varepsilon^M||u^\varepsilon||_{Lip}.\end{cases}$$

Rappelons que les normes $|u||_{s,T}$ sont définies par (17). On va montrer qu'il existe une famille $(\check{w}^\varepsilon)_\varepsilon \in \Upsilon^{m_0}(T_0)$ de solutions des problèmes (73). On en déduira qu'il existe une famille $(w^\varepsilon)_\varepsilon \in \Upsilon^{m_0}(T_0)$ de solutions des problèmes (70). Nous estimerons ensuite les dérivées normales itérées directement sur la première équation du problème (70).

6.4. *Analyse des Problèmes* (73)

Par congruence, pour chaque ε, l'opérateur $\check{\mathscr{H}}^\varepsilon$ est symétrique hyperbolique. Examinons la structure de sa matrice normale $\check{A}^\varepsilon_n(\check{u})$ lorsque $\check{u}$ satisfait la condition aux limites $M\check{u} = 0$. Pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ et pour tout $\check{u} \in \ker M$, $\ker \check{A}^\varepsilon_n(\check{u}) = G_2(a^\varepsilon)^{-1}.\ker A^\varepsilon_n(u^\varepsilon)$, où $u = G_2(a^\varepsilon).\check{u} \in G_2(a^\varepsilon).\ker M = \ker M$. Ainsi, $\ker \check{A}^\varepsilon_n(\check{u}) = G_2(a^\varepsilon)^{-1}.F_0 = F_0$. En particulier, le bord $\{x_n = 0\}$ est non caractéristique (si $d_0 = 0$) ou caractéristique de multiplicité constante d_0 (cf. Hypothèse 1.1). Ensuite, comme $\check{A}^\varepsilon_n$ est symétrique, elle est de la forme $\check{A}^\varepsilon_n = \begin{bmatrix}\check{H} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ où $\check{H}$ est une matrice carrée de taille $N - d_0$ inversible. Rappelons que cette structure, obtenue dans la Section 4.1 et donc conservée par les changements linéaires d'inconnus précédents, est une conséquence de l'hypothèse 1.3. Par congruence, on déduit de l'hypothèse 1.2 que la condition aux limites $M\check{u} = 0$ est maximale dissipative.

Remarque 6.3. Une technique, classique dans ce cas de figure, utilisée dans Guès (1993, 1995), est de multiplier le système à gauche par la matrice de taille $N \times N$: $Q := \begin{bmatrix}\check{H}^{-1} & 0\\ 0 & I_{N-d_0}\end{bmatrix}$. L'interêt est que l'on obtient ainsi une matrice normale

$\hat{A}_n^\varepsilon := Q\check{A}_n^\varepsilon$ qui est constante lorsque $M\check{u} = 0$. Lors des estimations conormales, celà simplifie dans Guès (1993, 1995) le traitement des commutateurs. Ici, il semble délicat d'utiliser la même technique. En effet, nous utiliserons dans la Section 6.8.1 (troisième cas) la symétrie de la formulation (73) pour établir une estimation uniforme en ε.

Par congruence, la condition d'orthogonalité (43) donne pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$,

$$\ker \check{\Pi} = (\ker M)^{\perp(\check{E}_{n,n}(\check{a}^\varepsilon))|_{x_n=0}} \quad \text{où } \check{a}^\varepsilon := G_2(a^\varepsilon)^{-1}.a^\varepsilon. \tag{77}$$

Celà signifie que les matrices $\check{E}_{n,n}(\check{a}^\varepsilon)$ sont diagonales par blocs

$$(\check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon))|_{x_n=0} := \begin{bmatrix} \check{E}^{\varepsilon,1}_{n,n}(\check{a}^\varepsilon|_{x_n=0}) & 0 \\ 0 & \check{E}^{\varepsilon,2}_{n,n}(\check{a}^\varepsilon|_{x_n=0}) \end{bmatrix},$$

où les $(\check{E}^{\varepsilon,1}_{n,n}(\check{a}^\varepsilon|_{x_n=0})$ et $\check{E}^{\varepsilon,2}_{n,n}(\check{a}^\varepsilon|_{x_n=0})$ sont carrées de tailles respectives r et $N - r$. Les dérivées conormales des matrices $\check{E}^\varepsilon_{n,n}|_{x_n=0}$ sont elles aussi diagonales par blocs ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\ker \check{\Pi} = (\ker M)^{\perp Z^\alpha(\check{E}_{n,n}(\check{a}^\varepsilon)|_{x_n=0})}. \tag{78}$$

Ceci nous sera utile dans la Section 6.3.2 lors du contrôle des commutateurs entre les dérivées conormales et le tenseur elliptique.

Pour chaque ε, l'opérateur $\check{\mathscr{E}}^\varepsilon_P$ est uniformément elliptique. De plus, puisque la famille $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ est bornée dans L^∞, on peut trouver une constante d'ellipticité uniforme en ε: il existe $\check{c} > 0$ tel que pour tout $\check{u} \in \mathbb{R}^N$, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$ et $\zeta \in S^{n-1}$,

$$\sum_{1\le i,j\le n} \zeta_i\zeta_j \check{E}_{i,j}(\check{u}) \ge \check{c} Id_{\mathbb{R}^N}. \tag{79}$$

Il suffit de prendre $\check{c} := c.\min_{\varepsilon\in]0,1]} ||G_2(a^\varepsilon)^{-1}||_2^2$.

On observe qu'il existe trois fonctions $\check{\mathscr{L}}_I$, $\check{\mathscr{L}}_{II}$ et $\check{\mathscr{L}}_{III}$, de classe C^∞, telles que

$$\begin{cases} \check{F}^\varepsilon_{R,I}(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, \check{w}, \partial_x^2 a^\varepsilon) = (\check{w}, 1).\check{\mathscr{L}}_I(a^\varepsilon, \varepsilon^M\check{w}, \partial_x a^\varepsilon).\varepsilon\partial_x^2 a^\varepsilon, \\ \check{F}^\varepsilon_{R,II}(a^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, \check{w}, \partial_x\check{w}) = (\check{w}, 1).\check{\mathscr{L}}_{II}(a^\varepsilon, \varepsilon^M\check{w}, \partial a^\varepsilon, \varepsilon^M\partial_x\check{w}), \\ \check{F}^\varepsilon_{R,III}(a^\varepsilon, \partial_x a^\varepsilon, \check{w}, \partial_x\check{w}) = \varepsilon\partial_x\check{w}.\check{\mathscr{L}}_{III}(a^\varepsilon, \varepsilon^M\check{w}, \partial_x a^\varepsilon, \varepsilon^M\partial_x\check{w}). \end{cases} \tag{80}$$

6.5. *Schémas Itératifs*

On va montrer la convergence, uniformément en ε, sur $(0, T_0)$, d'une famille $(w^{\varepsilon,\nu})_{(\varepsilon,\nu)\in]0,1]\times\mathbb{N}}$ de schémas itératifs définie par $w^{\varepsilon,0} = 0$ et

$$\begin{cases} \check{\mathscr{L}}^\varepsilon_P(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M w^{\varepsilon,\nu}, \partial)w^{\varepsilon,\nu+1} = f^{\varepsilon,\nu} & \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \\ \left.\begin{array}{l} Mw^{\varepsilon,\nu+1} = 0 \\ \check{\Pi}\partial_n w^{\varepsilon,\nu+1} = h^{\varepsilon,\nu} \end{array}\right\} & \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \\ w^{\varepsilon,\nu+1} = 0 & \text{quand } (t, x) \in \Omega_0^+ \end{cases} \tag{81}$$

où les second membres $f^{\varepsilon,\nu}$ et $h^{\varepsilon,\nu}$ sont définis par

$$\begin{cases} f^{\varepsilon,\nu} := \check{F}_R^{\varepsilon}(a^{\varepsilon}, \check{w}^{\varepsilon,\nu}, \partial a^{\varepsilon}, \partial_x \check{w}^{\varepsilon,\nu}, \partial_x^2 a^{\varepsilon}) - g^{\varepsilon}, \\ h^{\varepsilon,\nu} := \check{K}_R^{\varepsilon}(a^{\varepsilon}, \check{w}^{\varepsilon,\nu}, \partial a^{\varepsilon}, \partial_x \check{w}^{\varepsilon,\nu}) - h^{\varepsilon}. \end{cases}$$

6.6. *Techniques Mises en Jeu*

On introduit pour $\lambda \geq 1$, les normes à poids

$$|u||_{0,\lambda,T} := ||e^{-\lambda t} u||_{L^2(\Omega_T^+)}, \quad |u||_{m,\lambda,T} := \sum_{|\alpha| \leq m} \lambda^{m-|\alpha|} |Z^{\alpha} u||_{0,\lambda,T},$$

$$\|u\|_{0,\lambda,T} := \|e^{-\lambda t} u\|_{L^2(\Gamma_T)}, \quad \|u\|_{m,\lambda,T} := \sum_{\alpha \leq m} \lambda^{m-|\alpha|} \|Z^{\alpha} u\|_{0,\lambda,T}.$$

On note $\langle .,. \rangle_{0,\lambda,T}$ (respectivement $(.,.)_{0,\lambda,T}$) le produit scalaire dans $L^2(\Omega_T^+)$ ($L^2(\Gamma_T)$), muni de la mesure $e^{-2\lambda t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$ ($e^{-2\lambda t}\mathrm{d}t\mathrm{d}y$). Pour simplifier, lorsque u et v sont deux fonctions de $H^1(\Omega_T^+)$ on notera $||u||_{0,\lambda,T}$ la norme de sa restriction à Γ_T et $(u, v)_{0,\lambda,T}$ le produit scalaire de leur restriction à Γ_T. On dispose pour les normes précédentes des inégalités de Moser à poids suivantes (Guès, 1995).

Lemme 6.4. *Soient $(m, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_l \in H^m(\Omega_T^+)$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{N}^{d+1}$, $|\alpha| := |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_l| \leq m$. Alors, pour tout $\lambda \geq 1$, on a*

$$\lambda^{m-|\alpha|} |Z_1^{\alpha_1} a \cdots Z^{\alpha_l} a_l||_{0,\lambda,T} \leq c \sum_{1 \leq j \leq l} (\Pi_{i \neq j} ||a_i||_{\infty}) |a_j||_{m,\lambda,T}.$$

La constante c étant indépendante des a_i. Les mêmes estimations sont valables avec les normes $\|.\|_{m,\lambda,T}$.

Nous allons maintenant voir que l'on peut contrôler les normes Lipschitz par des plongements de Sobolev. Le point essentiel est que l'on désire être économe en ε, et donc en dérivée normale. C'est pourquoi, à l'instar de Sueur (2006a,b), on se tourne vers des plongements de Sobolev anisotropes. Le plongement Sobolev qui suit est démontré dans Guès (1995). Rappelons que m_0 est un entier vérifiant $m_0 \geq \frac{n}{2} + 2$.

Proposition 6.5. *Il existe un réel $\rho > 0$ tel que, pour tout $w \in H^{m_0}(\Omega_T^+)$,*

$$||w||_{\infty} \leq \rho T e^{\lambda T} (|w||_{m_0,\lambda,T} + |\partial_n w||_{m_0,\lambda,T}).$$

On en déduit par un simple changement de variable

Proposition 6.6. *Il existe un réel $\rho > 0$ tel que, pour tout $w \in H^{m_0}(\Omega_T^+)$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$,*

$$\varepsilon^{\frac{1}{4}} ||w||_{L^{\infty}(\Omega_T^+)} \leq \rho T e^{\lambda T} (|w||_{m_0,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon} |\partial_n w||_{m_0,\lambda,T}).$$

On obtient aussi un contrôle des normes $||.||_{1,T}$ et $||.||_{lip}$.

Corollaire 6.7. *Il existe un réel $\rho > 0$ tel que, pour tout $w \in H^{m_0}(\Omega_T^+)$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$,*

$$\varepsilon^{\frac{1}{4}}||w||_{1,T} \leq \rho T e^{\lambda T}(|w||_{m_0,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon}|\partial_n w||_{m_0,\lambda,T}),$$
$$\varepsilon||w||_{Lip} \leq \rho T e^{\lambda T}(|w||_{m_0,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon}|\partial_n w||_{m_0,\lambda,T} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}|\partial_n^2 w||_{m_0,\lambda,T}).$$

Avec une stratégie similaire, on montre

Proposition 6.8. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un réel $\rho > 0$ tel que, pour tout $w \in H^m(\Omega_T^+)$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$,*

$$\varepsilon^{\frac{1}{4}}||w||_{m,\lambda,T} \leq \rho T e^{\lambda T}(|w||_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon}|\partial_n w||_{m,\lambda,T}),$$
$$\varepsilon||\partial_n w||_{m,\lambda,T} \leq \rho T e^{\lambda T}(\sqrt{\varepsilon}|\partial_n w||_{m,\lambda,T} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}|\partial_n^2 w||_{m,\lambda,T}).$$

Losque ceci ne prête pas à confusion, on notera, pour des quantités a et b dépendantes éventuellement de λ et ε, $a \lesssim b$ s'il existe une constante C, uniforme en λ et ε, telle que $a \leq Cb$.

6.7. *Estimations Linéaires L^2*

On commence par établir des estimations pour la famille de problèmes linéaires:

$$\begin{cases} (\check{\mathscr{L}}_P^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon, \partial)w^\varepsilon = \mathfrak{f}^\varepsilon & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ \left.\begin{array}{l} Mw^\varepsilon = 0 \\ \check{\Pi}\partial_n w^\varepsilon = \mathfrak{h}^\varepsilon \end{array}\right\} & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \\ w^\varepsilon = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+ \end{cases} \tag{82}$$

où les familles $(\mathfrak{w}^\varepsilon)_\varepsilon$, $(\mathfrak{f}^\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\mathfrak{h}^\varepsilon)_\varepsilon$ sont supposées données. Notons que l'on omet dorénavant les accents sur w et $\mathfrak{w}$ (mais pas l'indice ε).

Proposition 6.9. *On considère un réel $\mu > 0$. Il existe $\lambda_0 \geq 1$ tel que si pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, pour $\lambda \geq \lambda_0$*

$$w^\varepsilon,\ \mathfrak{w}^\varepsilon \in H^m(\Omega_T^+) \text{ vérifient le problème (82)}$$
$$\varepsilon^{M-\frac{3}{4}}||\mathfrak{w}^\varepsilon||_{1,T},\ \varepsilon^M||\mathfrak{w}^\varepsilon||_{Lip},\ \sqrt{\varepsilon}||\mathfrak{h}^\varepsilon||_{0,\lambda,T} \leq \mu,$$
$$M\mathfrak{w}^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T,$$
$$\mathfrak{w}^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+$$

alors on a l'estimation:

$$\lambda|w^\varepsilon||_{0,\lambda,T}^2 + \varepsilon|\nabla_x w^\varepsilon||_{0,\lambda,T}^2 \leq \lambda^{-1}\lambda_0|\langle \mathfrak{f}^\varepsilon, w^\varepsilon\rangle_{0,\lambda,T}|. \tag{83}$$

Preuve. On commence par multiplier l'équation à gauche par ${}^t w^\varepsilon$. On intégre ensuite en espace. Le paramètre de temps est pour l'instant fixé.

Partie hyperbolique. Utilisant la symétrie des opérateurs $\check{\mathscr{H}}^\varepsilon$, i.e., la symétrie des matrices $(\check{A}_i^\varepsilon)_{1\leq i\leq n}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} {}^t w^\varepsilon . \sum_{i=1}^n \check{A}_i^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_i w^\varepsilon = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} {}^t w^\varepsilon . \left(\sum_{i=1}^n \partial_i \check{A}_i^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\right) w^\varepsilon$$
$$- \frac{1}{2}({}^t w^\varepsilon . \check{A}_n^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon) w^\varepsilon)|_{x_n=0}.$$

Concernant le termes de bord, on remarque que pour tout vecteur w tel que $Mw = 0$, on a

$$ {}^t w \check{A}_n^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon) w = 0 \leq 0. \tag{84}$$

En effet, par hypothèse du Théorème 4.7, on a $Ma^\varepsilon = 0$ et comme on suppose $M\mathfrak{w}^\varepsilon = 0$, il vient $M(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon) = 0$. L'hypothèse 1.2 donne l'inégalité (84).

Par hypothèse (du Théorème 4.7), on a $(a^\varepsilon)_\varepsilon \in \mathscr{A}^{m+1}$ donc $(\check{a}^\varepsilon)_\varepsilon$ est uniformément Lipschitz. Comme on a aussi que $(\varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)_\varepsilon$ est uniformément Lipschitz, il vient que $(\sum_{i=1}^n \partial_i \check{A}_i^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon))_\varepsilon$ est uniformément borné dans L^∞.

Partie elliptique. Par la formule de Green, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} {}^t w^\varepsilon . \sum_{1\leq i,j\leq n} \partial_i \check{E}_{i,j}^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_j w^\varepsilon = T_1 + T_2$$

où

$$T_1 := -\int_{\mathbb{R}^n_+} {}^t \partial_i w^\varepsilon . \sum_{1\leq i,j\leq n} \check{E}_{i,j}^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_j w^\varepsilon,$$

$$T_2 := -\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} {}^t w^\varepsilon . \sum_{1\leq j\leq n} \check{E}_{n,j}^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_j w^\varepsilon.$$

Exploitant (98), on a $||\partial_x w^\varepsilon||_{L^2(\Omega_T^+)} \lesssim -T_1$.

Si l'on prescrivait pour les problèmes (82) une condition aux limites de type Dirichlet homogène, le terme T_2 serait nul. C'est ce qui se passe dans les articles Guès (1995), Sueur (2006a) et dans la démonstration du Théorème 2.2. Mais dans le Problème (82), nous avons des conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann. Le terme T_2 recquiert un traitement subtil. Le terme le plus délicat est celui qui contient une dérivée normale. On va le traiter séparemment, écrivant $T_2 = T_{2,I} + T_{2,II}$ avec

$$T_{2,I} := -\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} {}^t w^\varepsilon . \sum_{1\leq j\leq n-1} \check{E}_{n,j}^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_j w^\varepsilon,$$

$$T_{2,II} := -\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} {}^t w^\varepsilon . \check{E}_{n,n}^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_n w^\varepsilon.$$

Commençons par traiter le terme $T_{2,I}$, qui ne contient que des dérivées tangentielles. On utilise la symétrie des matrices $\check{E}^\varepsilon_{n,j}$ en intégrant par parties. On a

$$T_{2,I} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} {}^t w^\varepsilon . \Big(\sum_{1\leq j\leq n-1} \partial_j (\check{E}^\varepsilon_{n,j}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)) \Big) w^\varepsilon .$$

Comme la famille $(\sum_{1\leq j\leq n-1}\partial_j(\check{E}^\varepsilon_{n,j}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)))_\varepsilon$ est uniformément bornée dans L^∞, on obtient

$$\begin{aligned} |T_{2,I}| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} |w^\varepsilon|^2, \\ &\leq C||w^\varepsilon||^2_{L^2(\Omega^+_T)} + \frac{1}{2}||\partial_x w^\varepsilon||^2_{L^2(\Omega^+_T)}. \end{aligned}$$

Venons-en au terme $T_{2,II}$. Pour utiliser les conditions aux limites, nous allons scinder la partie normale de la viscosité $\check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)$ en deux termes

$$\check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon) = \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon) + \varepsilon^M \check{E}^{\varepsilon,\flat}_{n,n}(\check{a}^\varepsilon, \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon).\mathfrak{w}^\varepsilon. \tag{85}$$

Ainsi $T_{2,II} = T_{2,II,i} + T_{2,II,ii}$ avec

$$\begin{aligned} T_{2,II,i} &:= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} {}^t w^\varepsilon . \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon)\partial_n w^\varepsilon, \\ T_{2,II,ii} &:= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} {}^t w^\varepsilon . \varepsilon^M \check{E}^{\varepsilon,\flat}_{n,n}(\check{a}^\varepsilon, \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon).\mathfrak{w}^\varepsilon.\partial_n w^\varepsilon. \end{aligned}$$

C'est pour traiter le terme $T_{2,II,i}$ que nous allons utiliser les conditions aux limites. Comme, pour tout $a \in \ker M$,

$$\mathrm{Im}(Id - \check{\Pi}) = \ker\check{\Pi} = (\ker M)^{\perp \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a})} \quad \text{où } \check{a} := G_2(a)^{-1}a \text{ (cf. (77))},$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} {}^t w^\varepsilon . \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon)(Id - \check{\Pi})\partial_n w^\varepsilon = 0$$

et donc

$$\begin{aligned} T_{2,II,i} &= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} {}^t w^\varepsilon . \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon)\check{\Pi}\partial_n w^\varepsilon \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} {}^t w^\varepsilon . \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon) h^\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \varepsilon|T_{2,II,i}| &\lesssim \varepsilon.||w^\varepsilon||_{L^2(\Gamma_T)}.||h^\varepsilon||_{L^2(\Gamma_T)}, \\ &\lesssim \varepsilon^{\frac{3}{4}}(||w||_{L^2(\Omega^+_T)} + \sqrt{\varepsilon}||\partial_n w||_{L^2(\Omega^+_T)}).||h^\varepsilon||_{L^2(\Gamma_T)}, \\ &\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{4}}(||w||_{L^2(\Omega^+_T)} + \sqrt{\varepsilon}||\partial_n w||_{L^2(\Omega^+_T)}), \end{aligned}$$

en utilisant la Proposition 6.8 et le fait que $(\sqrt{\varepsilon}||h^\varepsilon||_{L^2(\Gamma_T)})_\varepsilon$ soit bornée.

Pour le terme $T_{2,II,ii}$, le facteur ε^M permet de contrôler la dérivée normale. On majore le terme $\check{E}^{\varepsilon,\flat}_{n,n}(\check{a}^\varepsilon, \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon).\mathfrak{w}^\varepsilon$ par sa norme L^∞ et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\varepsilon|T_{2,II,ii}| &\leq C\varepsilon^{M+1}.||\mathfrak{w}^\varepsilon||_{L^\infty(\Gamma_T)}.||w^\varepsilon||_{L^2(\Gamma_T)}.||\partial_n w^\varepsilon||_{L^2(\Gamma_T)}\\ &\leq C\sqrt{\varepsilon}.(\varepsilon^{M-\frac{3}{4}}||\mathfrak{w}^\varepsilon||_{L^\infty(\Gamma_T)})(\varepsilon^{\frac{1}{4}}||w^\varepsilon||_{L^2(\Gamma_T)}).(\varepsilon||\partial_n w^\varepsilon||_{L^2(\Gamma_T)}).\end{aligned}$$

On utilise ensuite les Propositions 6.6 et 6.8.

$$\varepsilon|T_{2,II,ii}| \leq C\sqrt{\varepsilon}.(||w||_{L^2(\Omega_T^+)} + \sqrt{\varepsilon}||\partial_n w||_{L^2(\Omega_T^+)}).(\sqrt{\varepsilon}||\partial_n w||_{L^2(\Omega_T^+)} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}||\partial_n^2 w||_{L^2(\Omega_T^+)}).$$

La fin du raisonnement est classique. On utilise le terme T_1 pour absorber les dérivées normales qui interviennent dans T_2. On intègre ensuite en temps et on obtient l'inégalité (86) par un lemme de Gronwall. □

6.8. *Estimations Linéaires Conormales*

Proposition 6.10. *Soit m un entier et μ un réel strictement positif. Il existe $\lambda_m \geq 1$ tel que si pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, pour tout $\lambda \geq \lambda_m$*

$$\begin{aligned}&w^\varepsilon, \quad \mathfrak{w}^\varepsilon \in H^m(\Omega_T^+) \text{ vérifient le problème (82)}\\ &\varepsilon^{M-\frac{3}{4}}||\mathfrak{w}^\varepsilon||_{L^\infty(\Omega_T^+)}, \varepsilon^M||\mathfrak{w}^\varepsilon||_{Lip(\Omega_T^+)}, \sqrt{\varepsilon}||\mathfrak{h}||^2_{m,\lambda,T} \leq \mu,\\ &M\mathfrak{w}^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T\\ &\mathfrak{w}^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+\end{aligned}$$

alors on a l'estimation

$$\begin{aligned}&\varepsilon|\nabla_x w^\varepsilon||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|w^\varepsilon||^2_{m,\lambda,T}\\ &\quad\leq \lambda^{-1}\lambda_m(|f^\varepsilon||^2_{m,\lambda,T} + (|w^\varepsilon||^2_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M||w^\varepsilon||_{Lip}|\mathfrak{w}^\varepsilon||_{m,\lambda,T}.|w^\varepsilon||_{m,\lambda,T}).\end{aligned} \tag{86}$$

Preuve. Pour $m = 0$, il s'agit d'établir une estimation L^2. On raisonne ensuite par récurrence forte supposant l'estimation (86) établie avec $0, 1, \ldots, m-1$ en lieu et place de m. On applique alors l'opérateur de dérivation Z^α, pour $|\alpha| \leq m$. Puisque les matrices M et $\check{\Pi}$ sont constantes, elles commutent avec l'opérateur Z^α. On écrit $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$ où α' est un n-uplet. Une récurrence sur α_n montre que $(\partial_n(Z_n^{\alpha_n}.))|_{x_n=0} = \partial_n$. Par suite,

$$(\check{\Pi}\partial_n Z^\alpha w^\varepsilon)|_{x_n=0} = Z^{\alpha'}(\check{\Pi}\partial_n w^\varepsilon)|_{x_n=0} = Z^{\alpha'}\mathfrak{h}^\varepsilon.$$

On a ainsi que $Z^\alpha w^\varepsilon$ vérifie

$$\check{\mathscr{L}}^\varepsilon_P(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon, \partial)Z^\alpha w^\varepsilon = \tilde{f}^\varepsilon \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+, \tag{87}$$

$$\left.\begin{aligned}MZ^\alpha w^\varepsilon &= 0\\ \check{\Pi}\partial_n Z^\alpha w^\varepsilon &= Z^{\alpha'}\mathfrak{h}^\varepsilon\end{aligned}\right\} \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T, \tag{88}$$

$$Z^\alpha w^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+, \tag{89}$$

où $\tilde{f}^\varepsilon := Z^\alpha \mathfrak{f}^\varepsilon + [\check{\mathscr{L}}^\varepsilon_P(a^\varepsilon + \varepsilon^M\mathfrak{w}^\varepsilon, \partial), Z^\alpha]w^\varepsilon$.

Appliquant (86), et multipliant par $\lambda^{2(m-|\alpha|)}$, on obtient

$$\varepsilon(\lambda^{(m-|\alpha|)}|\partial_x w^\varepsilon||_{0,\lambda,T}) + \lambda(\lambda^{(m-|\alpha|)}|w^\varepsilon||_{0,\lambda,T})^2 \leq \lambda_0 \lambda^{2(m-|\alpha|)}|\langle \tilde{f}^\varepsilon, w^\varepsilon\rangle_{0,\lambda,T}|.$$

Pour contrôler le membre de gauche, il nous faut majorer les termes

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}|\langle Z^\alpha \mathfrak{f}^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon\rangle_{0,\lambda,T}|, \tag{90}$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}|\langle [\check{\mathscr{H}}^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon, \partial), Z^\alpha]w^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon\rangle_{0,\lambda,T}|, \tag{91}$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}|\langle [-\varepsilon \check{\mathscr{E}}^\varepsilon_P(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon, \partial), Z^\alpha]w^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon\rangle_{0,\lambda,T}|. \tag{92}$$

Le terme (90) se majore par

$$(\lambda^{(m-|\alpha|)}|Z^\alpha \mathfrak{f}^\varepsilon||_{0,\lambda,T})(\lambda^{(m-|\alpha|)}|Z^\alpha w^\varepsilon||_{0,\lambda,T})$$

puis par

$$\lambda^{-1}c_\delta(\lambda^{m-|\alpha|}|Z^\alpha \mathfrak{f}^\varepsilon||_{0,\lambda,T})^2 + \lambda\delta(\lambda^{m-|\alpha|}|Z^\alpha w^\varepsilon||^2_{0,\lambda,T})^2,$$

pour un δ assez petit de façon à ce que le terme en w^ε soit absorbé dans le membre de gauche. Les estimations des termes (91) et (92) sont ardues. Elles sont traitées dans les deux paragraphes suivants.

Nous consignons ici un lemme que nous utiliserons à plusieurs reprises. Introduisons une notation. On considère une fonction Φ de Ω_T^+ dans $\mathbb{R}^N$. Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $Z^{\langle\alpha\rangle}\phi$ la collection des termes de la forme $(Z^{\alpha_1}\phi_{i_1})\cdots(Z^{\alpha_r}\phi_{i_r})$ pour $1 \leq r \leq \alpha$, $1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq N$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^{n+1}$, $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_r| = \alpha$ et si $\alpha = 0$, on pose par convention $Z^{\langle 0\rangle}\phi = 1$.

Lemme 6.11. *Soit $(M^\varepsilon)_\varepsilon$ une famille de fonctions de la forme $M^\varepsilon := \Psi(a^\varepsilon, \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)$, où Ψ est une fonction C^∞. Soient β et γ des $(n+1)-$uplets tels que $|\beta| + |\gamma| \leq |\alpha|$ avec $|\gamma| < |\alpha|$. On a*

$$\lambda^{m-|\alpha|}|Z^\beta M^\varepsilon . Z^\gamma Z w^\varepsilon|_{0,\lambda,T} \leq |w^\varepsilon||_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M ||w^\varepsilon||_{1,T}.|\mathfrak{w}^\varepsilon||_{m,\lambda,T}, \tag{93}$$

$$\lambda^{m-|\alpha|}|Z^\beta M^\varepsilon . Z^\gamma \partial_n w^\varepsilon|_{0,\lambda,T} \leq |\partial_n w^\varepsilon||_{m-1,\lambda,T} + \varepsilon^M ||\partial_n w^\varepsilon||_\infty.|\mathfrak{w}^\varepsilon||_{m,\lambda,T}. \tag{94}$$

Les mêmes inégalités sont valables pour les normes $||.||_{m,\lambda,T}$.

Preuve. On ne prouve que l'inégalité (93). La preuve des autres inégalités ne demandent que des modifications mineures. Le terme $Z^\beta M^\varepsilon . Z^\gamma Z w^\varepsilon$ s'écrit comme une somme de termes de la forme

$$\Phi(a^\varepsilon, \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon) Z^{\langle\alpha_1\rangle} a^\varepsilon . Z^{\langle\alpha_2\rangle} \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon . Z^{\alpha_3} w^\varepsilon$$

avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = |\alpha| + 1$, $|\alpha| \geq \alpha_3 \geq 1$ et Φ de classe C^∞.

La stratégie s'inspire du Lemme 2.5 de Guès (1993). L'observation de départ est qu'il y a une dérivation de trop pour appliquer directement le Lemme 6.4. On va distinguer deux cas.

Soit au moins une dérivation porte sur la famille de paramètre a^ε. On utilise alors le fait que l'on dispose pour cette famille d'estimations de type L^∞.

Soit aucune dérivation ne porte sur la famille de paramètre a^ε. On applique alors le Lemme 6.4 à $Z\mathfrak{w}^\varepsilon$ et Zw^ε.

Explicitons cette idée.

Premier cas Si $\alpha_1 \neq 0$, le commutateur se majore par

$$C\lambda^{m-|\alpha|}|Z^{\langle\alpha_2\rangle}\varepsilon^M\mathfrak{w}^\varepsilon.Z^{\alpha_3}w^\varepsilon||_{0,\lambda,T},$$

c'est à dire par

$$C\lambda^{1-|\alpha|}\lambda^{m-(\alpha_2+\alpha_3)}|Z^{\langle\alpha_2\rangle}\varepsilon^M\mathfrak{w}^\varepsilon.Z^{\alpha_3}w^\varepsilon||_{0,\lambda,T}. \tag{95}$$

Puisque $\alpha_1 \neq 0$, on a $\alpha_2+\alpha_3 \leq |\alpha| \leq m$. A l'aide du Lemme 6.4, on majore le terme (95) par

$$C\lambda^{1-|\alpha|}(|w^\varepsilon||_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M|w^\varepsilon\|_{L^\infty}.|\mathfrak{w}^\varepsilon\|_{0,\lambda,T}). \tag{96}$$

Comme $\lambda \geq 1$ et $|\alpha| \geq 1$, on a $\lambda^{1-|\alpha|} \leq 1$.

Deuxième cas Si $\alpha_1 = 0$, tout revient à majorer

$$C\lambda^{m-k}|Z^{\langle\alpha_2\rangle}\varepsilon^M\mathfrak{w}^\varepsilon.Z^{\alpha_3}w^\varepsilon||_{0,\lambda,T}. \tag{97}$$

Dans ce cas, comme $\alpha_2 \neq 0$, le terme (97) peut s'écrire

$$C\lambda^{(m-1)-(|\alpha|-1)}|Z^{\langle\alpha_2-1\rangle}(\varepsilon^M Z\mathfrak{w}^\varepsilon).Z^{\alpha_3-1}(Zw^\varepsilon)||_{0,\lambda,T}. \tag{98}$$

On observe que $(\alpha_2-1)+(\alpha_3-1) = |\alpha|-1$ et on applique le Lemme 6.4 à $Z\mathfrak{w}^\varepsilon$ et Zw^ε avec $m-1$ au lieu de m. Ainsi, le terme (98) se majore par

$$C(|w^\varepsilon||_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M||w^\varepsilon||_{1,T}|\mathfrak{w}^\varepsilon||_{m,\lambda,T}). \tag{99}$$

□

6.8.1. Estimation de (92). Considèrons maintenant le terme (92). Nous allons majorer les termes

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}|\langle[-\varepsilon\partial_i\check{E}^\varepsilon_{i,j}(\check{a}^\varepsilon+\varepsilon^M\mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_j, Z^\alpha]w^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon\rangle_{0,\lambda,T}|, \tag{100}$$

pour $1 \leq i, j \leq n$. Nous allons distinguer trois cas. La difficulté va crescendo.

Premier cas. $1 \leq i, j \leq n-1$. Le commutateur $[\partial_i\check{E}^\varepsilon_{i,j}(\check{a}^\varepsilon+\varepsilon^M\mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_j, Z^\alpha]$ est une somme de termes de la forme

$$\partial_i(Z^\beta\check{E}^\varepsilon_{i,j}(\check{a}^\varepsilon+\varepsilon^M\mathfrak{w}^\varepsilon))\partial_j Z^\gamma w^\varepsilon, \tag{101}$$

où β et γ des $(n+1)-$uplets tels que $|\beta|+|\gamma| \leq |\alpha|$ avec $|\gamma| < |\alpha|$. En intégrant par parties, on a l'égalité

$$\langle(101), Z^\alpha w^\varepsilon\rangle_{0,\lambda,T} = -\langle Z^\beta\check{E}^\varepsilon_{i,j}(\check{a}^\varepsilon+\varepsilon^M\mathfrak{w}^\varepsilon))\partial_j Z^\gamma w^\varepsilon, \partial_i Z^\alpha w^\varepsilon\rangle_{0,\lambda,T}. \tag{102}$$

Ainsi, appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}|(102)| \leq \lambda^{m-|\alpha|}|Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{i,j}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon))\partial_j Z^\gamma w^\varepsilon||_{0,\lambda,T}.|\partial_i w^\varepsilon||_{m,\lambda,T}.$$

On applique maintenant le Lemme (6.11). On obtient

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}|(102)| \lesssim (|w^\varepsilon w^\varepsilon w^\varepsilon\|_{m,\lambda,T} + ||\varepsilon^M\|\|_{1,T}|\mathfrak{w}^\varepsilon\|_{m,\lambda,T}).|\partial_x w^\varepsilon\|_{m,\lambda,T} \text{ et}$$
$$(100) \lesssim \varepsilon(|w^\varepsilon\|_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M\|w^\varepsilon\|_{1,T}.|\mathfrak{w}^\varepsilon\|_{m,\lambda,T})).|\partial_x w^\varepsilon\|_{m,\lambda,T}.$$

Deuxième cas. $i = n$ et $1 \leq j \leq n-1$. Le commutateur $[\partial_n \check{E}^\varepsilon_{i,j}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_j, Z^\alpha]$ est une somme de termes de la forme

$$a(x_n)\partial_n(Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,j}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon))\partial_j Z^\gamma w^\varepsilon, \tag{103}$$

où a est une fonction scalaire C^∞, β et γ des $(n+1)-$uplets tels que $|\beta| + |\gamma| \leq |\alpha|$ avec $|\gamma| < |\alpha|$. En intégrant par parties, on a l'égalité

$$\langle(103), Z^\alpha w^\varepsilon\rangle_{0,\lambda,T} = (104) + (105),$$

où les termes (104) et (105) désignent respectivement

$$-\langle a(x_n)(Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,j}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon))\partial_j Z^\gamma w^\varepsilon, \partial_n(a(x_n)Z^\alpha w^\varepsilon)\rangle_{0,\lambda,T} \tag{104}$$

$$\text{et} - (a(0)(Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,j}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon))\partial_j Z^\gamma w^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon)_{0,\lambda,T}. \tag{105}$$

On traite le terme (104) en suivant la méthode du premier cas.

Venons-en au terme (105). Intégrer par parties comme nous l'avions fait pour le terme $T_{2,I}$ ne fonctionne plus. Nous allons cependant majorer ce terme. Pour commencer, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}|(105)| \leq \lambda^{m-|\alpha|}||(Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,j}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon))\partial_j Z^\gamma \partial_j Z^\gamma w^\varepsilon\|_{0,\lambda,T}.\|$$

puis le Lemme 6.11

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}|(105)| \lesssim (||w^\varepsilon w^\varepsilon\|_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M.\|w^\varepsilon\|_{1,T}.\|\mathfrak{w}^\varepsilon\|_{m,\lambda,T}).\|w^\varepsilon\|_{m,\lambda,T}.$$

On applique ensuite le Lemme 6.8, mettant à profit le facteur ε.

Troisième cas. $i = j = n$. Nous devons majorer le terme

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}|\langle[\varepsilon\partial_n \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_n, Z^\alpha]w^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon\rangle_{0,\lambda,T}|. \tag{106}$$

Dans Guès (1995), Guès traite ce type de terme en intégrant par parties. Au lieu d'avoir un produit scalaire d'un terme contenant deux dérivées normales avec un terme ne contenant pas de dérivée normale, on obtient un produit scalaire de deux termes contenant une dérivée normale. Le gain provient de ce qu'en norme L^2 la première dérivation normale coûte $\sqrt{\varepsilon}$ tandis que la seconde coûte ε. Le facteur ε devant la viscosité devient alors suffisant pour contrôler le commutateur là où une analyse à priori prédisait la nécessité d'un facteur $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$. Lors de l'intégration par parties, on doit se soucier des termes de bord. Comme lors de l'estimation L^2, on doit alors scinder en deux le terme (106) en utilisant une fois encore le développement (85). Voyons tout celà en détails.

Le commutateur $[\partial_n \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_n, Z^\alpha]w^\varepsilon$ est une somme de termes de la forme

$$a(x_n)\partial_n(Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon))b(x_n)\partial_n Z^\gamma w^\varepsilon, \tag{107}$$

où a et b sont des fonctions scalaires C^∞, β et γ des $(n+1)-$uplets tels que $|\beta| + |\gamma| \leq |\alpha|$ avec $|\gamma| < |\alpha|$. Or, en intégrant par parties, on a l'égalité:

$$\langle(107), Z^\alpha w^\varepsilon\rangle_{0,\lambda,T} = (108) + (109)$$

où les termes (108) et (109) désignent respectivement

$$-\langle(Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon))b(x_n)\partial_n Z^\gamma w^\varepsilon, \partial_n(a(x_n)Z^\alpha w^\varepsilon)\rangle_{0,\lambda,T} \tag{108}$$

$$\text{et} - ((ab)(x_n)(Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon))\partial_n Z^\gamma w^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon)_{0,\lambda,T}. \tag{109}$$

On commence par traiter le terme (108). En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\varepsilon\lambda^{2(m-|\alpha|)}|(108)| \lesssim \lambda^{m-|\alpha|}|(Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon))bb(x_n)\partial_n Z^\gamma w^\varepsilon\|_{0,\lambda,T}.|\partial_n w^\varepsilon||_{m,\lambda,T}.$$

Appliquant le Lemme (6.11), on a l'estimation:

$$\varepsilon\lambda^{2(m-|\alpha|)}|(108)| \lesssim \varepsilon(|\partial_n w^\varepsilon||_{m-1,\lambda,T} + \varepsilon^M||\partial_n w^\varepsilon||_{L^\infty}|\mathfrak{w}^\varepsilon||_{m,\lambda,T}).|\partial_n w^\varepsilon||_{m,\lambda,T}.$$

On explique brièvement comment s'en sortir maintenant avec le terme $\varepsilon|\partial_n w^\varepsilon||_{m-1,\lambda,T}.|\partial_n w^\varepsilon\|_{m,\lambda,T}$. On reprend une de Guès (1995). On écrit

$$|\partial_n w^\varepsilon||_{m-1,\lambda,T}.|\partial_n w^\varepsilon||_{m,\lambda,T} \leq \delta|\partial_n w^\varepsilon||^2_{m,\lambda,T} + C_\delta|\partial_n w^\varepsilon||^2_{m-1,\lambda,T}$$

où δ est suffisamment petit pour que le premier terme soit absorbé par la viscosité. Le second terme est contrôlé par hypothèse de récurrence.

Venons-en au terme de bord (109). On scinde la matrice $\check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)$ en

$$\check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon) = \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon) + \varepsilon^M \underline{E} \tag{110}$$

où $\underline{E} := \check{E}^{\varepsilon,\flat}_{n,n}(\check{a}^\varepsilon, \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon).\mathfrak{w}^\varepsilon$. Par suite, on se ramène à l'étude des termes

$$\lambda^{m-|\alpha|}|((Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon))\partial_n Z^\gamma w^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon)_{0,\lambda,T}| \tag{111}$$

$$\lambda^{m-|\alpha|}|((Z^\beta \underline{E})\partial_n Z^\gamma w^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon)_{0,\lambda,T}|. \tag{112}$$

Commençons par le terme (111). On a $(111) = (113) + (114)$, où les termes (113) et (114) désignent respectivement

$$-((Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon))\check{\Pi}\partial_n Z^\gamma w^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon)_{0,\lambda,T} \tag{113}$$

$$\text{et } -((115), Z^\alpha w^\varepsilon)_{0,\lambda,T}, \tag{114}$$

où le terme (115) désigne

$$(Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon))|_{x_n=0}.(Id - \check{\Pi})Z^\gamma w^\varepsilon. \tag{115}$$

Comme a et b sont scalaires,

$$(115) \in (Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon))|_{x_n=0}.\mathrm{Im}\ (Id - \check{\Pi}) = (Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon))|_{x_n=0}.\mathrm{Ker}\ \check{\Pi}.$$

Comme $Z^\alpha w^\varepsilon \in \mathrm{Ker}\ M$, (78) assure que le terme (114) est nul.
Prenant en compte (88), on a

$$(113) = -((Z^\beta \check{E}^\varepsilon_{n,n}(\check{a}^\varepsilon))|_{x_n=0}.Z^{\gamma'}\mathfrak{h}^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon)_{0,\lambda,T}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et la Proposition 6.8 donnent successivement

$$\begin{aligned}\varepsilon\lambda^{2(m-|\alpha|)}|(113)| &\leq C\varepsilon||\mathfrak{h}^\varepsilon||_{m,\lambda,T}.||w^\varepsilon||_{m,\lambda,T}\\ &\leq C\varepsilon^{\frac{3}{4}}||\mathfrak{h}^\varepsilon||_{m,\lambda,T}.(|w^\varepsilon||_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon}|\partial_n w^\varepsilon\|_{m,\lambda,T})\end{aligned}$$

Traitons maintenant le terme (112). On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}&\lambda^{m-|\alpha|}|((Z^\beta \underline{E})\partial_n Z^\gamma w^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon)_{0,\lambda,T}|\\ &\quad\lesssim \lambda^{m-|\alpha|}|((Z^\beta \underline{E})\partial_n Z^\gamma w^\varepsilon||_{0,\lambda,T}.||w^\varepsilon||_{m,\lambda,T}.\end{aligned}$$

On applique ensuite le Lemme 6.11 et le Lemme 6.8. □

6.8.2. Estimation de (91). Il reste à contrôler le terme (91). On écrit les matrices normales $\check{A}^\varepsilon_n$ par blocs

$$\check{A}^\varepsilon_n = \begin{bmatrix} \check{A}^{\varepsilon,[1]}_n & \check{A}^{\varepsilon,[2]}_n \\ {}^t\check{A}^{\varepsilon,[2]}_n & \check{A}^{\varepsilon,[4]}_n \end{bmatrix},$$

où les matrices $\check{A}^{\varepsilon,[1]}_n$ et $\check{A}^{\varepsilon,[4]}_n$ sont carrées de taille respective $N - d_0$ et d_0. Les matrices $\check{A}^{\varepsilon,[2]}_n$ sont donc de taille $(N - d_0) \times d_0$. On note

$$\check{A}^\varepsilon_{n,1} := \begin{bmatrix} \check{A}^{\varepsilon,[1]}_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \check{A}^\varepsilon_{n,2} := \begin{bmatrix} 0 & \check{A}^{\varepsilon,[2]}_n \\ {}^t\check{A}^{\varepsilon,[2]}_n & \check{A}^{\varepsilon,[4]}_n \end{bmatrix}.$$

Lorsque $M\check{u} = 0$, les matrices $\check{A}^{\varepsilon,[2]}_n$ et $\check{A}^{\varepsilon,[4]}_n$ sont nulles (cf. Section 6.4). On va estimer successivement les termes

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}|\langle[\check{A}^\varepsilon_i(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)Z_i, Z^\alpha]w^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon\rangle_{0,\lambda,T}| \tag{116}$$

pour $0 \leq i \leq n-1$,

$$\text{et } \lambda^{2(m-|\alpha|)}|\langle[\check{A}^\varepsilon_{n,2}(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_n, Z^\alpha]w^\varepsilon, Z^\alpha w^\varepsilon\rangle_{0,\lambda,T}|, \tag{117}$$

et

$$\text{et } \lambda^{2(m-|\alpha|)} |\langle [\check{A}^{\varepsilon}_{n,1}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon})\partial_n, Z^{\alpha}]w^{\varepsilon}, Z^{\alpha}w^{\varepsilon}\rangle_{0,\lambda,T}|, \tag{118}$$

Lemme 6.12. *Sous les hypothèses de la Proposition* 6.10, *on a pour tout* $\varepsilon \in]0, 1]$,

$$(116) \lesssim (|w^{\varepsilon}||_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M ||w^{\varepsilon}||_{1,T}|||_{m,\lambda,T})|w^{\varepsilon}\|_{m,\lambda,T}\cdot||_{m,\lambda,T}. \tag{119}$$

Preuve. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$(116) \lesssim \lambda^{m-|\alpha|} |[\check{A}^{\varepsilon}_i(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon})Z_i, Z^{\alpha}]w^{\varepsilon}||_{0,\lambda,T}|w^{\varepsilon}||_{m,\lambda,T}.$$

Par définition de $\check{A}^{\varepsilon}_i$ (cf. 74), il existe une fonction Ψ de classe C^{∞} telle que

$$\check{A}^{\varepsilon}_i(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}) = \Psi(a^{\varepsilon}, \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}).$$

On applique maintenant le lemme 6.11. □

Lemme 6.13. *Sous les hypothèses de la Proposition* 6.10, *on a pour tout* $\varepsilon \in]0, 1]$,

$$\begin{aligned}(117) \lesssim \varepsilon^M (||\mathfrak{w}^{\varepsilon}||_{1,T}.|\partial_n w^{\varepsilon}||_{m,\lambda,T} + |\mathfrak{w}^{\varepsilon}||_{m,\lambda,T}||\partial_n w^{\varepsilon}||_{0,T}) \\ + (1 + \varepsilon^M ||\mathfrak{w}^{\varepsilon}||_{Lip}).|w^{\varepsilon}||_{m,\lambda,T}.\end{aligned} \tag{120}$$

Preuve. Notons $\overline{A}^{\varepsilon}_n := \check{A}^{\varepsilon}_{n,2}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon})$. Le commutateur $[\overline{A}^{\varepsilon}_n \partial_n, Z^{\alpha}]w^{\varepsilon}$ s'écrit comme une somme de termes de la forme

$$Z^{\alpha_1}\overline{A}^{\varepsilon}_n.Z^{\alpha_2}\partial_n w^{\varepsilon} \tag{121}$$

avec $\alpha_1 + \alpha_2 = |\alpha| + 1$, $|\alpha| \geq \alpha_2 \geq 1$. La dérivation $Z^{\alpha_1}\overline{A}^{\varepsilon}_n$ est elle-même une collection de termes de la forme

$$\Phi(a^{\varepsilon}, \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}).Z^{\langle\alpha_3\rangle}a^{\varepsilon}.Z^{\langle\alpha_4\rangle}(\varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}), \tag{122}$$

où $\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1$. Comme dans la preuve du lemme 6.11, on a une dérivation de trop pour appliquer directement le lemme 6.4. Un différence essentielle est qu'il s'agit ici d'une dérivation normale. L'aspect négatif est que la direction normale est singulière. L'aspect positif, c'est que ce n'est pas une dérivation en temps. Grâce à la viscosité, on a, à un facteur ε près, une estimation pour les normes de type L^2 d'une dérivée spatiale supplémentaire. Ceci est vrai en particulier pour une dérivation normale. Nous allons amortir cette dérivation normale par un facteur ε^M (l'occurence du facteur ε^M dans l'inégalité (120) est cruciale dans le fonctionnement de notre preuve du théorème 4.7). Il est ainsi important de distinguer les deux types de dérivations qui interviennent dans le terme $Z^{\langle\alpha_1\rangle}\overline{A}^{\varepsilon}_n$. On distingue deux cas suivant la valeur de α_4.

Si $\alpha_4 \geq 1$, on utilise des estimations de type L^{∞} sur la famille de paramètre a^{ε} et on applique le lemme 6.4 à $(Z\varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon})$ et à $\partial_n w^{\varepsilon}$.

Si $\alpha_4 = 0$, on va s'inspirer d'une idée qu'utilise O.Guès dans le lemme *IV*.1.3 de Guès (1990). On utilise le fait que les matrices $\overline{A}^{\varepsilon}_n$ s'annulent sur le bord $\{x_n = 0\}$.

Elles se factorisent ainsi par x_n. Ce facteur permet de régulariser le terme en w^ε et de faire passer la dérivée normale sur le terme en $\mathfrak{w}^\varepsilon$. On majore ce dernier en norme L^∞.

Voyons ceci en détail.

Premier cas. Si $\alpha_4 \geq 1$, on écrit alors $\alpha_4 = \alpha_4' + 1$ et on doit majorer un terme de la forme

$$\lambda^{m-|\alpha|} |Z^{\langle \alpha_4' \rangle}(Z\varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon).Z^{\alpha_2}(\partial_n w^\varepsilon)||_{0,\lambda,T} \tag{123}$$

comme $\alpha_4' + \alpha_2 = \alpha - 1 \leq m - 1$, le lemme 6.4 permet de majorer le terme (123) par

$$\varepsilon^M ||\mathfrak{w}^\varepsilon||_{1,T}.|\partial_n w^\varepsilon\|_{m-1,\lambda,T} + \varepsilon^M |\mathfrak{w}^\varepsilon\|_{m,\lambda,T}.\|\partial_n$$

Deuxième cas. Si $\alpha_4 = 0$, puisque $\overline{A}_n^\varepsilon|_{x_n=0} = 0$, on peut écrire $Z^{\langle \alpha_1 \rangle}\overline{A}_n^\varepsilon = x_n G$ où

$$G(t, y, x_n) := \int_0^1 (\partial_n Z^{\langle \alpha_1 \rangle}\overline{A}_n^\varepsilon)(t, y, sx_n) ds \tag{124}$$

et réecrire le terme (121) $= G.Z^{\alpha_2}(Zw^\varepsilon)$. Comme $\alpha_2 + 1 \leq |\alpha| \leq m$, on obtient la majoration

$$\lambda^{m-k} |G.Z^{\alpha_2}(Zw^\varepsilon)||_{0,\lambda,T}\|_{0,\lambda,T} \leq \|G\|_{0,T}.|w^\varepsilon$$

Tenant compte de (122) et de (124), on a $||G||_\infty \leq 1 + \varepsilon^M ||\partial_n \mathfrak{w}^\varepsilon||_{0,T}$. □

Remarque 6.14. Soulignons ici une différence essentielle avec le lemme *IV*.1.3 de Guès (1990). Dans ce lemme, O.Guès utilise des estimations L^∞ de dérivées secondes. En revanche, la majoration (120) ne fait intervenir que la norme Lipschitz. Celà provient de la régularisation induite par la viscosité. Elle permet, à un facteur ε près, le contrôle pour les normes de type L^2 de la dérivée normale. Un effet de vase communiquant permet d'abaisser la régularité nécessaire en les normes de type L^∞.

Pour le terme (118), l'idée est d'utiliser la forme par blocs de $\check{A}_n^\varepsilon$ pour se ramener à des cas précédents. Le commutateur $[\check{A}_{n,1}^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_n, Z^\alpha]w^\varepsilon$ s'écrit comme une somme de termes de la forme

$$Z^{\alpha_1}\check{A}_{n,1}^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon).Z^{\alpha_2}\partial_n w^\varepsilon \tag{125}$$

avec $\alpha_1 + \alpha_2 = |\alpha| + 1, |\alpha| \geq \alpha_2 \geq 1$. Notons $w^\varepsilon := \left[\begin{smallmatrix} w^{\varepsilon,I} \\ w^{\varepsilon,II} \end{smallmatrix}\right]$ où $w^{\varepsilon,I}$ et $w^{\varepsilon,II}$ sont respectivement des vecteurs de $\mathbb{R}^{d_0}$ et $\mathbb{R}^{N-d_0}$. Le terme (125) est de la forme $\left[\begin{smallmatrix} (126) \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ où le terme (126) désigne

$$Z^{\alpha_1}\check{A}_{n,1}^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon).Z^{\alpha_2}\partial_n w^{\varepsilon,I}. \tag{126}$$

Or de la première équation de (82), on déduit

$$\check{A}_{n,1}^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_n w^\varepsilon = -\check{A}_{n,2}^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_n w^\varepsilon - \sum_{0\leq j\leq n-1} \check{A}_j^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon)\partial_j w^\varepsilon$$
$$+ \varepsilon \check{\mathscr{E}}_P^\varepsilon(\check{a}^\varepsilon + \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon, \partial_x)w^\varepsilon + \mathfrak{f}^\varepsilon.$$

En décomposant par blocs, on peut exprimer $\check{A}^{\varepsilon}_{n,1}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}).\partial_n w^{\varepsilon,I}$ sous la forme

$$\begin{aligned}
&\check{A}^{\varepsilon}_{n,1}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon})\partial_n w^{\varepsilon,I} \\
&\quad := -\check{A}^{\varepsilon,[2]}_{n}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon})\partial_n w^{\varepsilon,II} - \sum_{0\le j\le n-1} (\check{A}^{\varepsilon,I}_{j}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon})\partial_j w^{\varepsilon,I} \\
&\qquad + \check{A}^{\varepsilon,II}_{j}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon})\partial_j w^{\varepsilon,II}) + \varepsilon \check{\mathscr{E}}^{\varepsilon,I}_{P}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}, \partial_x) w^{\varepsilon} +|, \mathfrak{f}^{\varepsilon,I}. \qquad (127)
\end{aligned}$$

On introduit pour $\delta \ge 0$ et $\lambda \ge 1$, les normes à poids

$$^{\delta}|u||_{0,\lambda,T} := ||e^{-\lambda t}u||_{L^2((-1,T)\times\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))}, \qquad ^{\delta}|u||_{m,\lambda,T} := \sum_{k\le m} \lambda^{m-k\delta}|Z^k u||_{0,\lambda,T},$$

$$|u\|^{\delta}_{0,\lambda,T} := \|e^{-\lambda t}u\|_{L^2((-1,T)\times\mathbb{R}^{n-1}\times(\delta,\infty))}, \qquad |u\|^{\delta}_{m,\lambda,T} := \sum_{k\le m} \lambda^{m-k}|Z^k u\|^{\delta}_{0,\lambda,T}.$$

Compte-tenu de la définition des matrices $\check{A}^{\varepsilon}_{n}$, on a l'existence de $\delta > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, pour tout $x_n \in]0, \delta]$, les matrices $\check{A}^{\varepsilon}_{n,1}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon})$ sont inversibles.

On va distinguer les cas $x_n \le \delta$ et $x_n \ge \delta$, estimant successivement $^{\delta}|(126)||_{0,\lambda,T}$ et $|(126)||^{\delta}_{0,\lambda,T}$.

Si $x_n \le \delta$, on peut extirper alors $\partial_n w^{\varepsilon,I}$ par l'équation. On obtient des expressions qui peuvent être traitées comme dans les estimations de commutateurs précédentes.

Si $x_n \ge \delta$, on peut réécrire (126) comme $\frac{1}{x_n} Z^{\alpha_1} \check{A}^{\varepsilon}_{n,1}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}).Z^{\alpha_2} Z w^{\varepsilon,I}$. Majorant $\frac{1}{x_n}$ par $\frac{1}{\delta}$, on procède comme dans le Lemme 6.12. □

6.9. *Estimation Linéaire de la Dérivée Normale Seconde*

Nous allons estimer les dérivées conormales de la dérivée normale seconde. Plus précisemment, on suppose $m \ge 2$ et on va majorer $|\partial^2_n w^{\varepsilon}||_{m-2,\lambda,T}$. Pour celà, on part du problème (82) et plus précisemment de l'équation $\check{\mathscr{L}}^{\varepsilon}_{P}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}, \partial) w^{\varepsilon} = \mathfrak{f}^{\varepsilon}$. Grâce à l'ellipticité, on peut extirper $\varepsilon \partial^2_n w^{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{4} E_i$ avec

$$\begin{aligned}
E_1 &:= (\check{E}^{\varepsilon}_{n,n}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}))^{-1}.\check{H}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}, \partial) w^{\varepsilon}, \\
E_2 &:= -\varepsilon(\check{E}^{\varepsilon}_{n,n}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}))^{-1}.(\check{\mathscr{E}}^{\varepsilon}_{P,T}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}))^{-1}.\check{\mathscr{E}}^{\varepsilon}_{P,T}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}, \partial) w^{\varepsilon}, \\
E_3 &:= -\varepsilon(\check{E}^{\varepsilon}_{n,n}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}))^{-1}.(\partial_n \check{E}^{\varepsilon}_{n,n}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon})).\partial_n w^{\varepsilon}, \\
E_4 &:= (\check{E}^{\varepsilon}_{n,n}(\check{a}^{\varepsilon} + \varepsilon^M \mathfrak{w}^{\varepsilon}))^{-1}.\mathfrak{f}^{\varepsilon}
\end{aligned}$$

où $\check{\mathscr{E}}^{\varepsilon}_{P,T}$ désigne l'opérateur[2pt]

$$\check{\mathscr{E}}^{\varepsilon}_{P,T}(\check{u}, \partial) := \sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ (i,j)\ne(n,n)}} \partial_i \check{E}^{\varepsilon}_{i,j} \partial_j.$$

A l'aide du Lemme 6.4, on montre les estimations suivantes

$$|E_1||_{m-2,\lambda,T} \lesssim |\partial w^\varepsilon||_{m-1,\lambda,T} + \varepsilon^M ||w^\varepsilon||_{Lip}.|\mathfrak{w}^\varepsilon||_{m-2,\lambda,T}, \tag{128}$$

$$|E_2||_{m-2,\lambda,T} \lesssim \varepsilon(|w^\varepsilon||_{m,\lambda,T} + |\partial w^\varepsilon||_{m-1,\lambda,T} + \\ + \varepsilon^M(||w^\varepsilon||_{Lip}.|\mathfrak{w}^\varepsilon||_{m-1,\lambda,T} + ||w^\varepsilon||_{1,T}.|\partial_n \mathfrak{w}^\varepsilon||_{m-2,\lambda,T})), \tag{129}$$

$$\varepsilon(|E_3||_{m-2,\lambda,T} \lesssim |\partial_n w^\varepsilon||_{m-1,\lambda,T} + \varepsilon^M ||w^\varepsilon||_{Lip}.|\partial_n \mathfrak{w}^\varepsilon||_{m-2,\lambda,T}), \tag{130}$$

$$|E_4||_{m-2,\lambda,T} \lesssim |\mathfrak{f}^\varepsilon||_{m-2,\lambda,T} + \varepsilon^M ||\mathfrak{f}^\varepsilon||_\infty.|w^\varepsilon||_{m-2,\lambda,T}. \tag{131}$$

Commençons par établir l'estimation (128). On considère un $n+1$-uplet α tel que $|\alpha| \leq m-2$ et on estime $\lambda^{m-|\alpha|}|Z^\alpha w^\varepsilon||_{0,\lambda,T}$. La dérivation $Z^\alpha E_1$ est une collection de termes de la forme

$$a(x_n).\Psi(a^\varepsilon, \varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon).Z^{\langle\alpha_1\rangle} a^\varepsilon.Z^{\langle\alpha_2\rangle}(\varepsilon^M \mathfrak{w}^\varepsilon).Z^{\alpha_3}\partial_j w^\varepsilon$$

où a est une fonction scalaire C^∞, Ψ une fonction C^∞ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, α_1, α_2 et α_3 vérifient $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha$. On applique alors le Lemme 6.4 en discutant selon la valeur de α_1.

On procède de même pour montrer les estimations (128), (129), et (130).

6.10. *Convergence du Schéma Itératif*

On va maintenant utiliser ce résultat au schéma itératif (81). On commence par estimer les termes sources de (81).

Lemme 6.15. *Soit $\mu > 0$ fixé. Il existe $C > 0$ tel que si pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, $\varepsilon^M ||w^{\varepsilon,\nu}||_{Lip(\Omega_T^+)} \leq \mu$ alors, pour $\lambda \geq 1$, pour tout $\varepsilon \in]0,1]$,*

$$|f^{\varepsilon,\nu}||_{m,\lambda,T} \leq C(|g^\varepsilon||_{m,\lambda,T} + |w^{\varepsilon,\nu}||_{m,\lambda,T} + \varepsilon|\partial_x w^{\varepsilon,\nu}\|_{m,\lambda,T} \tag{132}$$

$$\sqrt{\varepsilon}||h^{\varepsilon,\nu}||_{m,\lambda,T} \leq C(\sqrt{\varepsilon}||h^\varepsilon||_{m,\lambda,T} + \varepsilon^{\frac{1}{4}}|w^{\varepsilon,\nu}||_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon}|\partial_x w^{\varepsilon,\nu}||^2_{m,\lambda,T}). \tag{133}$$

Preuve. On applique les inégalités de Moser du lemme 6.4 en tenant compte de la structure mise en évidence par les équations (80) et (75). On obtient ainsi Les inégalités (132) et

$$||h^{\varepsilon,\nu}||_{m,\lambda,T} \leq C(||h^\varepsilon||_{m,\lambda,T} + ||w^{\varepsilon,\nu}||_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon}||\partial_x w^{\varepsilon,\nu}||_{m,\lambda,T}). \tag{134}$$

Pour obtenir l'estimation (133), on utilise ensuite les lemmes de trace 6.8. □

Proposition 6.16. *Soit $\mu > 0$ fixé. Il existe $\lambda_1 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, pour tout $\lambda \geq \lambda_1$, si*

$$\varepsilon^{M-\frac{3}{4}}||w^{\varepsilon,\nu}||_{1,T}, \qquad \varepsilon^M ||w^{\varepsilon,\nu}||_{Lip(\Omega_T^+)} \leq \mu$$

alors on a l'estimation

$$\varepsilon|\nabla_x w^{\varepsilon,\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|w^{\varepsilon,\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} \leq \lambda^{-1}\lambda_1(|g^\varepsilon\|^2_{m,\lambda,T} + |w^{\varepsilon,\nu} \\ + \varepsilon^M \|w^{\varepsilon,\nu+1}\|_{Lip}|w^{\varepsilon,\nu}\|_{m,\lambda,T}.|w^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T}).$$

Preuve. On applique la proposition 6.10 avec respectivement $w^{\varepsilon,\nu}$ et $w^{\varepsilon,\nu+1}$ à la place de $\mathfrak{w}^\varepsilon$ et w^ε. Ainsi,

$$\varepsilon|\nabla_x w^{\varepsilon,\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|w^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T} \leq \lambda^{-1}\lambda_1(|f^{\varepsilon,\nu}\|^2_{m,\lambda,T} + |w^{\varepsilon,\nu}\|^2_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M\|w^{\varepsilon,\nu+1}\|_{Lip}|w^{\varepsilon,\nu}\|_{m,\lambda,T}.|w^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T}). \qquad \square$$

Fixons un réel $\mu > 1$ arbitraire, un réel λ_1 donné par la proposition 6.16, $\lambda \geq 3\lambda_1$ et $h := \sup_{0<\varepsilon\leq 1}(|g^\varepsilon\|_{m_0,\lambda,T_0} + |w^0||_{m_0+2,\lambda,T_0})$.

Le corollaire 6.7 montre la nécessité de disposer d'estimations conormales pour les dérivés normales d'ordre inférieur ou égal à deux. Exploitant la Section 6.9, on a

Proposition 6.17. *Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, il existe C tel que si pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$,*

$$\varepsilon^M||w^{\varepsilon,\nu}||_{Lip(\Omega^+_{T_0})} \leq \mu, \qquad |w^{\varepsilon,\nu+1}||_{m+2,\lambda,T_0} \leq h, \qquad \sqrt{\varepsilon}|\partial_n w^{\varepsilon,\nu+1}||_{m+1,\lambda,T_0} \leq h,$$

alors pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, $\varepsilon^{\frac{3}{2}}|\partial_n^2 w^{\varepsilon,\nu+1}||_{m,\lambda,T_0} \leq C$.

On choisit alors $0 < \varepsilon_0 < 1$ assez petit pour que $\varepsilon_0^{M-1}(2h + C)\rho T_0 e^{\lambda T_0} \leq \mu$.

Proposition 6.18. *Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, on a*

$$\varepsilon^{M-\frac{3}{4}}||w^{\varepsilon,\nu}||_{0,T_0}, \varepsilon^M||w^{\varepsilon,\nu}||_{Lip(\Omega^+_{T_0})}, \sqrt{\varepsilon}||h^{\varepsilon,\nu}||_{0,\lambda,T_0} \leq \mu,$$
$$|w^{\varepsilon,\nu}||_{m_0+2,\lambda,T_0}, \sqrt{\varepsilon}|\partial_n w^{\varepsilon,\nu}||_{m_0+2,\lambda,T_0} \leq h.$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur ν. La proposition est vraie pour $\nu = 0$. Supposons la vraie pour ν quelconque. On applique la Proposition 6.16 avec $m = m_0 + 2$

$$\varepsilon|\nabla_x w^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T_0} + \lambda|w^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T_0} \leq \lambda^{-1}\lambda_1 3h^2.$$

On en déduit $|w^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T_0} \leq h, \sqrt{\varepsilon}|\partial_n w^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T_0} \leq h$. On applique la Proposition 6.17 avec $m = m_0 + 2$ et le Corollaire 6.7. On obtient

$$\varepsilon^M\|w^{\varepsilon,\nu+1}\|_{Lip} \leq \varepsilon^{M-1}(C + 2h)\rho T_0 e^{\lambda T_0} h \leq \mu.$$

On termine la Preuve de la Proposition 6.18 en utilisant l'estimation (133) avec $\mu + 1$ à la place de μ. $\square$

On obtient alors classiquement une famille de solutions régulières $(\breve{w}^\varepsilon)_\varepsilon$ de (73). Par passage à la limite, puisque $|.\|_{m,T} \leq |.\|_{m,\lambda,T} \leq \lambda^m|.\|_{m,T}$, $(\breve{w}^\varepsilon)_\varepsilon \in \Upsilon^{m_0}(T_0)$. On en déduit l'existence d'une famille $(w^\varepsilon)_\varepsilon \in \Upsilon^{m_0}(T_0)$ de solutions des problèmes (70). Pour terminer la Preuve du Théorème 4.7, nous allons estimer les dérivées $(\partial_n^k w^\varepsilon)_{k\in\mathbb{N}}$ directement sur l'équation (70).

6.11. *Estimation des Dérivées Normales Itérées*

On note Z_ε pour une dérivation prise parmi la dérivations: $Z_0, \dots, Z_n$ et $\varepsilon\partial_n$. Pour $\alpha := (\alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+2}$, on note $|\alpha|$ la longueur $|\alpha| := \alpha_0 + \cdots + \alpha_n + \alpha_{n+1}$ et $Z^\alpha := Z_0^{\alpha_0} \cdots Z_n^{\alpha_n} Z_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$. On introduit les normes

$$||u||^\varepsilon_{m,T} := \sum_{|\alpha|\leq m} |Z^\alpha_\varepsilon u\|_{m,T} = \sum_{0\leq k\leq m} \varepsilon^k |\partial^k_n u\|_{m-k,T}.$$

Rappelons que les normes $|u\|_{s,T}$ sont définies par (17). On dispose pour les normes $\|u\|^\varepsilon_{m,T}$ des inégalités de Moser suivantes (Cheverry et al., 2004):

Lemme 6.19. *Soient $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_l \in H^m(\Omega_T^+)$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{N}^{n+2}$, $|\alpha| := |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_l| \leq m$. Alors, pour tout $\lambda \geq 1$, on a*

$$\lambda^{m-|\alpha|} |Z^{\alpha_1}_\varepsilon a_1 \cdots Z^{\alpha_l}_\varepsilon a_l\|_{0,T} \leq c \sum_{1\leq j\leq l} (\Pi_{i\neq j}\|a_i\|_\infty) |a_j\|^\varepsilon_{m,T}.$$

La constante c étant indépendante des a_i.

On va montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$, l'assertion suivante:

$$\Pi(m) : \sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0} \|u\|^\varepsilon_{m,T_0} < \infty.$$

Puisque la famille $(w^\varepsilon)_\varepsilon$ est dans $\Upsilon^{m_0}(T_0)$, les assertions $\Pi(0)$ et $\Pi(1)$ sont vérifiées. Considèrons un entier $1 \leq m \leq m_0 - 1$, supposons l'assertion $\Pi(i)$ vraie pour $0 \leq i \leq m$ et montrons l'assertion $\Pi(m)$. Pour celà, on va montrer par récurrence sur $0 \leq k \leq m$, l'assertion

$$\Pi(m,k) : \sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0} \varepsilon^{k-\frac{1}{2}} |\partial^k_n w^\varepsilon\|_{m-k,T_0} < \infty.$$

Puisque la famille $(w^\varepsilon)_\varepsilon$ est dans $\Upsilon^{m_0}(T_0)$, les assertions $\Pi(m,0)$ et $\Pi(m,1)$ sont vérifiées. Supposons les assertions $(\Pi(m,p))_{0\leq p\leq k}$ vraies et montrons l'assertion $\Pi(m,k+1)$. Pour celà, on part du problème (70) et plus précisemment de la première équation de ce problème. Grâce à l'ellipticité, on peut extirper $\varepsilon\partial^2_n w^\varepsilon = \sum_{i=1}^5 E_i$ avec

$$\begin{aligned}
E_1 &:= (E_{n,n}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon))^{-1}.\mathscr{H}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon, \partial) w^\varepsilon,\\
E_2 &:= -\varepsilon(E_{n,n}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon))^{-1}.\mathscr{E}_{P,T}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon, \partial) w^\varepsilon,\\
E_3 &:= -\varepsilon(E_{n,n}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon))^{-1}.(\partial_n E_{n,n}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon)).\partial_n w^\varepsilon,\\
E_4 &:= (E_{n,n}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon))^{-1}.F^\varepsilon_R(a^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, w^\varepsilon, \partial_x w^\varepsilon, \partial^2_x a^\varepsilon),\\
E_5 &:= (E_{n,n}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon))^{-1}.g^\varepsilon,
\end{aligned}$$

où $\mathscr{E}_{P,T}$ désigne l'opérateur

$$\mathscr{E}_{P,T} := \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n,\\ (i,j)\neq(n,n)}} \partial_i E_{i,j} \partial_j.$$

Ecrivant

$$\varepsilon^{k+1-\frac{1}{2}}|\partial_n^{k+1}w^\varepsilon\|_{m-k-1,T_0} = \varepsilon^{k-\frac{1}{2}}|\partial_n^{k-1}(\varepsilon\partial_n^2 w^\varepsilon)\|_{m-k-1,T_0},$$

on voit qu'il suffit de borner uniformément en ε les quantités: $\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}|\partial_n^{k-1}E_i\|_{m-k-1,T_0}$ pour $1 \leq i \leq 5$. Rappelons que la famille de fonctions $(a^\varepsilon)_\varepsilon$ est dans $\mathscr{A}^s(T_0)$ pour tout $s \in \mathbb{N}$.

1. Commençons par le terme $\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}|\partial_n^{k-1}E_1\|_{m-k-1,T_0}$. Décomposant l'opérateur $\mathscr{H}$, on voit qu'il suffit de borner uniformément en ε des termes de la forme

$$\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}|\partial_n^{k-1}(\mathscr{A}_i(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon)\partial_i w^\varepsilon)\|_{m-k-1,T_0} \qquad \text{pour } 0 \leq i \leq n.$$

Le terme le plus délicat est celui impliquant la dérivée normale. Nous allons nous concenter sur lui. Pour celà, on doit majorer pour tout $|\alpha| \leq m-k-1$, le terme

$$\varepsilon^{k+1-\frac{1}{2}}|Z^\alpha\partial_n^{k-1}(\mathscr{A}_n(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon)\partial_n w^\varepsilon)\|_{0,T_0}.$$

On étend la notation $Z^{\langle\alpha\rangle}$ aux dérivations normales. Précisons celà. On considère une fonction Φ de Ω_T^+ dans $\mathbb{R}^N$. Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on désigne par.

- $\partial_n^{\langle k\rangle}\phi$ la collection des termes de la forme $(\partial_n^{k_1}\phi_{i_1})\cdots(\partial_n^{k_r}\phi_{i_r})$ pour $1 \leq r \leq k$, $1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq N$, $k_1 + \cdots + k_r = k$.
- $Z_\varepsilon^{\langle\alpha\rangle}\phi$ la collection des termes de la forme $(Z_\varepsilon^{\alpha_1}\phi_{i_1})\cdots(Z_\varepsilon^{\alpha_r}\phi_{i_r})$ pour $1 \leq r \leq \alpha$, $1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq N$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^{n+2}$, $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_r| = \alpha$.
  Si $\alpha = 0$, on pose par convention $\partial_n^{\langle 0\rangle}\phi = Z_\varepsilon^{\langle 0\rangle}\phi = 1$.

Par la formule de Leibniz, le terme $Z^\alpha\partial_n^{k-1}(\mathscr{A}_n(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon)\partial_n w^\varepsilon)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$\Psi(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon).Z^{\langle l_1\rangle}\partial_n^{\langle k_1\rangle}a^\varepsilon.Z^{\langle l_2\rangle}\partial_n^{\langle k_2\rangle}(\varepsilon^M w^\varepsilon).Z^{\alpha_3}\partial_n^{k_3}w^\varepsilon, \tag{135}$$

où $l_1, l_2, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$, $\alpha_3 \in \mathbb{N}^{n+1}$, $l_1 + k_1 + l_2 + k_2 + |\alpha_3| + k_3 \leq m-1$, $k_1 + k_2 + k_3 = k$, $k_3 \geq 1$. On va distinguer deux cas.

(i) si $l_2 + k_2 = 0$, alors on majore le terme $\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}|(135)\|_{m-k-1,T_0}$ par $\sum_{p\leq k}\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}|\partial_n^p w^\varepsilon\|_{m-p-1,T_0}$. On conclut avec l'hypothèse de récurrence.

(ii) si $l_2 + k_2 \neq 0$, alors on majore le terme $\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}|(135)\|_{m-k-1,T_0}$ comme suit. On commence par se servir des estimations L^∞ sur la famille $(a^\varepsilon)_\varepsilon$.

$$\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}|(135)\|_{m-k-1,T_0} \lesssim \varepsilon^{k+M-\frac{1}{2}}|Z^{\langle l_2\rangle}\partial_n^{\langle k_2\rangle}w^\varepsilon.Z^{\alpha_3}\partial_n^{k_3}w^\varepsilon\|_{0,T_0}.$$

Comme $k_2 + k_3 \leq k$, il vient

$$\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}|(135)\|_{m-k-1,T_0} \lesssim \varepsilon^{M-\frac{1}{2}}|Z^{\langle l_2\rangle}(\varepsilon\partial_n)^{\langle k_2\rangle}w^\varepsilon.Z^{\alpha_3}(\varepsilon\partial_n)^{k_3}w^\varepsilon\|_{0,T_0}.$$

Par application du Lemme 6.19, puisque $l_2 + k_2 + |\alpha_3| + k_3 \leq m-1$, on a

$$\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}|(135)\|_{m-k-1,T_0} \lesssim \varepsilon^{M-\frac{1}{2}}\|w^\varepsilon\|_\infty.\|w^\varepsilon\|_{m-1,T_0}^\varepsilon.$$

Comme $(w^\varepsilon)_\varepsilon \in \Upsilon^{m_0}(T_0)$, la famille $\left(\varepsilon^{M-\frac{3}{4}} w^\varepsilon\right)_\varepsilon$ est bornée. Combinant à l'hypothèse de récurrence, on borne uniformément le terme $\varepsilon^{k-\frac{1}{2}} |(135)\|_{m-k-1,T_0}$.

2. Venons-en au terme $\varepsilon^{k-\frac{1}{2}} |\partial_n^{k-1} E_2\|_{m-k-1,T_0}$. Fixons (i,j) tels que $1 \leq i, j \leq n$, $(i,j) \neq (n,n)$. Nons allons voir comment borner uniformément en ε le terme

$$\varepsilon^{k+\frac{1}{2}} |\partial_n^{k-1} (E_{n,n}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon))^{-1}.\partial_i E_{i,j}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon) \partial_j w^\varepsilon \|_{m-k-1,T_0}.$$

On considère un terme $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $|\alpha| \leq m-k-1$ et majorons le terme

$$\varepsilon^{k+\frac{1}{2}} |Z^\alpha (\partial_n^{k-1} (E_{n,n}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon))^{-1}.\partial_i E_{i,j}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon) \partial_j w^\varepsilon) \|_{0,T_0}.$$

Le terme $Z^\alpha (\partial_n^{k-1} (E_{n,n}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon))^{-1}.\partial_i E_{i,j}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon) \partial_j w^\varepsilon)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$\Psi(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon).Z^{\langle l_1 \rangle} \partial_n^{\langle k_1 \rangle} a^\varepsilon . Z^{\langle l_2 \rangle} \partial_n^{\langle k_2 \rangle} (\varepsilon^M w^\varepsilon). Z^{\alpha_3} \partial_n^{k_3} w^\varepsilon, \tag{136}$$

pour $l_1 + k_1 + l_2 + k_2 + |\alpha_3| + k_3 \leq m$, $k_1 + k_2 + k_3 = k$ ou $k-1$, $|\alpha_3| + k_3 \geq 1$. On va distinguer deux cas.

(i) si $l_2 + k_2 = 0$, alors on majore le terme $\varepsilon^{k+\frac{1}{2}} |(136)\|_{m-k-1,T_0}$ par $\varepsilon \sum_{p \leq k} \varepsilon^{p-\frac{1}{2}} |\partial_n^p w^\varepsilon \|_{m-p,T_0}$. On conclut avec l'hypothèse de récurrence.

(ii) si $l_2 + k_2 > 0$, alors on commence par majorer le terme $\varepsilon^{k+\frac{1}{2}} |(136)\|_{m-k-1,T_0}$ par

$$\varepsilon^{k+\frac{1}{2}} |Z^{\langle l_2 \rangle} \partial_n^{\langle k_2 \rangle} (\varepsilon^M w^\varepsilon). Z^{\alpha_3} \partial_n^{k_3} w^\varepsilon \|_{0,T_0}.$$

Comme $k_2 + k_3 \leq k$, on peut encore majorer par

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} |Z_\varepsilon^{\langle l_2 + k_2 \rangle} (\varepsilon^M w^\varepsilon). Z_\varepsilon^{\tilde{\alpha}_3} w^\varepsilon \|_{0,T_0},$$

avec $\tilde{\alpha}_3 \in \mathbb{N}^{n+2}$, $|\tilde{\alpha}_3| = |\alpha_3| + k_3$. Comme $l_2 + k_2 > 0$, on peut sortir le facteur ε^M et écrire $Z_\varepsilon^{\langle l_2 + k_2 \rangle} = Z_\varepsilon^{\langle l_2 + k_2 - 1 \rangle} (Z_\varepsilon w^\varepsilon)$. On peut procèder de même avec $|\alpha_3| + k_3 \geq 1$. Ainsi on le terme $\varepsilon^{k+\frac{1}{2}} |(136)\|_{m-k-1,T_0}$ par

$$\varepsilon^{M+\frac{1}{2}} |Z_\varepsilon^{\langle l_2 + k_2 - 1 \rangle} (Z_\varepsilon w^\varepsilon). Z_\varepsilon^{\check{\alpha}_3} (Z_\varepsilon w^\varepsilon) \|_{0,T_0}, \tag{137}$$

avec $|\check{\alpha}_3| = |\tilde{\alpha}_3| - 1 = |\alpha_3| + k_3 - 1$. Comme $l_2 + k_2 - 1 + |\check{\alpha}_3| \leq m-2$, par application du Lemme 6.19, on majore le terme (136) par $\varepsilon^{M+\frac{1}{2}} \|Z_\varepsilon w^\varepsilon\|_\infty . \|w^\varepsilon\|_{m-1}^\varepsilon$. Utilisant l'hypothèse de récurrence et les estimations L^∞ sur $(w^\varepsilon)_\varepsilon$, on obtient une borne uniforme.

3. On poursuit avec le terme $\varepsilon^{k-\frac{1}{2}} |\partial_n^{k-1} E_3\|_{m-k-1,T_0}$. Il suffit de majorer les termes de la forme

$$\varepsilon^{k+\frac{1}{2}} |\partial_n^{k-1} (\mathscr{A}(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon). \partial_n^{\langle \delta_1 \rangle} a^\varepsilon . \partial_n^{\langle \delta_1 \rangle} (\varepsilon^M w^\varepsilon). \partial_n w^\varepsilon) \|_{m-k-1,T_0} \tag{138}$$

avec $\delta_1 + \delta_2 = 1$. Le terme (138) se majore par

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} |(\varepsilon \partial_n)^{k-1} (\mathscr{A}(a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\varepsilon). \partial_n^{\langle \delta_1 \rangle} a^\varepsilon . (\varepsilon \partial_n)^{\langle \delta_1 \rangle} w^\varepsilon . (\varepsilon \partial_n) w^\varepsilon) \|_{m-k-1,T_0}.$$

Par application du Lemme 6.19, on a

$$(138) \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}}(1 + \|Z_\varepsilon w^\varepsilon\|_\infty).\|w^\varepsilon\|^\varepsilon_{m-1,T_0}.$$

Ainsi le terme $\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}|\partial_n^{k-1}E_3\|_{m-k-1,T_0}$ est uniformément bornée.

4. Nous allons maintenant traiter le terme $\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}|\partial_n^{k-1}E_4\|_{m-k-1,T_0}$. Avec l'analyse de la Section 6.2 et en appliquant le Lemme 6.19, on a

$$\|(E_{n,n}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon))^{-1}.F_R^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, w^\varepsilon, \partial_x w^\varepsilon, \partial_x^2 a^\varepsilon)\|^\varepsilon_{m-2} \lesssim (1 + \varepsilon^M\|\partial_x w^\varepsilon\|_\infty).\|w^\varepsilon\|^\varepsilon_{m-1}.$$

Or le terme $\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}|\partial_n^{k-1}E_4\|_{m-k-1,T_0}$ se majore par

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|(E_{n,n}(a^\varepsilon + \varepsilon^M w^\varepsilon))^{-1}.F_R^\varepsilon(a^\varepsilon, \partial a^\varepsilon, w^\varepsilon, \partial_x w^\varepsilon, \partial_x^2 a^\varepsilon)\|^\varepsilon_{m-2}.$$

On conclut en combinant ces deux dernières estimations, l'hypothèse de récurrence et les estimations Lipschitz sur $(w^\varepsilon)_\varepsilon$.

5. Pour borner uniformément le terme $\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}|\partial_n^{k-1}E_5\|_{m-k-1,T_0}$, on se sert de ce que la famille $(g^\varepsilon)_\varepsilon$ est dans $\Lambda^m(T_0)$. □

7. Indications sur la Preuve du Théorème 2.2

On donne de courtes indications sur la preuve du Théorème 2.2. La méthode est la même que pour la preuve du Théorème 2.1. On se contente de signaler les changements majeurs. Il s'agit essentiellement de simplifications. Il est inutile d'utiliser le changement d'inconnue de la Section 4.1. L'analyse spectrale de la sous-section 5.2 devient inutile et la sous-section 5.6 est simplifiée. On obtient des problèmes de profils analogues aux problèmes (61) et (62)–(63) mais avec des conditions de type Dirichlet. On dispose pour ce type de problème des résultats de Guès (1995).

On détaille la détermination du premier correcteur c'est à dire du profil $\mathcal{U}^2$. On prend pour $\mathcal{U}_a^2$ la solution du problème mixte symétrique hyperbolique linéaire:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0\mathcal{U}_a^2 = F_u'(b, u^0)\mathcal{U}_a^2 + q_a^2 &\quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0}^+ \\ M\mathcal{U}_a^2 = 0 &\quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_0} \\ \mathcal{U}_a^2 = 0 &\quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+. \end{aligned}$$

On construit $\Pi_0\mathcal{U}_b^2$ comme l'unique solution dans $\mathcal{N}_\theta(T_0)$ du problème hyperbolique-parabolique

$$\begin{aligned} \left.\begin{array}{l} (Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^2 = 0 \\ \Xi\mathcal{U}_b^2 = 0 \end{array}\right\} &\quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_\theta^+, \\ \mathcal{U}_b^2|_{\theta=0} = -\Pi_0 u^0 &\quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0}^+, \\ \mathcal{U}_b^2 = 0 &\quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_0^+. \end{aligned}$$

A l'aide de la Proposition 5.6, on construit $\mathcal{U}_c^2$ comme solution dans $\mathcal{N}_z(T_0)$ de l'EDO en z paramétré en (t, x):

$$(-\mathring{\hat{E}}_{n,n}\partial_z^2 + \mathring{A}_n\partial_z)\mathcal{U}_c^2 = 0 \quad \text{quand } (t, x, z) \in \Omega_{T_0}^+ \times \mathbb{R}_z^+,$$
$$\mathcal{U}_c^2|_{z=0} = -\Pi_- u^0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_{T_0}^+.$$

De tels problèmes sont étudiés dans Guès (1995) et Sueur (2006a). Dans la partie convergence de la preuve (Section 6), il est inutile d'utiliser une famille de changements d'inconnues telle que celle de la sous-Section 6.3. L'estimation du commutateur (92) est simplifiée, les termes de bord provenant des intégrations par parties étant notablement plus simples à traiter. On peut aussi mettre à profit la remarque 6.3 pour estimer le commutateur (91).

Remerciements

Je souhaite ici remercier Olivier Guès et Jeffrey Rauch pour l'interêt qu'ils ont porté à ce travail et leurs nombreuses suggestions.

Références

Agemi, R. (1981). The initial-boundary value problem for inviscid barotropic fluid motion. *Hokkaido Math. J.* 10(1):156–182.

Beirão da Veiga, H. (1993). Perturbation theorems for linear hyperbolic mixed problems and applications to the compressible Euler equations. *Comm. Pure. Appl. Math.* 46(2):221–259.

Beirão da Veiga, H. (1994). The initial-boundary value problem for the nonbarotropic compressible Euler equations: structural-stability and data dependence. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.* 11(3):297–311.

Brillouin, L. (1926). *Comptes Rendus* 183:24.

Burnat, M., Zajaczkowski, W. (1997). On local motion of a compressible barotropic viscous fluid with the boundary slip condition. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 10(2):195–223.

Carbou, G., Fabrie, P., Guès, O. (2002). Couche limite dans un modèle de ferromagnétisme. *Comm. Partial Differential Equations* 27(7–8):1467–1495.

Chainais-Hillairet, C., Grenier, E. (2001). Numerical boundary layers for hyperbolic systems in 1-D. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 35(1):91–106.

Cheverry, C., Guès, O., Métivier, G. (2003). Oscillations fortes sur un champ linéairement dégénéré. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 36(5):691–745.

Cheverry, C., Guès, O., Métivier, G. (2004). Large-amplitude high-frequency waves for quasilinear near hyperbolic systems. *Adv. Differential Equations* 9(7–8):829–890.

Clopeau, T., Mikelić, A., Robert, R. (1998). On the vanishing viscosity limit for the 2D incompressible Navier–Stokes equations with the friction type boundary conditions. *Nonlinearity* 11(6):1625–1636.

Coudière, Y., Vila, J. P., Villedieu, P. (2000). Convergence d'un schéma volumes finis explicite en temps pour les systèmes hyperboliques linéaires symétriques en domaines bornés. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 331(1):95–100.

Donnat, P. (1994). *Quelques Contributions Mathématiques en Optique non Linéaire*. PhD thesis, Ecole Polytechnique.

Dubois, F. (2002). Volumes finis pour la dynamique des gaz. Rapport scientifique.

Fabrie, P., Galusinski, C. (2001). The slightly compressible Navier-Stokes equations revisited. *Nonlinear Anal.* 46(8, Ser. A: Theory Methods):1165–1195.

Friedrichs, K. O. (1958). Symmetric positive linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 11:333–418.

Ghidaglia, J., Frédéric, P. (2002). On boundary conditions for multidimensional hyperbolic systems of conservations laws in the finite volume framework. Rapport scientifique. CMLA, ENS de Cachan.

Gisclon, M. (1996). Étude des conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique, via l'approximation parabolique. *J. Math. Pures Appl. (9)* 75(5):485–508.

Gisclon, M., Serre, D. (1997). Conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique fournies par le schéma de Godunov. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 31(3):359–380.

Grenier, E. (1996). Couches limites de systèmes paraboliques nonlinéaires caractéristiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 323(9):1013–1017.

Grenier, E., Guès, O. (1998). Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic quasilinear hyperbolic problems. *J. Differential Equations* 143(1):110–146.

Guès, O. (1990). Problème mixte hyperbolique quasi-linéaire caractéristique. *Comm. Partial Differential Equations* 15(5):595–645.

Guès, O. (1993). Développement asymptotique de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasilinéaires. *Asymptotic Anal.* 6(3):241–269.

Guès, O. (1995). Perturbations visqueuses de problèmes mixtes hyperboliques et couches limites. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 45(4):973–1006.

Itoh, S., Tanaka, N., Tani, A. (2003). The initial value problem for the Navier-Stokes equations with general slip boundary condition in Hölder spaces. *J. Math. Fluid Mech.* 5(3):275–301.

Joseph, K. T., LeFloch, P. G. (1999). Boundary layers in weak solutions of hyperbolic conservation laws. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 147(1):47–88.

Kramers, H. A. (1926). Ziets. *F. Phys.* 39:828.

Kreiss, H. -O. (1970). Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23:277–298.

Kreiss, H. O., Lorenz, J. (1989). Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations, vol. 136 of *Pure and Applied Mathematics*. Boston, MA: Academic Press Inc.

Lax, P. D., Phillips, R. S. (1960). Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.* 13:427–455.

Lions, J. -L. (1969). *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites non Linéaires*. Dunod.

Lopes Filho, M. C., Nussenzveig Lopes, H. J., Planas, G. (2005). On the inviscid limit for two-dimensional incompressible flow with Navier friction condition. *SIAM J. Math. Anal.* 36(4):1130–1141.

Majda, A., Osher, S. (1975). Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary. *Comm. Pure Appl. Math.* 28(5):607–675.

Métivier, G. Stability of small viscosity noncharacteristic boundary layers. Cours de DEA.

Métivier, G. (1986). The Cauchy problem for semilinear hyperbolic systems with discontinuous data. *Duke Math. J.* 53(4):983–1011.

Métivier, G. (1991). Ondes soniques. *J. Math. Pures Appl.* 70(2):197–268.

Métivier, G., Zumbrun, K. (2005). Large viscous boundary layers for noncharacteristic nonlinear problems. *Mem. Amer. Math. Soc.* 175(826):vi+107.

Michelson, D. (1983). Stability theory of difference approximations for multidimensional initial-boundary value problems. *Math. Comp.* 40(161):1–45.

Michelson, D. (1987). Convergence theorem for difference approximations of hyperbolic quasilinear initial-boundary value problems. *Math. Comp.* 49(180):445–459.

Michelson, D. (1989). Initial-boundary value problems for incomplete singular perturbations of hyperbolic systems. *J. Analyse Math.*, 53:1–138.

Rauch, J. (1979). Boundary value problems as limits of problems in all space. In: *Séminaire Goulaouic-Schwartz (1978/1979)*, p. Exp. No. 3, 17. Palaiseau: École Polytech.

Rauch, J. (1985). Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.* 291(1):167–187.

Rauch, J. B., Massey, F. J. III. (1974). Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems. *Trans. Amer. Math. Soc.* 189:303–318.

Rousset, F. (2001). Inviscid boundary conditions and stability of viscous boundary layers. *Asymptot. Anal.* 26(3–4):285–306.

Schochet, S. (1986). The compressible Euler equations in a bounded domain: existence of solutions and the incompressible limit. *Comm. Math. Phys.* 104(1):49–75.

Secchi, P. (1996). Well-posedness of characteristic symmetric hyperbolic systems. *Arch. Rational Mech. Anal.* 134(2):155–197.

Secchi, P. (2002). An initial boundary value problem in ideal magneto-hydrodynamics. *Nonlinear Differential Equations Appl.* 9(4):441–458.

Serre, D. (1995). Oscillations non-linéaires hyperboliques de grande amplitude; dim ≥ 2. In: *Nonlinear Variational Problems and Partial Differential Equations (Isola d'Elba, 1990)*, vol. 320 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, Harlow: Longman Sci. Tech. pp. 245–294.

Serre, D. (2001). Couches limites non caractéristiques pour les systèmes de lois de conservation; un guide pour utilisateurs. (Texte écrit à l'occasion d'un atelier sur les couches limites numériques, tenu à l'IHP en Juin 2001). En consultation sur http://www.umpa.ens-lyon.fr./~serre/publi.html

Serre, D. (1996). *Systèmes de Lois de Conservation. I.* Fondations. [Foundations]. Diderot Editeur, Paris, 1996. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc. [Hyperbolicity, entropies, shock waves].

Sueur, F. (2005). A few remarks on a theorem by J. Rauch. *Indiana Univ. Math. J.* 54(4):1107–1143.

Sueur, F. (2006a). Couches limites semilinéaires. A paraître aux Annales de Toulouse, n 2.

Sueur, F. (2006b). Approche visqueuse de solutions discontinutes de systèmes hyperboliques semilinéaires A paraître aux Annales de l'Institut Fourier, Volume 56, Fascicule 1.

Tani, A., Itoh, S., Tanaka, N. (1994). The initial value problem for the Navier-Stockes equations with general slip boundary condition. *Adv. Math. Sci. Appl.* 4(1):51–69.

Wentzel, G. (1926). Zeits. *F. Phys.* 38:518.

Xiao, Y., Xin, Z. (2005). *Preprint of The Institute of Mathematical Sciences The Chinese University of Hong Kong*. 129. On the Vanishing Viscosity Limit for the 3D Navier-Stokes Equations with a Slip Boundary Condition.

Yanagisawa, T., Matsumura, A. (1991). The fixed boundary value problems for the equations of ideal magnetohydrodynamics with a perfectly conducting wall condition. *Comm. Math. Phys.* 136(1):119–140.