ELEMENTS D'ALGEBRE LINEAIRE,

A L'USAGE DES ETUDIANTS DE L'U.E. M1PY3W01

FASCICULE D'EXERCICES

A partir de Septembre 2014, le programme de cette U.E. devient le programme d'Algèbre et application à la résolution de systèmes différentiels linéaires, tel qu'enseigné jusque là , en semestre 4.

Jean-Louis Artique , le 3 Septembre 2014

Table des matières

- LES BASES DE L'ALGEBRE LINEAIRE -

- I - ESPACES VECTORIELS -

- Exercice 1 - *Calculs élémentaires*

-1) Dans $\mathbb{R}^2$, calculer $2.(1\ ,-3) - 5.(2\ ,-1)$.

-2) Dans $\mathbb{R}[X]$, calculer $-3.P(X) + 2.Q(X)$ pour $P(X) = X-1$ et $Q(X) = X^2 + X + 1$.

-3) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, calculer $-5.f + 7.g$ pour $f = [x \rightarrow x^2 - 1]$ et $g = [x \rightarrow 2x^2 - 3]$.

- Exercice 2 - Pour chacun des ensembles F suivants , donner un espace vectoriel $(E , + , .)$ tel que $F \subset E$.

$(F , + , .)$ est-il sous-espace vectoriel de $(E , + , .)$?

Si oui , donner une forme générale de ses éléments et une famille génératrice de F s'il en existe.

-1) $F = \{(x , y , z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 1 \}$.

-2) $F = \{(x , y , z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0 \}$.

-3) $F = \{(\alpha+\beta , \alpha-\beta , \alpha) \ / \ (\alpha , \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

-4) $F = \{(z_1 , z_2) \in \mathbb{C}^2 \ / \ z_2 = \bar{z}_1 \}$.

- Exercice 3 - On considère les sous-espaces vectoriels $(F , + , .)$ et $(G , + , .)$ de $(\mathbb{R}^3 , + , .)$ définis par :

$F = \mathcal{V}ect\ (\ \{\ (1 , 1 , 0) ,\ (0 , 1 , 1)\ \}\ )$ et $G = \{(x , y , z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \}$

-1) Donner la forme générale des vecteurs de F et des vecteurs de G .

-2) Donner une propriété caractéristique des vecteurs de F et une qui caractérise les vecteurs de G .

-3) Déterminer les éléments de $F \cap G$. Que dire de $(F \cap G , + , .)$?

- Exercice 4 - On considère les sous-espaces vectoriels $(F , + , .)$ et $(G , + , .)$ de $(\mathbb{R}^3 , + , .)$ définis par :

$F = \{(x , y , z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = z = 0 \}$ et $G = \{(x , y , z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y = 0 \}$

Démontrer qu'ils sont supplémentaires .

- Exercice 5 - Dans chacun des cas suivants examiner si la famille constituée dans l'ordre des vecteurs de E proposés est libre ou génératrice de E . Est-elle une base de $(E , + , .)$?

-1) $(1 , 1 , 0)$ et $(0 , 1 , 1)$ pour $E = \mathbb{R}^3$.

-2) $(1 , 1 , 0) , (1 , 0 , 1)$ et $(0 , 1 , 1)$ pour $E = \mathbb{R}^3$.

-3) $(-6 , 2)$ et $(9 , -3)$ pour $E = \mathbb{R}^2$.

-4) $(-1 , 1 , 0) , (0 , -2 , 2)$ et (a , b , c) pour $E = \mathbb{R}^3$.

On répondra par une discussion suivant les valeurs des paramètres réels a , b et c.

- Exercice 6 - On considère l'espace vectoriel $(\mathbb{R}_2[X], + , .)$ des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients réels.

-1) Donner sa base canonique et sa dimension .

-2) $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \ X.P' = P\}$ (P' est le polynôme dérivé de P pour la dérivation classique).

-a- Montrer que $(F, + , .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}_2[X], + , .)$.

-b- F est-il égal à $\mathbb{R}_2[X]$? (justifier)

-c- Quelle est la forme générale des éléments de F ?

-d- Donner une base et la dimension de $(F, + , .)$.

- Exercice 7 -

-1) Montrer que les trois applications $u = [x \to 1]$, $v = [x \to \sin(4x)]$ et $w = [x \to \cos(4x)]$ constituent une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

-2) Montrer que les applications $f = [x \to \sin^2(2x)]$ et $g = [x \to \sin(2x).\cos(2x)]$ sont éléments de $\mathcal{V}ect$ ({u , v , w}) .

- II - APPLICATONS LINEAIRES -

- Exercice 1 - Pour chacune des applications proposées , est-elle ou non linéaire ? Justifier la réponse .

-1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
$(x , y) \to (2x , 0 , x - y)$

-2) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ (On distinguera les deux cas des structures de $\mathbb{R}$-e.v. et de $\mathbb{C}$-e.v.) .
$(z , u) \to (\bar{u} , \bar{z})$

- Exercice 2 - Pour chacune des applications linéaires suivantes , déterminer son noyau et son image .

-1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ..
$(x , y , z) \to (x - y , y - z)$

-2) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$.
$P \to P' - P$

- Exercice 3 - $\mathcal{B} = (e_i)_{i = 1, 2, 3}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, défini par $f(e_1) = 13\, e_1 + 12\, e_2 + 6\, e_3$, $f(e_2) = -8\, e_1 - 7\, e_2 - 4\, e_3$
et $f(e_3) = -12\, e_1 - 12\, e_2 - 5\, e_3$.

Démontrer que $F = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = u\}$ et $G = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = -u\}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^3 , + , .)$ en considérant deux applications linéaires .

Déterminer les dimensions de F et de G.

- Exercice 4 - $\mathcal{B} = (e_i)_{i = 1, 2, 3, 4}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$, défini par $f(e_1) = -e_2 + e_3 - e_4$, $f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3$
et $f(e_3) = e_1 + e_4$ et $f(e_4) = e_2 - e_3 + e_4$.

-1) Déterminer f^2 . Qu'en déduire concernant la position relative de Im (f) et Ker (f) ?

-2) Déterminer Ker (f) . En déduire Im (f) .

- Exercice 5 - $(E , + , .)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. , f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$.

-1) Démontrer que $g = Id_E - f$ vérifie $g^2 = g$.

-2) Démontrer que $Ker(g) = Im(f) = \{u \in E / f(u) = u\}$.

-3) Démontrer que $E = Im(f) \oplus Ker(f)$ et retrouver ainsi le fait que f est un projecteur de E .

- III - MATRICES -

- Exercice 1 - On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on définit $B = A^2 - 5A + 6I_3$.

-1) Calculer B puis AB .

-2) En déduire que A n'est pas inversible .

-3) Pour $n = 3, 4, 5, 6$ exprimer A^n en fonction de I_3, A et A^2 .

- Exercice 2 - $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

-1) Calculer les réels a et b de sorte que $A \times D = D \times A$.
(a et b conservent ces valeurs dans la suite de l'exercice) .

-2) On pose $N = A - D$. Calculer N^2 .

-3) Calculer A^n pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

-4) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles telles que $v_o = 1 = w_o$
et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + w_n$ et $w_{n+1} = 2w_n$.
En s'aidant d'une suite constante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, exprimer v_n et w_n en fonction de n .

- Exercice 3 - $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, φ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$,de matrice $\mathcal{M}_{B}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

-1) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$. En donner base et dimension .

-2) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$. En donner base et dimension .

-3) $\forall n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice $\mathcal{M}_{B}(\varphi^n)$.

- Exercice 4 - On considère dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, +, .)$, la base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,2,3}$
et la base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{i=1,2,3}$ où $\varepsilon_1 = (1, 1, 0)$, $\varepsilon_2 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_3 = (0, 1, 1)$.

φ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\varphi((x, y, z)) = (x - 3y + 3z, 2x - 4y - 2z, 5x - 5y - z)$

-1) Construire les matrices de φ relativement à la base $\mathcal{B}$ puis relativement à $\mathcal{B}'$.

-2) Quelles sont les coordonnées d'un vecteur quelconque (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $\mathcal{B}'$?
En utilisant $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ en déduire les coordonnées de $\varphi((x, y, z))$ par rapport à $\mathcal{B}'$.
Retrouver à partir de ces coordonnées l'expression de $\varphi((x, y, z))$ dans $\mathbb{R}^3$.

- Exercice 5- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, on note $u_1 = [x \to e^x]$, $u_2 = [x \to e^{-x}]$ et $E = \mathcal{V}ect(\{u_1, u_2\})$.

-1) Montrer que $\mathcal{B} = (u_i)_{i=1,2}$ est une base de E.

-2) On note $v_1 = \mathrm{ch}$ et $v_2 = \mathrm{sh}$. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_i)_{i=1,2}$ est également une base de E.

-3) Ecrire la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

-4) Calculer les coordonnées de $f = [x \to 3.e^x - 5.e^{-x}]$ par rapport à $\mathcal{B}$.

- Exercice 6 - $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,2,3}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

-1) Calculer $P^3 - 4P^2 + P$. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1} .

-2) On pose $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 2, 3)$ et on note $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{i=1,2,3}$.
Montrer que $\mathcal{B}'$ est base de $\mathbb{R}^3$; écrire les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

-3) φ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} m & 4-3m & 2m-3 \\ 0 & 5-2m & -4+2m \\ 0 & 6-3m & -5+3m \end{pmatrix}$ relativement à $\mathcal{B}$.

Calculer sa matrice relativement à $\mathcal{B}'$.

-4) Suivant la valeur du paramètre réel m , discuter le rang de φ .

- IV - DETERMINANTS -

- Exercice 1 - Calculer chacun des déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix}$$

- Exercice 2 - Pour quelles valeurs du paramètre m les vecteurs $(1, 1, 1)$, $(2, m, 3)$, $(4, m^2, 9)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

- Exercice 3 - -1) Pour quelles valeurs du paramètre réel m la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

-2) On considère le cas où $m = -1$. Calculer l'inverse de A_{-1} de trois manières différentes :

-a- En utilisant la formule avec la comatrice (ou matrice des cofacteurs).

-b- En utilisant les opérations élémentaires sur les lignes .

-c- En vérifiant que le polynôme $P(x) = \det(A_{-1} - x.I_3)$ est annulateur de A_{-1}
puis en obtenant I_3 comme produit de A_{-1} par une somme de matrices qui sera $(A_{-1})^{-1}$.

-3) Résoudre le système $\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ en utilisant son interprétation matricielle .

- Exercice 4 - On considère le déterminant : $D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2^2 & 5 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 3^2 & 7 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n^2 & 2n+1 \end{vmatrix}$.

-1) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a $D_n = (2n+1) D_{n-1} - n^2 D_{n-2}$.

-2) Pour tout $n \geq 2$ on pose $u_n = D_n - (n+1)\,D_{n-1}$. Exprimer u_n en fonction de n .

-3) Pour $n \geq 1$, on pose $v_n = \dfrac{D_n}{(n+1)!}$. Exprimer v_n puis D_n en fonction de n .

- V – LA DIAGONALISATION D'UNE MATRICE DIAGONALISABLE -

-1) Pratique de la diagonalisation -

- *Rappels :* *Un polynôme est "**scindé**" s'il peut se factoriser entièrement en produit de polynômes du premier degré .*
Systématiquement vérifiée dans $\mathbb{C}[x]$, cette propriété peut ne pas l'être dans $\mathbb{R}[x]$ (exemple : $(x+1)(x^2+1)$).

*Une matrice M de type $n \times n$ est **diagonalisable** lorsque la famille formée par recollement des bases de ses différents sous-espaces propres est une base de $\mathbb{K}^n$.*

Ce phénomène se réalise pour les matrices qui vérifient simultanément les deux propriétés suivantes:

$\boxed{1}$ *le polynôme caractéristique de M: $P_M(x) = \det(M - x\,I_n)$ est scindé .*

$\boxed{2}$ *pour toute valeur propre λ de M ,la dimension du sous-e.v. propre associé $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_n)$ est égale (usuellement $\leq$) à l'ordre de multiplicité de λ comme racine de $P_M(x)$.*

C'est en particulier toujours le cas si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples .

- Exercice 1 - $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$ .On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

-1) Calculer son polynôme caractéristique . En déduire ses valeurs propres .
Pourquoi est-il certain que M est diagonalisable ? Est-elle inversible ?

-2) Déterminer chacun des sous-espaces propres .
Proposer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres .

-3) Ecrire la matrice $P = \mathcal{M}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ puis calculer $P^{-1} = \mathcal{M}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
En déduire une expression de M en fonction de P , P^{-1} et d'une matrice diagonale Δ .

-4) Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, exprimer Δ^n puis M^n en fonction de n .

- Exercice 2 - Même exercice mais avec $M = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 8 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

- Exercice 3 - Suivant la valeur du paramètre réel m , discuter la diagonalisabilité de $M_m = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$.

- Exercice 4 - -1) On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dont les sommes des coefficients de chaque ligne sont égales : $a+b+c = d+e+f = g+h+i = S$.

-a- Quel rôle le vecteur $(1 , 1 , 1)$ de $\mathbb{R}^3$ joue-t-il pour A ? Quel rôle le réel S joue-t-il pour A ?

-b- On suppose A semblable à une matrice diagonale : $A = P \times \Delta \times P^{-1}$ où $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda , \mu , \nu)$.
Pourquoi A et Δ ont-elles même polynôme caractéristique ?

On observe que le polynôme caractéristique d'une matrice M de type $n \times n$ est de la forme $P_M(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} tr(M)\, x^{n-1} + \ldots + det(M)$ où $tr(M)$ est la "trace de M" c'est à dire la somme des termes de sa diagonale principale descendante .

En déduire en fonction des coefficients de la matrice A les expressions de la somme et du produit de ses valeurs propres (comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité).

-2) Pourquoi la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle sûrement diagonalisable ?

Sans calcul de son polynôme caractéristique et en considérant seulement son rang et sa trace, déterminer ses valeurs propres .

-3) Diagonaliser A .

-2) Application à la résolution de systèmes différentiels linéaires -

- Exercice 1 - *Système du type $X'(t) = A \times X(t) + B(t)$ où A est diagonalisable.*

x_1 , x_2 , x_3 sont trois applications de variable t et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}\ , \begin{cases} x_1'(t) = -\ x_1(t) + 3\,x_2(t) + 3\,x_3(t) + t^2 \\ x_2'(t) = 2\,x_1(t) - x_2(t) - 2\,x_3(t) + t \\ x_3'(t) = -2\,x_1(t) + 3\,x_2(t) + 4\,x_3(t) + 1 \end{cases}$$

Déterminer ces applications sachant que $(x_1(0)\ , x_2(0)\ , x_3(0)) = (1\ , 0\ , -1)$

- Exercice 2 - *Système du type $X'(t) = A \times X(t) + B(t)$ où A est diagonalisable.*

x , y , z sont trois applications de variable t et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}\ , \begin{cases} x' = 2\,x - y + z + t \\ y' = x + y + 2\,z \\ z' = x + 3\,z \end{cases}$$

Déterminer la solution générale de ce système différentiel.

- Exercice 3 - *Equation différentielle linéaire à coefficients constants* .

On considère l'équation différentielle $y^{(3)} - 2\,y'' - y' + 2y = 24\,e^{3t}$ notée (E) .
On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions de variable t , de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ qui la vérifient.

-1) Ecrire le système différentiel linéaire associé à cette équation en posant $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$, $x_3(t) = y^{(2)}(t)$.

-2) Résoudre ce système et en déduire les solutions de (E) .

- Exercice 4 - *Système du type $X''(t) = A \times X(t) + B(t)$.*

Pour m paramètre réel positif, résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'' = -2\,m^2\,y + 1 \\ y'' = 2\,m^2\,x \end{cases}$
en se ramenant à un système de deux équations différentielles du second ordre, indépendantes.

- Exercice 5 - *Système du type $X''(t) = A \times X(t) + B(t)$.*

Déterminer la solution du système différentiel $\begin{cases} x'' = -x + y + z \\ y'' = x - y + z \\ z'' = x + y - z \end{cases}$ telle que $\begin{cases} x(0) = 0\ ,\ x'(0) = 1 \\ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0 \\ x\text{ , y et z sont bornées} \end{cases}$

ANNALES

.

Exercice 1 :

$$\text{Soit } f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longrightarrow (x + z, y)$$

-1) Prouver que f est une application linéaire.
-2) Déterminer son noyau. En donner une base et sa dimension.
-3) Déterminer son image. En donner une base et sa dimension.

Exercice 2 : Pour quelles valeurs du paramètre réel m, les vecteurs $(1, 1, 1)$, $(2, m, 3)$, $(4, m^2, 9)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 : $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

-1) Calculer son polynôme caractéristique. En déduire ses valeurs propres. Pourquoi est-il certain que A est diagonalisable ? Est-elle inversible ?

-2) Déterminer chacun des sous-espaces propres. Proposer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres (on ne démontrera pas que c'est une base de $\mathbb{R}^3$). On choisira des vecteurs dont la première coordonnée par rapport à $\mathcal{B}$ est 1. Ils seront ordonnés dans l'ordre croissant des valeurs propres correspondantes.

-3) Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ $P = \mathcal{M}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ puis calculer son inverse $P^{-1} = \mathcal{M}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. En déduire une expression de A en fonction de P, P^{-1} et d'une matrice diagonale Δ.

-4) x_1, x_2, x_3 sont trois applications de variable t et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & 2x_1(t) + 3x_3(t) + 3t + 3 \\ x_2'(t) & = & 2x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) + 6t + 6 \\ x_3'(t) & = & 4x_1(t) - 2x_2(t) + 3x_3(t) \end{array} \right.$$

Déterminer ces applications sachant que $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (3/4, 3/2, 0)$.

$\boxed{\text{I}}$ (*80/200*) $a \in \mathbb{R}^*_+$. $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. On note $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et Id_{R3} l'identité ($u \to u$) de $\mathbb{R}^3$.

-1) Calculer det(A). A est-elle inversible ?

-2) Calculer $A^2 - 2.I_3$.
On rappelle que si une matrice admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est diagonalisable.
Est-ce le cas de A ?

-3) -a- B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Quelle est la matrice de $\varphi + 1.Id_{R3}$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
Déterminer le noyau de $\varphi + 1.Id_{R3}$.
En donner une base formée de vecteurs dont la 3ème coordonnée est 1. Quelle est la dimension de ce noyau ?

-b- En déduire une valeur propre de A. Quelles sont les valeurs possibles de son ordre de multiplicité,
en tant que racine du polynôme caractéristique de A (polynôme non calculé).

-c- Quelle est la somme des valeurs propres de A (chacune comptée autant de fois que son ordre de multiplicité) ?

En déduire le spectre de A en précisant l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre.

-d- Calculer l'image par φ du vecteur $(a^2 , a , 1)$. En déduire un autre sous-espace propre de A.

-4) -a- On note $P = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & -a & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pourquoi est-elle inversible?

Exprimer une relation liant A, P, P^{-1} et une matrice diagonale qu'on explicitera.

-b- On considère le cas particulier où $a = -1$. Calculer la matrice P^{-1}.

-5) On considère le système différentiel $\begin{cases} x_1' = & -x_2 + x_3 & +2t \\ x_2' = -x_1 & -x_3 & +2e^t -2t \\ x_3' = x_1 - x_2 & & +2e^t +2t \end{cases}$.

-a- En les adaptant au cas particulier rencontré, utiliser les résultats précédents pour résoudre ce système.

-b- Déterminer la solution particulière telle que $(x_1(0) , x_2(0) , x_3(0)) = (-1 , 2 , 3)$.

Exercice 1 :

On définit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les deux vecteurs $\xi_1 = (-4, -1, 1)$ et $\xi_2 = (10, 1, -7)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer le noyau de l'application linéaire $\phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice A. La matrice A est-elle inversible ?

3. Déduire des deux questions précédentes que l'image de ϕ est égale à $\mathcal{V}ect(\{\xi_1, \xi_2\})$.

4. Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire le spectre de A.

5. Trouver une base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ de vecteurs propres de A telle que les valeurs propres correspondantes soient rangées par ordre croissant, et telle que le dernier coefficient de chaque vecteur soit égal à 1. Expliciter la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$.

6. Diagonaliser A, autrement dit, exprimer la matrice A en fonction de P et d'une matrice diagonale que l'on précisera (on ne calculera pas P^{-1}).

Exercice 2 :

Cet exercice est indépendant de l'exercice 1. On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On définit le système d'équations différentielles suivant :

$$\text{(E)} : \begin{cases} x_1'(t) &= -3x_1(t) + 2x_2(t) + 1x_3(t) \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) + 3x_2(t) + 2x_3(t) + 2e^{2t} \\ x_3'(t) &= -6x_1(t) + 3x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

1. Vérifier que P est inversible et calculer son inverse. On admet qu'on a $A = P\Delta P^{-1}$.

2. Résoudre le système (E).

3. Déterminer la solution particulière telle que $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 1, 1)$.

Exercice 1.

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $AB + A$.

2) En réécrivant cette égalité, déduire que A est inversible et donner la matrice A^{-1}.

3) Utiliser le résultat de la question 2 pour donner, sans presque aucun calcul complémentaire, l'ensemble des solutions (x, y, z) du système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 2.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie, pour (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ par

$f(x, y, z) = (3x - 2y + 2z, x - y + 3z)$.

1)a) Calculer $f(1, 1, 0)$ et $f(0, 1, 1)$.

b) Justifier le fait que $Im(f) = \mathbb{R}^2$.

c) Quelle est la dimension du noyau de f ?

d) Déterminer une base de $Ker(f)$.

2) a) Montrer que $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (4, 7, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Utiliser la question 1 pour donner la matrice de f par rapport aux bases de départ $\mathcal{B}$ et d'arrivée $\mathcal{C}_2$, où $\mathcal{C}_2$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F le sous-ensemble de E défini par

$$F = \{f \in E \ / \ f(1) = 0\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles en 1.

Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x réel par $g(x) = x^2$, et soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par cet élément g de E.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Quelle est la forme générale des éléments de G ?

3) Déterminer $F \cap G$.

4) Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E. (Indication : on pourra remarquer que si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f = (f - f(1)g) + f(1)g$.)

Les deux parties sont indépendantes.

$\boxed{\text{-I-}}$ -1) -a- Calculer $P^3 - 3.P^2 + 2.P$ pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

-b- En déduire que P est inversible et calculer son inverse P^{-1} .

-c- Calculer la matrice $A = P \times D \times P^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Bien que cela ne soit pas indispensable pour répondre à la question suivante, les étudiants qui le jugeraient utile pourront admettre que les vecteurs-colonnes de la matrice P définissent une base de vecteurs propres de A , respectivement associés aux termes diagonaux de D, valeurs propres de A .

-2) x_1 , x_2 et x_3 étant trois fonctions de variable t , dérivables sur $\mathbb{R}$, on considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = -3.x_1 + 4.x_2 + 1.x_3 + e^t + t \\ x_2' = -1.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 + e^t + t \\ x_3' = -4.x_1 + 4.x_2 + 2.x_3 + e^t \end{cases} .$$

-a- Ecrire ce système sous forme matricielle.

-b- Résoudre le système par la méthode de son choix.

-c- Déterminer la solution telle que $(x_1(0) , x_2(0) , x_3(0)) = (-1 , -2 , 0)$.

$\boxed{\text{-II-}}$ On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

-1) -a- Calculer son polynôme caractéristique.

-b- En déduire ses valeurs propres et leur ordre de multiplicité.

-c- Déterminer chacun des sous-espaces propres en donnant pour chacun d'eux une base et sa dimension.

-2) -a- Pourquoi la matrice M est-elle diagonalisable ?

-b- Construire une matrice inversible P et une matrice diagonale Δ (*présentant les valeurs propres de M dans l'ordre croissant de gauche à droite*) telles que $\Delta = P^{-1} \times M \times P$.

Premier exercice : [100 points]

Résoudre le système différentiel du premier ordre à coefficients constants non homogène

$$X' = AX + B \text{ , où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ , } A = \begin{pmatrix} -7 & 28 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } B \text{ vaut :}$$

a) $e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. [30 points]

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. [50 points]

c) $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. [20 points]

Deuxième exercice : [100 points]

Chacune des questions qui vont suivre nécessite une réflexion et un calcul fort simples .
L'ensemble de la solution , quant à lui , ne prend pas dix lignes .

On s' intéresse quelques instants donc au système différentiel (S)

$$X' = AX + e^{\alpha t}\mathbf{u} \text{ , où}$$

X est un vecteur-colonne 3×1 , A une matrice constante 3×3 diagonalisable réelle ,
α est un réel fixé et $\mathbf{u}$ un vecteur-colonne 3×1 fixé , réel et non nul .

1. Montrer que $A - \alpha I$ est diagonalisable . [10 points]

2. On note encore A l'"endomorphisme" de $\mathbf{R}^3$ de matrice A dans la base canonique .
Montrer que $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ sont supplémentaires . [10 points]
Montrer que $\mathrm{im}(A - \alpha I)$ et $\ker(A - \alpha I)$ sont supplémentaires . [10 points]
(Introduire les valeurs et vecteurs propres de A)

3. On suppose ici que $\alpha \notin \mathrm{sp}(A)$.
Trouver $\dim(\mathrm{im}(A - \alpha I))$. [10 points]
Donner l'unique solution particulière de (S) ayant la forme $e^{\alpha t}\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ constant . [10 points]

4. On suppose ici que $\alpha \in \mathrm{sp}(A)$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution particulière de (S) ayant la forme $e^{\alpha t}\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ constant . [10 points]
a) Si cette condition est respectée , trouver *une* solution particulière de (S) ayant la forme $e^{\alpha t}\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ constant . [10 points]
b) Sinon , montrer qu'il existe toujours une solution particulière de (S) ayant la forme $e^{\alpha t}(t\,\mathbf{v} + \mathbf{w})$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ constants . [30 points]

DS DU 23 MARS 2013

Exercice 1. Dans cet exercice, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à 2. On note P_1, P_2, P_3 les polynômes définis par

$$P_1(X) = X(X-2) \quad P_2(X) = (X-1)(X-2) \quad P_3(X) = X(X-1)$$

1) Soit α, β et γ trois nombres réels, et P le polynôme défini par $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$. Calculer $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ en fonction de α, β et γ. *Il est fortement conseillé d'utiliser ce résultat pour répondre aux questions 2 et 4.*

2) Montrer que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre de E.

3) Justifier que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de E.

4) On pose $P(X) = X^2 - 7$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\{P_1, P_2, P_3\}$.

Exercice 2.

1) On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit PQ.

b) En déduire que P est inversible et donner la matrice P^{-1}.

2) On pose $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (0, -1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$, et $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.
Justifier sans calcul que $\mathcal{B}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

3) On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(v_1) = v_1 \quad f(v_2) = v_2 \quad f(v_3) = (0, 0, 0)$$

a) Donner une base de l'image de f et une base du noyau de f.

b) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On la notera B.

c) Exprimer la matrice de f dans la base canonique à l'aide des matrices définies précédemment. *On ne demande pas d'en calculer les coefficients.*

Exercice 3. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) a) Calculer B^2 et B^3.

b) Exprimer M à l'aide des matrices I_3, B, où I_3 désigne la matrice identité de taille 3.

c) Utiliser la formule du binôme pour exprimer M^5 à l'aide des matrices I_3, B et B^2.

d) Expliciter cette matrice M^5.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels telles que

$$u_0 = 1 \;\; v_0 = 0 \;\; w_0 = 1 \qquad et \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = & 3u_n \\ v_{n+1} = & u_n + 3v_n \\ w_{n+1} = & v_n + 3w_n \end{cases}$$

a) En notant X_n le vecteur colonnes de composantes u_n, v_n et w_n, exprimer les conditions précédentes sous forme matricielle.

b) Exprimer X_5 en fonction de X_0 et d'une puissance d'une matrice que l'on précisera.

c) En utilisant le résultat de la question 1-d, déterminer u_5, v_5 et w_5.

M1PY4W11 **EXAMEN Session 1** **13 Mai 2013**

Les deux parties sont indépendantes.

-I- φ est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, définie par $\varphi(x , y) = (x+y , 2x)$.

-1) -a- Montrer que φ est une application linéaire.

-b- Ecrire sa matrice M par rapport à la base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,2}$ de $\mathbb{R}^2$.

-c- Déterminer le noyau de φ . Quelle est sa dimension ?

-d- En déduire la dimension de l'image de φ. Sans calcul, qu'est $\mathrm{Im}(\varphi)$?

-2) -a- On considère la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{i=1,2}$ où $\varepsilon_1 = (1 ,-2)$ et $\varepsilon_2 = (1 , 1)$.
Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

-b- Ecrire la matrice Δ de φ par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

-c- Ecrire la relation liant M et Δ , utilisant une matrice inversible P et son inverse P^{-1} qu'on explicitera.

-d- Calculer M^{10} en utilisant Δ .

-II- On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

-1) Calculer le déterminant de P . Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1} .

-2) -a- Vérifier le fait que le vecteur (1 ,–1 , 1) est vecteur propre de A. Quelle valeur propre met-il en évidence ?

-b- Calculer le polynôme caractéristique de A.

-c- En déduire les valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicité respectifs.

Avant toute recherche de vecteur propre, pour chaque sous-espace propre de A, dire quelles sont les valeurs possibles de sa dimension ?

Dans quel cas concernant ces dimensions, A est-elle diagonalisable ?

-d- Déterminer les sous-espaces propres de A et donner une base de chacun d'eux .

-e- Ecrire une relation matricielle liant A , P , son inverse P^{-1} et une matrice diagonale Δ qu'on explicitera.

-3) -a- Résoudre par la méthode de son choix, le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = -4.x_1 - 3.x_2 + 3.x_3 \\ x_2' = 3.x_1 + 2.x_2 - 3.x_3 + e^{-t} \\ x_3' = -3.x_1 - 3.x_2 + 2.x_3 + e^{-t} \end{cases} .$$

où x_1 , x_2 et x_3 sont trois fonctions de variable t , dérivables sur $\mathbb{R}$.

-b- Déterminer la solution telle que $(x_1(0) , x_2(0) , x_3(0)) = (1 , 1 , 1)$.

Toutes les réponses doivent être argumentées.

Exercice 1. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$F = \mathcal{V}ect(\{(1,1,0),(0,1,1)\}) \qquad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0\}$$

a) Quelle est la forme générale des vecteurs de F ?

b) Déterminer $F \cap G$. En donner une base.

Exercice 2. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels.

1) Quelle est sa dimension ?

2) On considère la famille $\mathcal{A}$ composée des 3 polynômes suivants

$$P_1(X) = 1 + X^2 + X^3, \ \ P_2(X) = 1 + X + 2X^2, \ \ P_3(X) = 1 - X + 2X^3$$

a) $\mathcal{A}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$? (*Indication* : aucun calcul n'est nécessaire).

b) $\mathcal{A}$ est-elle libre ?

c) Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par $\mathcal{A}$.

Exercice 3. On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2, et l'exprimer à l'aide des matrices A et I_3.

b) En déduire que A est inversible, et exprimer A^{-1} à l'aide des matrices A et I_3.

c) Expliciter les coefficients de A^{-1}.

d) En déduire la solution du système d'équations

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 4. On considère l'application linéaire

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y+z) \end{array} \right.$$

1) Déterminer le noyau et l'image de f, et en préciser les dimensions.

2) On note $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}' = \{e'_1, e'_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de f relative à ces bases. On la note A.

3) On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_1 - e_2 + e_3\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_1 + e'_2\}$. En utilisant la définition de cette matrice, déterminer $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

4) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P' est inversible et calculer P'^{-1}.

b) Calculer le produit $P'^{-1}AP$.

5) a) Déterminer $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})$ et $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(id_{\mathbb{R}^2})$.

b) Peut-on obtenir la matrice produit $P'^{-1}AP$ sans faire les calculs de la question 4 ?

1

-I- On considère les matrices $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ dans $M_3(\mathbb{R})$.

-1) Montrer que **P** est inversible et calculer son inverse $\mathbf{P}^{-1}$.

-2) **-a-** Vérifier le fait que le vecteur **(1 , 0 , 3)** est vecteur propre de **B**.
Quelle valeur propre α met-il en évidence ?

-b- Calculer le polynôme caractéristique de **B**.

-c- En déduire les valeurs propres de **B** et leurs ordres de multiplicité respectifs.

Avant toute recherche de vecteur propre, pour chaque sous-espace propre de **B**, dire quelles sont les valeurs possibles de sa dimension ?

Dans quel cas concernant ces dimensions, **B** est-elle diagonalisable ?

-d- Au vu des résultats du -c- et sans plus de calcul , qu'est le sous-espace propre $\mathbf{E}_\alpha$?

-e- Pour la valeur propre β de **B** , autre que α , déterminer le sous-espace propre $\mathbf{E}_\beta$ correspondant et en donner une base .

-f- Ecrire une relation matricielle liant **B** , **P** , son inverse $\mathbf{P}^{-1}$ et une matrice diagonale Δ qu'on explicitera.

-3) **-a-** Résoudre par la méthode de son choix, le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 2.x_2 + x_3 + 1 \\ x_2' = x_2 + e^t \\ x_3' = -6.x_1 + 6.x_2 + 4.x_3 - 2.e^t \end{cases} .$$

où x_1 , x_2 et x_3 sont trois fonctions de variable t , dérivables sur $\mathbb{R}$.

-b- Déterminer la solution telle que $(x_1(0) , x_2(0) , x_3(0)) = (-1 , 1 , -3)$.

-II- $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,2,3}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

-1) **-a-** φ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\varphi(e_1) = 0_{\mathbb{R}3}$, $\varphi(e_2) = e_1 + 2.e_3$ et $\varphi(e_3) = 0_{\mathbb{R}3}$.
Exprimer $\varphi((x , y , z))$ pour tout (x , y , z) de $\mathbb{R}^3$.

-b- Déterminer le noyau **Ker(φ)** et l'espace-image **Im(φ)** .

Quelle est la situation relative de **Im(φ)** et **Ker(φ)** ?

$\forall u \in \mathbb{R}^3$, quelle conclusion peut-on en déduire concernant le vecteur $\varphi^2(u)$? (où $\varphi^2 = \varphi o \varphi$)

-c- Ecrire la matrice $\mathbf{C} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Vérifier matriciellement le résultat du -b- .

Qu'en déduire pour $\mathbf{C^k}$ lorsque $\mathbf{k \geq 2}$?

-2) A partir de la matrice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ du $\boxed{\text{-I-}}$ et de la matrice **C** du -c- , on définit $\mathbf{A = B + C}$.

-a- Comparer $\mathbf{B \times C}$, $\mathbf{C \times B}$ et **C** .

-b- Montrer que $\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{B^k \times C = C}$.

-c- On rappelle la formule du binome de Newton : $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{(b+c)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k}.c^k}$.

Pourquoi peut-on l'appliquer au calcul de $\mathbf{(B + C)^n}$?

En déduire lorsque $n \geq 1$, une expression de $\mathbf{A^n}$ en fonction de $\mathbf{B^n}$, **C** et **n** .

-d- A l'aide de la relation matricielle obtenue au $\boxed{\text{-I-}}$ -2) -f- , exprimer $\mathbf{B^n}$ puis $\mathbf{A^n}$ en fonction de **n** .

Exercice 1 : Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note ϕ l'application linéaire définie par $\phi(e_1) = e_3$, $\phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\phi(e_3) = e_3$.

1. a) Ecrire la matrice M de ϕ dans la base B.
   b) Déterminer le noyau de cette application.
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
   a) Montrer que les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$. On appellera cette base B'
   b) Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3.
3. a) Calculer $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3.
   b) En déduire la matrice M' de ϕ dans la base B'.
4. Quel rôle joue la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour les bases B et B'.
   b) Déduire des résultats de la question 2. la matrice Q^{-1}.
   c) Quelle relation lie les matrices M, M', Q et Q^{-1} ?

Exercice 2 : Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A.
3. Trouver les valeurs propres de A et leur ordre de multiplicité.
4. Montrer que le vecteur $V_1 = (-1, 1, 2)$ est une base de $Ker(A + I)$
5. Trouver une base de $Ker(A - I)$. En déduire qu'il existe une matrice diagonale D que l'on explicitera, telle que $A = PDP^{-1}$
6. Calculer D^2. En déduire A^2, puis l'expression de A^n suivant la parité de n.
7. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Résoudre le sytème différentiel $\frac{dX}{dt} = AX$.
8. Déterminer la solution de ce système telle que $\lim_{t \to +\infty} (X(t)) = (0, 0, 0)$ pour $X(0) = (-2, 2, -4)$.