

	<p>ANNÉE UNIVERSITAIRE 2013/2014</p> <p>UE M1MI 2012 (Algèbre 1) Devoir surveillé 1 Date : 18/03/2014 Heure : 8h30 Durée : 1h30</p> <p>Documents non autorisés. La calculette homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.</p>	
---	---	---

Exercice 1 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses (seules les réponses justifiées seront notées) :

1. Pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E , $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E , $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .
3. Pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E , $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

Exercice 2 Dans \mathbb{R}^4 , on considère l'ensemble F des solutions (x, y, z, t) du système

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - t = 0 \\ 3x + y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

et les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dont on déterminera une base et la dimension.
2.
 - a) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.
 - b) Donner la dimension et une base de $G = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$.
 - c) Donner les coordonnées de u_1, u_2 et u_3 dans la base obtenue au 2.b).
3. Calculer $F \cap G$.
4. En déduire la dimension et une base de $F + G$.

Exercice 3 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère un espace vectoriel de dimension n et une base (e_1, \dots, e_n) de E . Soit la famille $\mathcal{F}_n = (f_1, \dots, f_n)$ de n vecteurs de E définie par

$$f_i = e_i + e_{i+1} \text{ si } 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } f_n = e_n + e_1.$$

Par exemple, si $n = 2$, $f_1 = f_2 = e_1 + e_2$ et \mathcal{F}_2 est donc liée.

1. Montrer que si $n = 3$, la famille \mathcal{F}_3 est *libre*. Est-elle une base de E ?
2. Montrer que si $n = 4$, la famille \mathcal{F}_4 est *liée*.
3. Traiter le cas $n \geq 5$ quelconque.