DS 2 corrigé

1. a) Formule du rang :

$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \ker u + \dim \operatorname{Im} u \Rightarrow \dim \operatorname{Im} u \leq 2$

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$ $\Rightarrow u$ pas surjective

b) $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker v + \dim \operatorname{Im} v \Rightarrow \dim \ker v \geq 1$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \operatorname{Im} v \leq 2$ car $\operatorname{Im} v \subseteq \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow v$ pas injective

c) soit $x \in \ker v \Rightarrow v(x) = 0 \Rightarrow u(v(x)) = u(0) = 0 \Rightarrow x \in \ker(u \circ v)$.

$\Downarrow$ $\ker(u \circ v) \supseteq \ker v$

En particulier, si u est injective, alors $\ker u = 0$.

Soit $x \in \ker(u \circ v) \Rightarrow u(v(x)) = 0$

$\Rightarrow v(x) \in \ker u \Rightarrow v(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker v \Rightarrow \ker(u \circ v) \subseteq \ker v$

$\Downarrow$ égalité

2. Pivot de Gauss :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{II-2I \\ III-2I}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & \boxed{-5} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on voit que $\operatorname{rk} A = 2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{II-2I}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & -5 \end{pmatrix}$$

on voit que $\operatorname{rk} B = 2$

3. Par la formule du rang, $\dim \ker u = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \ker u = 0$ et u est injective ;

$\dim \ker v = 3 - 2 = 1$ et pour trouver $\ker v$:

$$B \underset{\frac{1}{5}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2y - z = z \\ y = z \end{array} \right. \Rightarrow \ker v = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4. $$AB = M_{B,\mathcal{E}}(u) \cdot M_{\mathcal{E},B}(v) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(u \circ v) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 8 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$BA = M_{e,\mathcal{B}}(v) \cdot M_{\mathcal{B},e}(u) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(v \circ u) = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

5. Par 1.c), comme u est injective (on a montré que $\ker u = 0$), on a $\ker(u \circ v) = \ker v = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $rk(u \circ v) = 3 - 1 = 2$.

6. Soit on réduit BA :

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \sim_{II - 2I} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 7 \\ 0 & \boxed{-20} \end{pmatrix} \Rightarrow rk(v \circ u) = 2$$

$\Rightarrow \ker(v \circ u) = 0 \Rightarrow v \circ u$ bijective.

Soit on calcule $\det BA = 6 + 14 = 20 \neq 0 \Rightarrow BA$ inversible $\Rightarrow v \circ u$ bijective.

Ex. 2. 1. Soit $\boxed{ax + b f(x) = 0}$ (*) : si $b = 0$, alors $ax = 0 \Rightarrow a = 0$ car $x \neq 0$. Supposons par absurde $b \neq 0$:

on applique f : $a f(x) + b f^2(x) = 0 \Rightarrow a f(x) - b x = 0$ car $f^2 = -id_E$.

$\Rightarrow x = \frac{a}{b} f(x)$, on l'introduit dans (*) :

$$a \cdot \frac{a}{b} f(x) + b f(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{a^2}{b} + b\right) f(x) = 0$$

$\Rightarrow$
- $f(x) = 0$ absurde, car $f(\underbrace{f(x)}_{=0}) = -x$ mais $x \neq 0$ par hypothèse
- $\frac{a^2}{b} + b = 0 \Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2}_{\neq 0} = 0$ absurde en $\mathbb{R}$.

donc b doit être $= 0$ et $\{x, f(x)\}$ est une famille libre.

2. Une famille libre de deux vecteurs est forcément une base ~~...~~ de E si E a dimension 2 (fait général). Soit $\mathcal{B} = \{x, f(x)\}$

comme $f: x \mapsto f(x)$, $f(x) \mapsto -x$, on a $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Soit $y \notin \langle x, f(x) \rangle$: alors tout d'abord la famille $\{x, f(x), y\}$ est libre (c'est presque la définition de $y \notin \langle x, f(x) \rangle$: si $ax + \cancel{by}\, b f(x) + cy = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow ax + b f(x) = -cy$ mais $\langle y \rangle \cap \langle x, f(x) \rangle = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow a = b = 0$.)

Maintenant, montrons que $\{x, y, f(x), f(y)\}$ est libre :

soit $\quad a x + b f(x) + c y + d f(y) = 0 \quad (*)$

si $d = 0 \Rightarrow a x + b f(x) + c y = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$ ok.

par absurde, soit $d \neq 0$:

alors on applique f : $\quad a f(x) + b f^2(x) + c f(y) + d f^2(y) = 0$

$$a f(x) - b x + c f(y) - d y = 0 \qquad (**)$$

de $(*)$ on tire : $f(y) = -\frac{a}{d} x - \frac{b}{d} f(x) - \frac{c}{d} y$ et on l'introduit dans $(**)$:

$$a f(x) - b x + c \left(-\frac{a}{d} x - \frac{b}{d} f(x) - \frac{c}{d} y\right) - d y = 0$$

$$\left(-b - \frac{ac}{d}\right) x + \left(a - \frac{bc}{d}\right) f(x) + \left(-d - \frac{c^2}{d}\right) y = 0$$

mais $\{x, f(x), y\}$ sont une famille libre, donc on doit avoir en particulier $-d - \frac{c^2}{d} = 0 \Rightarrow d^2 + c^2 = 0$ impossible en $\mathbb{R}$ car on a supposé $d \neq 0$. Donc $d = 0$ et $\{x, f(x), y, f(y)\}$ libre.

b) Si on a 4 vecteurs indépendants en E, $\dim E \geq 4$.

c) Si l'on choisit la base $\mathcal{C} = \{x, f(x), y, f(y)\}$ de E, on a

$$M_{e,e}(f) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

car

$$\begin{array}{cccc} x & f(x) & y & f(y) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(x) & -x & f(y) & -y \end{array}$$

<u>Remarque</u> : Pour démontrer que $\{x, f(x)\}$ est fam. libre, on a utilisé le fait que en $\mathbb{R}$ les carrés sont positifs $\Rightarrow$ si $a^2 + b^2 = 0$ alors $a = b = 0$.
Si on considère des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, alors x et $f(x)$ peuvent être dépendants. Ex.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_{\varepsilon,\varepsilon}(\varphi)$, $\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$.

$\varphi \circ \varphi = -id$ car $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mais si $v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $Av = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = iv$

$\Rightarrow v$ et $\varphi(v)$ sont dépendants.