ANNÉE UNIVERSITAIRE 2013/2014

UE M1MI 2012 (Algèbre 1)
Devoir surveillé 2
Date : 29/04/2014 Heure : 8h30 Durée : 1h30

Documents non autorisés. La calculette homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.

Exercice 1 Soient $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ deux applications linéaires.

1. Montrer que
   a) u ne peut pas être surjective ;
   b) v ne peut pas être injective ;
   c) $\ker v \subset \ker(u \circ v)$. En déduire que si u est injective, alors $\ker(u \circ v) = \ker v$.

   On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C}$ celle de $\mathbb{R}^3$. Soient maintenant u l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est
   $$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
   et v l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est
   $$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$
2. Calculer le rang de A et celui de B.
3. Déterminer les noyaux de u et de v.
4. Calculer les produits AB et BA. Que représentent les matrices obtenues par rapport à la composition de u et de v ?
5. Que vaut le rang de $u \circ v$? [On pourra utiliser la question 1.c) ou faire un calcul direct]
6. Montrer que $v \circ u$ est bijective.

Exercice 2 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E (i.e. une application linéaire de E dans E) tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$.

Soit $x \in E$ un élément non nul.

1. Montrer que la famille $(x, f(x))$ est libre [on pourra appliquer f à une combinaison linéaire de x et $f(x)$].
2. Si E est de dimension 2, montrer que $(x, f(x))$ est une base de E. Quelle est la matrice de f dans la base $(x, f(x))$?
3. On suppose maintenant que E est de dimension *au moins* 3. Soit y un élément de E qui n'appartient pas à $\mathrm{Vect}\,\{x, f(x)\}$ (l'espace vectoriel engendré par x et $f(x)$).
   a) Montrer que la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.
   b) En déduire que E ne peut pas être de dimension 3.
   c) Si E est de dimension 4, trouver une base de E dans laquelle f a pour matrice
   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$