université de BORDEAUX	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2013/2014** **UE M1MI 2012 (Algèbre 1)** **Devoir surveillé 1** **Date : 18/03/2014 Heure : 8h30 Durée : 1h30** Documents non autorisés. La calculette homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.	Département Licence

Exercice 1 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses (seules les réponses justifiées seront notées) :*

1. *Pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.*
   Faux. Dans $E = \mathbb{R}^2$, Considérons $F = \{(x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$. Ce sont deux sous-espaces vectoriels de E. Cependant, $(1, 0) \in F \subset F \cup G$ et $(0, 1) \in G \subset F \cup G$ mais $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$ n'appartient ni à F, ni à G, donc n'appartient pas à $F \cup G$: $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
2. *Pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*
   Vrai. Remarquons d'abord que $F \cap G$ n'est pas vide. En effet, tout sous-espace vectoriel de E contient 0_E l'élément neutre de E. Ainsi, $0_E \in F$ et $0_E \in G$, donc $0_E \in F \cap G$.
   Soient maintenant $x, y \in F \cap G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme x et y appartiennent en particulier à F qui est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda x + \mu y \in F$. De même, $\lambda x + \mu y \in G$ et par conséquent $\lambda x + \mu y \in F \cap G$. $F \cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de E.
3. *Pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E, $\dim (F + G) = \dim F + \dim G$.*
   Faux. L'exemple le plus stupide est celui de $E = F = G = \mathbb{R}$, espace vectoriel de dimension 1. On a évidemment $F + G = E$ et donc $1 = \dim (F + G) \neq \dim F + \dim G = 2$.

Exercice 2 *Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble F des solutions (x, y, z, t) du système*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & & & - & t & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 2z & + & t & = & 0 \end{array} \right.$$

et les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dont on déterminera une base et la dimension.*
   F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car c'est l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes. Vérifions-le "à la main".
   Tout d'abord, F n'est pas vide car il contient $(0, 0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^4}$. Ensuite, soient $X = (x, y, z, t)$ et $X' = (x', y', z', t')$ deux éléments de F et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda X + \mu X' = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t')$ appartient aussi à F, i.e. vérifie les trois équations du système. Pour la première équation, on a

   $$(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') + (\lambda t + \mu t') = \lambda(x + y + z + t) + \mu(x' + y' + z' + t') = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

   car X et X' vérifient la première équation. De même, on montre que $\lambda X + \mu X'$ vérifie les deuxième et troisième équations, donc appartient à F : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Pour trouver une base et la dimension de F, on résout le système (par la méthode du pivot de Gauss par exemple). Si, pour "éliminer" l'inconnue z dans la troisième équation on soustrait deux fois la première équation à la troisième, on trouve la deuxième équation, donc la troisième équation est une conséquence des deux autres i.e. le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & & & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Ajoutons maintenant la deuxième équation à la première, de manière à "éliminer" t dans la première équation. On trouve un nouveau système équivalent au précédent :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & & & + & z & & & = & 0 \\ x & - & y & & & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Les solutions de ce système sont donc les vecteurs qui s'écrivent

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, F est de dimension 2 et une base de F est donnée par (v_1, v_2) où $v_1 = (1, 0, -2, 1)$ et $v_2 = (0, 1, 0, -1)$. En effet, on vient de montrer que la famille (v_1, v_2) est génératrice de F, et v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre.

2. a) *Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.*

   Il s'agit de trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ non tous nuls et tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$, ce qui revient à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 3\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

   La deuxième équation donne $\lambda_2 = 2\lambda_3$ et si on utilise cette relation dans les trois autres équations, on trouve à chaque fois $\lambda_1 = \lambda_3$. On peut prendre par exemple $\lambda_3 = 1$, et on vérifie bien que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 2, 1)$ est solution, ou encore que $u_3 = -u_1 - 2u_2$.

   b) *Donner la dimension et une base de $G = \mathrm{Vect}\,\{u_1, u_2, u_3\}$.*

   On a $G = \mathrm{Vect}\,\{u_1, u_2\}$ car u_3 est combinaison linéaire de u_1 et u_2. Par ailleurs, la famille (u_1, u_2) est libre (car u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels). Comme elle est aussi génératrice de G, c'est une base de G et $\dim G = 2$.

   c) *Donner les coordonnées de u_1, u_2 et u_3 dans la base obtenue au 2.b).*

   On a $u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$, $u_2 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2$ et $u_3 = (-1) \cdot u_1 + (-2) \cdot u_2$ d'après ce que l'on a obtenu en 2.a) donc, dans la base (u_1, u_2) les coordonnées sont $u_1(1, 0)$, $u_2(0, 1)$ et $u_3(-1, -2)$.

3. *Calculer $F \cap G$.*

Soit $w \in F \cap G$. Comme (v_1, v_2) est une base de F, et (u_1, u_2) une base de G, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$ ce qui donne le système (d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ et μ_2)

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \mu_1 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & - & \mu_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\mu_1 & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \mu_1 & + & \mu_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Commençons par additionner la deuxième équation à la quatrième de manière à ce que l'inconnue μ_2 n'apparaisse plus que dans la deuxième équation. On obtient le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \mu_1 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & - & \mu_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\mu_1 & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & - & \mu_1 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Ensuite, nous pouvons ajouter 2 fois la première équation à la troisième, puis soustraire la première équation à la quatrième, de manière à ce que l'inconnue μ_1 n'apparaisse plus que dans la première équation. On obtient le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \mu_1 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & - & \mu_2 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & & & = & 0 \\ -2\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & & & & & = & 0 \end{array}\right.$$

La quatrième équation implique que $2\lambda_2 = \lambda_1$ et la troisième équation que $2\lambda_2 = 6\lambda_1$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ensuite, la deuxième équation implique que $\mu_2 = 0$ et la première équation que $\mu_1 = 0$. Par conséquent, $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$ est la seule solution et $w \in F \cap G$ si et seulement si $w = 0$ i.e. $F \cap G = \{0\}$.

4. *En déduire la dimension et une base de $F + G$.*

   D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

   Par ailleurs, puisque (v_1, v_2) est une base de F et (u_1, u_2) une base de G, $F+G$ est engendré par la famille (u_1, u_2, v_1, v_2) qui contient 4 éléments : cette famille est donc une base de $F+G$.

Exercice 3 *Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère un espace vectoriel de dimension n et une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Soit la famille $\mathcal{F}_n = (f_1, \ldots, f_n)$ de n vecteurs de E définie par*

$$f_i = e_i + e_{i+1} \text{ si } 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } f_n = e_n + e_1.$$

Par exemple, si $n = 2$, $f_1 = f_2 = e_1 + e_2$ et $\mathcal{F}_2$ est donc liée.

1. *Montrer que si $n = 3$, la famille $\mathcal{F}_3$ est libre. Est-elle une base de E ?*

   Pour déterminer si $\mathcal{F}_3$ est libre, il faut résoudre l'équation d'inconnues λ_1, λ_2 et λ_3 : $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ c'est-à-dire $\lambda_1(e_1+e_2) + \lambda_2(e_2+e_3) + \lambda_3(e_3+e_1) = 0$, ou encore $(\lambda_1+\lambda_3)e_1 + (\lambda_1+\lambda_2)e_2 + (\lambda_2+\lambda_3)e_3 = 0$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une base, cette dernière équation est équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

   Si on soustrait la deuxième équation à la troisième, on trouve $\lambda_3 - \lambda_1 = 0$, alors que la première équation est $\lambda_3 + \lambda_1 = 0$. Par conséquent, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ et de la deuxième équation on déduit également $\lambda_2 = 0$. Finalement, la seule solution du système est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc la famille (f_1, f_2, f_3) est libre. De plus, $n = 3$ donc E est de dimension 3 : la famille $\mathcal{F}_3$ qui est libre et a 3 éléments est donc une base de E.

2. *Montrer que si $n = 4$, la famille $\mathcal{F}_4$ est liée.*

   On peut remarquer que $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 = (e_1+e_2) - (e_2+e_3) + (e_3+e_4) - (e_4+e_1) = 0$. Par conséquent, nous avons trouvé $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (1, -1, 1, -1) \neq (0, 0, 0, 0)$ tel que $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i f_i = 0$: la famille $\mathcal{F}_4$ est liée.

3. *Traiter le cas $n \geq 5$ quelconque.*

   On va montrer que si $n \geq 5$ est impair alors $\mathcal{F}_n$ est une base de E, et si n est pair, $\mathcal{F}_n$ est liée.

   Commençons par résoudre l'équation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$ d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, qui est équivalente à $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(e_i+e_{i+1})+\lambda_n(e_n+e_1) = 0$, ou encore, $(\lambda_1+\lambda_n)e_1+\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i+\lambda_{i+1})e_{i+1} = 0$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base, cette équation est équivalente à un système de n équations linéaires : ce système est constitué des $n-1$ équations $\lambda_i + \lambda_{i+1} = 0$ (pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$), et de l'équation $\lambda_1 + \lambda_n = 0$. Dans tous les cas, les $n-1$ premières équations donnent

   $$(\star) \qquad \lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = (-1)^{n-1}\lambda_n.$$

   Si n est **impair** alors $(-1)^{n-1} = 1$ donc $\lambda_1 = \lambda_n$. Avec l'équation $\lambda_1 + \lambda_n = 0$, ceci implique que $\lambda_1 = -\lambda_1$ i.e. $\lambda_1 = 0$. On déduit alors immédiatement de $(\star)$ que tous les λ_i sont nuls. Lorsque n est impair, la famille $\mathcal{F}_n$ est donc libre : c'est une base de E puisqu'elle a n éléments et que la dimension de E est égale à n.

   Si n est **pair**, prenons $\lambda_i = (-1)^{i-1}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (i.e. $\lambda_i = 1$ si i impair et $\lambda_i = -1$ si i pair). Les nombres λ_i vérifient les $n-1$ premières équations $\lambda_i+\lambda_{i+1} = 0$ (pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$) et de plus, puisque n est pair, l'équation $(\star)$ implique $\lambda_1 = -\lambda_n$, donc la dernière équation $\lambda_1 + \lambda_n = 0$ est aussi vérifiée. En conclusion, si n est pair, $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}f_i = 0$ donc la famille $\mathcal{F}_n$ est liée.