

M1MI2012 : Algèbre 1

fascicule d'exercices

Table des matières

1	Systèmes linéaires	3
2	Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels	4
3	Famille libre, famille génératrice	5
4	Somme et intersection de sous-espaces, sous-espaces-supplémentaires	7
5	Applications linéaires	8
6	Calcul matriciel	10
7	Matrices et homomorphismes ; changements de base	12
8	Dualité	15
9	Polynômes	16
10	Fractions rationnelles	21

Dans tous les exercices, $\mathbb{K}$ désignera par défaut le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{S1} \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{array} \right. & \text{S2} \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + 6z + 2t = 5 \\ y - 2z + t = 1 \\ z - 3t = 2 \end{array} \right. \\ \text{S3} \left\{ \begin{array}{l} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 11y - z = 5 \end{array} \right. & \text{S4} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2t = 1 \\ 5x + 4y + z + 3t = 14 \end{array} \right. \\ \text{S5} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 10 \\ x - y + z + t = 6 \\ x + y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 4 \end{array} \right. & \text{S6} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - 5z + 4t = 43 \\ -3x + 2y + z - 2t = 5 \\ 4x - y + 2z + 3t = -13 \\ 5x + y + 3z + t = -28 \end{array} \right. \end{array}$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{array}{ll} 1. \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{array} \right. & 2. \left\{ \begin{array}{l} x + iy + 2z = 0 \\ ix + 3z = 0 \end{array} \right. \\ 3. \left\{ \begin{array}{l} -2x + y = -4 + i \\ x + iz = 2 - i \\ x - y - iz = 2 \end{array} \right. & 4. \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 + 2i \\ ix - 3z = 3 - i \\ x + iy + z = 2 - i \end{array} \right. \\ 5. \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + iy - z = i \\ -ix + (1 + i)y + 2iz = 1 \end{array} \right. & \end{array}$$

Exercice 3. Discuter et résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{array}{ll} 1. \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 0 \\ x - 2y + 2z - t = 1 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = -1 \end{array} \right. & 2. \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y + 3z = 7 \\ 3x + 8y - 7z = 3 \end{array} \right. \\ 3. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_4 + 2x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 0 \end{array} \right. & \end{array}$$

Exercice 4. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres u, v, w, t pour que les systèmes suivants admettent des solutions, puis les résoudre :

$$\begin{array}{ll} 1. \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 6z = u \\ 3x + y + 3z = v \\ 6x + 6y + z = w \\ 7x + 9y + 7z = t \end{array} \right. & 2. \left\{ \begin{array}{l} 3x - y - 2z = u \\ -x + 3y - z = v \\ -2x - 2y + 3z = w \\ x - 3y + z = t \end{array} \right. \\ 3. \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 2z = u \\ x + 2y + z = v \\ x + y + z = w \\ 4x + 3y + 4z = t \end{array} \right. & \end{array}$$

2 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 5. Déterminer dans chacun des cas suivants si les lois $\oplus$ et $\bullet$ munissent ou non $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel :

- 1) $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$; $\lambda \bullet (x, y) = (\lambda x, y)$.
- 2) $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y' + 2)$; $\lambda \bullet (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.
- 3) $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$; $\lambda \bullet (x, y) = (\lambda y, \lambda x)$.
- 4) $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$; $\lambda \bullet (x, y) = (\lambda y, 0)$.
- 5) $(x, y) \oplus (x', y') = (xx', yy')$; $\lambda \bullet (x, y) = (\lambda x, y)$.
- 6) $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$; $\lambda \bullet (x, y) = (\lambda^2 x, \lambda^2 y)$.

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{K}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4, x + 2y + 3z + 4t = a\}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que F , muni de l'addition et de la multiplication par les scalaires usuelles, soit un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Exercice 7. Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

- $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$; $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$;
 $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = z\}$; $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$;
 $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geq 0\}$; $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geq 0\}$;
 $E_7 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$; $E_8 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$;
 $E_9 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante}\}.$

Exercice 8. Montrer que les parties de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ suivantes sont des sous-espaces vectoriels :

1. $F = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f'(a) = f'(b)\}$
2. $G = \left\{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t) dt = 0\right\}$

Exercice 9. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Prouver :

1. $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 10. Soient A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. Montrer que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.
2. Comparer $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.

Exercice 11. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E .

Montrer que $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, et F , G et H trois sous-espaces vectoriels de E . On suppose qu'ils vérifient les hypothèses suivantes : $G \subset H$, $F \cap G = F \cap H$ et $F + G = F + H$. Montrer que $G = H$.

3 Famille libre, famille génératrice

Exercice 13. Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

- 1) $A = \{(2, 3, 0); (0, 1, 4)\}$;
- 2) $B = \{(0, 1, -1); (1, 2, -1); (0, 2, 1); (4, 6, 3)\}$;
- 3) $C = \{(1, 1, 0); (2, -1, 1); (0, -1, 1)\}$.

Donnez une base du sous-espace vectoriel engendré par chacune de ces familles.

Exercice 14. Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?

Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

1. $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ avec $\vec{x}_1 = (1, 0, 1)$ et $\vec{x}_2 = (1, 2, 2)$
2. $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ avec $\vec{x}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{x}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{x}_3 = (1, 1, 1)$
3. $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ avec $\vec{x}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{x}_2 = (2, 1, -1)$ et $\vec{x}_3 = (1, -1, -2)$
4. $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ avec $\vec{x}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{x}_2 = (2, -1, 3)$ et $\vec{x}_3 = (-1, 1, -1)$.

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux vecteurs : $U = (1, 1, 1)$ et $V = (0, 1, 2)$. La famille $\{U, V\}$ est-elle libre ? Forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Déterminer une équation de $\text{Vect}(U, V)$.

Exercice 16. Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $e_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $e_2 = (1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}\{e_1, e_2\}$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}\{e_1, e_2\}$?

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de E . Soit $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ et $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

Montrer que la famille $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ est libre et compléter celle-ci en une base de E .

Exercice 18. Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)\} \\ G &= \text{Vect}\{(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\} \end{aligned}$$

Exercice 19. On considère les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (1, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille $\{u; v; w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $(1, 0, 0)$ dans cette base.

Exercice 20. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u_1 = (0, \lambda, 2)$, $u_2 = (\lambda, 3, 5)$ et $u_3 = (\lambda, 0, 1)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) Déterminer pour quelles valeurs de λ la famille $\{u_1; u_2; u_3\}$ est libre.
- 2) Déterminer pour quelles valeurs de λ la famille $\{u_1; u_2; u_3\}$ est génératrice.
- 3) Déterminer les coordonnées du vecteur $u = (x, y, z)$ dans la base $\{(0, 1, 2); (1, 3, 5); (1, 0, 1)\}$.

Exercice 21. Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$ et $\{(3, 7, 0), (5, 0, -7)\}$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 22. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\vec{v} = (1, 0, -1)$.
Montrer que $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \{(2\alpha, \alpha + \beta, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 23. Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on pose $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(x) = e^{k \cdot x}$.
Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 24. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ une famille de vecteurs de E . Etablir :

- a) Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre et $u_{n+1} \notin \text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\}$ alors $\{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ est libre
- b) Si $\{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ est génératrice et $u_{n+1} \in \text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\}$ alors $\{u_1, \dots, u_n\}$ est génératrice.

Exercice 25. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $\vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_i$.

- 1. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ est une base de E .
- 2. Exprimer les composantes dans $\mathcal{B}'$ d'un vecteur en fonction de ses composantes dans $\mathcal{B}$.

Exercice 26. Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On fixe $N \in \mathbb{N}$, tel que $N > 0$.

- 1) Prouvez que la famille $F = (\cos(0x); \cos(x); \cos(2x); \dots; \cos(Nx))$ est libre.
- 2) Prouvez que la famille $G = (\sin(x); \sin(2x); \dots; \sin(Nx))$ est libre.
- 3) Prouvez que la famille
 $H = (\cos(0x); \cos(x); \cos(2x); \dots; \cos(Nx); \sin(x); \sin(2x); \dots; \sin(Nx))$ est libre.

Exercice 27. On considère dans cet exercice $E = \mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{Q}$.

- 1) Montrer $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. En déduire que la famille $(1; \sqrt{6})$ est une famille libre de E .
- 2) Montrer que $(\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5})$ est une famille libre de E .

4 Somme et intersection de sous-espaces, sous-espaces-supplémentaires

Exercice 28. On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F celui engendré par e_4, e_5 . Calculer les dimensions respectives de $E, F, E \cap F, E + F$.

Exercice 29. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 1, 0), \vec{v} = (0, 1, -1, 0), \vec{w} = (1, 1, 1, 1), \vec{x} = (0, 0, 1, 0)$ et $\vec{y} = (1, 1, 0, -1)$. Soit $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $G = \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$. Quelles sont les dimensions de $F, G, F + G$ et $F \cap G$?

Exercice 30. Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t\}$. Déterminer $\dim E, \dim F, \dim(E + F), \dim(E \cap F)$.

Exercice 31. Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}, \quad G = \{(b + c, b, c) \in \mathbb{R}^3, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 32. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (2, 1, 1)$,
2. $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{u} = (-1, 1, 0), \vec{v} = (2, 0, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, 1)$,
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 33. Soient $F = \left\{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0\right\}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \mid f \text{ constante}\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 34. Considérons $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- 1) Prouvez que les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E .
 - a) $E_1 = \{f \in E \mid f \text{ est paire}\}$.
 - b) $E_2 = \{f \in E \mid f \text{ est impaire}\}$.
- 2) Soit $f \in E$, montrer que f s'écrit de manière unique $f = f_1 + f_2$ où $f_1 \in E_1$ et $f_2 \in E_2$. Que peut-on dire de la somme $E_1 + E_2$?
- 3) Déterminer la décomposition de la fonction $x \mapsto e^x$ comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

5 Applications linéaires

Dans toute la suite, si E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, on désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires (ou *homomorphismes*) de E dans F et par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans lui-même (ou *endomorphismes* de E).

Exercice 35. Soit f l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui à (x, y, z) associe $(x + y + z, x + y + z, 2x + 2y + 2z)$. Prouvez que $((1, -1, 0); (0, 1, -1))$ est une base du noyau de f . Prouvez que $(5, 5, 10)$ est une base de l'image de f .

Exercice 36. Les applications entre $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + 1$
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$
4. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x - z$
5. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x - y)$
6. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (xy, x, y)$.

Exercice 37. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, 3x + 3y + 2z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Calculer $f(1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0)$ et $f(0, 0, 1)$.
3. Donner des bases de l'image et du noyau de f . Quel est le rang de f ?
4. Soit $v = f(u)$ un élément de l'image de f , quelle est l'image réciproque de v par f ?

Exercice 38. Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel F .

Montrer que pour toute partie A de E , on a $f(\text{Vect } A) = \text{Vect } f(A)$.

Exercice 39. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Montrer que $g \circ f = 0$ si, et seulement si, $\text{Im } f \subset \ker g$.

Exercice 40. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. Montrer que $\ker f \subset \ker f^2$ et $\text{Im } f \supset \text{Im } f^2$.
2. Montrer que
 - (a) $\text{Im } f \cap \ker f = \{0\} \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2$,
 - (b) $E = \text{Im } f + \ker f \Leftrightarrow \text{Im } f = \text{Im } f^2$.
3. Si E est de dimension finie, montrer que

$$\ker f = \ker f^2 \iff \ker f \cap \text{Im } f = \{0\} \iff E = \ker f \oplus \text{Im } f.$$

Donner un exemple d'endomorphisme satisfaisant les propriétés (équivalentes) ci-dessus, et un exemple d'endomorphisme ne les satisfaisant pas.

Exercice 41. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f une application linéaire de E dans lui-même telle que $f^2 - 3f + 2\text{Id} = 0$.

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .
2. Établir que $\ker(f - \text{Id})$ et $\ker(f - 2\text{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice 42. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et p une application linéaire de E dans lui-même. On dit que p est un *projecteur* si $p^2 = p$.

1. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $\text{Id} - p$ en est un.
2. Si p est un projecteur, montrer que $\ker p = \text{Im}(\text{Id} - p)$ et $\ker(\text{Id} - p) = \text{Im} p$.

Exercice 43. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et s un endomorphisme de E involutif, c'est-à-dire tel que $s^2 = \text{Id}$. On pose $F = \ker(s - \text{Id})$ et $G = \ker(s + \text{Id})$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .
2. Montrer que s est la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G .

Plus généralement, soient $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - (\alpha + 1)f + \alpha\text{Id} = 0$. On pose $F = \ker(f - \text{Id})$ et $G = \ker(f - \alpha\text{Id})$.

3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

6 Calcul matriciel

Pour tout couple d'entiers naturels (n, m) , on note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et m colonnes. Quand le nombre de lignes et de colonnes sont égaux, on utilisera la notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ plutôt que $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Exercice 44. On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculer AB , BC , $(AB)C$, et $A(BC)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 45. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer AB puis BA . Que remarque-t-on ?

Exercice 46. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2 et B^3 . En déduire la valeur de B^n , pour tout entier naturel n (on pourra procéder par récurrence).
2. Étant donné un entier naturel n , développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.
3. En déduire A^n Pour tout entier naturel n .

Exercice 47.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Montrer que $AB = AC$. A-t-on $B = C$? La matrice A est-elle inversible ?

- (b) Déterminer toutes les matrices F telles que $AF = O$ (O étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $BA = I_2$.

Exercice 48. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et calculer le

cas échéant leur inverse : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Mêmes questions pour la matrice $D = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Exercice 49. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 50. Calculer les puissances des matrices suivantes (a et b sont des nombres réels ou complexes quelconques)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7 Matrices et homomorphismes ; changements de base

Si E et F sont deux espaces vectoriels munis de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$, sa matrice dans les bases précitées est notée indifféremment $\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ ou $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$. Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on utilisera également la notation $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ comme abréviation de $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$.

Exercice 51. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans la base $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

Exercice 52. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = \{f_1, f_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit h l'homomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(h)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est donnée par $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Soient :

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2.$$

Montrer que $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $A_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}}(h)$.

2. Soient :

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

Montrer que $\mathcal{C}' = \{f'_1, f'_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $A_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(h)$.

Exercice 53. Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z).$$

1. Montrer que u est linéaire.

2. Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer $u(e_1)$, $u(e_2)$ et $u(e_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3 et f_4 .

3. Écrire la matrice de u dans les bases canoniques.

4. Montrer que $\{f_1, f_2, u(e_1), u(e_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

5. Écrire la matrice de u dans les bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{f_1, f_2, u(e_1), u(e_2)\}$.

Exercice 54. Soit trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T la transformation linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$, $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer le noyau de cette application. Écrire la matrice A de T dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3 . Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

3. Calculer $T(f_1), T(f_2), T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3 . Écrire la matrice B de T dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ et trouver la nature de l'application T .

4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1} . Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 55.

1. Soit E un espace vectoriel et $\{e_1, \dots, e_p\}$ une famille génératrice de E . Montrer l'égalité $\text{Im } \varphi = \text{Vect } \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)\}$.

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

On note f_A (respectivement f_B) l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ est A (respectivement B). Déterminer une base des noyaux et une base des images respectifs de f_A et f_B . Quels sont les rangs de A et B .

Exercice 56. Soit h une application linéaire de rang r , de E , espace vectoriel de dimension n , dans F , espace vectoriel de dimension m .

1. Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E , et une base $(f_j)_{1 \leq j \leq m}$ de F , telles que $h(e_k) = f_k$ pour $k = 1, \dots, r$ et $h(e_k) = 0$ pour $k > r$. Quelle est la matrice de h dans un tel couple de bases ?
2. Déterminer un tel couple de bases pour l'homomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ défini dans les bases canoniques par :

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y_1 &= 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 &= x_2 + x_3 - 2x_4 \\ y_3 &= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \end{cases}$$

3. Même question pour l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, -y + z, x + y).$$

Exercice 57. Soient E un espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\varphi^2 = \varphi$.

1. Montrer que $E = \ker \varphi \oplus \text{Im } \varphi$.
2. Supposons que E est de dimension finie n . Posons $q = \dim(\ker \varphi)$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E telle que : $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_q) = 0$ et, pour tout $r > q$, $\varphi(e_r) = e_r$. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 58. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme dont la

matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est égale à A . Calculer f^k puis A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 59. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$. On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et on fixe la base $\varepsilon = \{1, i\}$.

1. Montrer que f est $\mathbb{R}$ -linéaire.
2. Calculer $A = \text{Mat}_\varepsilon(f)$.
3. Existent-ils x et $y \in \mathbb{C} - \{0\}$ tels que $f(x) = x$ et $f(y) = -y$? Si c'est le cas déterminer un tel x et un tel y .
4. Décrire géométriquement f .
5. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto e^{i\rho}\bar{z}$. Calculer $A = \text{Mat}_\varepsilon(g \circ f)$ et décrire géométriquement $g \circ f$.

8 Dualité

Exercice 60. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Notons $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$F(g) = \int_0^1 g(t) dt$$

pour tout $g \in E$

- 1) Montrer que F est linéaire.
- 2) Déterminer, s'il en existe, une fonction $h \in E$ telle que $F(h) = 0$ et h est non nulle (*i.e.* il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $h(t_0) \neq 0$).
- 3) L'application F est-elle injective ?
- 4) L'application F est-elle surjective ?

Exercice 61.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa base duale.
2. Même question avec les vecteurs $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (1, 0, 1)$ et $f_3 = (0, 1, 1)$.

Exercice 62. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une famille de formes linéaires sur E . On suppose qu'il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ non nul tel que $f_i(\vec{x}) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est liée dans E^* .

Exercice 63. Soit v un vecteur non nul d'un espace vectoriel E de dimension n . Montrer qu'à la différence de la notion de base duale, celle de "vecteur dual" de v n'a pas de sens, en construisant deux bases $B = \{v, e_2, \dots, e_n\}$ et $B' = \{v, f_2, \dots, f_n\}$ pour lesquelles "le v^* au sens de B^* et au sens de B'^* sont différents".

Exercice 64.

Soient B_1 et B_2 deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie et P la matrice de passage de B_1 à B_2 . Donner la matrice de passage de B_1^* à B_2^* en fonction de P .

Exercice 65. On considère, sur $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\{e_1, e_2\}$, les deux formes linéaires $f_1 = e_1^* + e_2^*$ et $f_2 = 2e_1^* - e_2^*$. Montrer que $\{f_1^*, f_2^*\}$ est une base de E^* et déterminer de quelle base de E cette famille est la base duale.

Exercice 66. On note $M_n(\mathbb{K})$ l'espace $M_n(\mathbb{K})$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Soit F une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant $F(AB) = F(BA)$ pour tous A, B dans $M_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un a dans $\mathbb{K}$ tel que $F(M) = a \text{Tr}(M)$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{K})$. (On pourra d'abord déterminer une base naturelle de $M_n(\mathbb{K})$).
2. Soit F une forme linéaire sur l'espace $M_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ tel que $F(M) = \text{Tr}(AM)$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{K})$. En déduire que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ contient au moins une matrice inversible.

9 Polynômes

Exercice 67. Soit P_{n+1} le polynôme

$$P_{n+1}(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x+1)}{1.2} + \dots + \frac{x(x+1) \cdots (x+n)}{1.2 \cdots (n+1)}$$

Décomposer en produit de facteurs de degré un P_1, P_2, P_3 . En déduire par récurrence la décomposition de P_n .

Exercice 68. Soit $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 4$. Trouver m, n tel que $4P(x) = (x^2 + mx + n)^2 - x^4$. En déduire une décomposition en produit de deux facteurs dans $\mathbb{Z}[x]$ de P .

Exercice 69. Montrer que le polynôme $P(x) = x^4 + 2x^2 + 9$ peut être décomposé en produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Existe-t-il une décomposition de P en produits de polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 70. Calculer le développement de $P(x) = (x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$. Que devient ce développement quand on change x en $-x$? En déduire une décomposition de $x^5 + x + 1$ en produit de deux facteurs à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Décomposer chacun des entiers 100009 et 100011 en produit de deux facteurs.

Exercice 71. Soit l'égalité $(x+1)^{a+b} = (x+1)^a(x+1)^b$. Calculer dans chaque membre le coefficient de x^p et en déduire l'égalité qui en découle.

Exercice 72. Effectuer les divisions euclidiennes de

1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$,
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$,
3. $X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$.

Exercice 73. Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer les divisions euclidiennes de

1. $X^2 - 3iX - 5(1+i)$ par $X - 1 + i$,
2. $4X^3 + X^2$ par $X + 1 + i$.

Exercice 74.

- a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $X^n - 1$ est divisible par $X - 1$. Calculer le quotient.
- b. Montrer que pour tout entier positif et impair n , le polynôme $X^n + 1$ est divisible par $X + 1$. Calculer le quotient.

Exercice 75. Soit P un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1 et celui de la division de P par $X - b$ est -1 , ($a \neq b$), quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$?

Exercice 76. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X - 1)^2$. Même question pour X^n et $X^2 + 1$.

Exercice 77. Soit P un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $X - 1$ est 7 et par $X + 5$ est 3. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 4X - 5$?

Exercice 78. Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

Exercice 79. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≤ 2 tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

Exercice 80. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré minimum tel que

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4$$

Exercice 81. Désignons par α le réel $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 4 tel que $P(\alpha) = 0$.

Exercice 82. On pose $P = X^3 + 3X^2 + 2X - 4$, et on choisit une racine complexe de P . On note $\beta = 2/\alpha$. Trouver un polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $Q(\beta) = 0$.

Exercice 83.

- Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose $a \neq b$. Montrer que : $(X - a)(X - b)$ divise P si et seulement si $P(a) = P(b) = 0$.
- Soit n un entier ≥ 1 . Montrer que $(X - 2)(X - 3)$ divise $(X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 84. On note $\alpha = 2 + \sqrt{5} \in \mathbb{R}$.

- Montrer qu'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de degré 2 tel que $P(\alpha) = 0$. Vérifier que $\bar{\alpha} = 2 - \sqrt{5}$ est aussi une racine de P .
- Soit $Q \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $Q(\alpha) = 0$. Montrer que Q est divisible par P . En déduire que $Q(\bar{\alpha}) = 0$.

Exercice 85. Calculer le pgcd de P et Q pour

- $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $Q = X^3 + X^2 - X - 1$.
- $P = X^4 - 10X^2 + 1$ et $Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$.
- $P = X^5 - iX^4 + X^3 - X^2 + iX - 1$ et $Q = X^4 - iX^3 + 3X^2 - 2iX + 2$.

Exercice 86.

- Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $(X - a)^2$ divise P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.
- Soit n un entier ≥ 1 . Montrer que $(X - 1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- Posons $P = X^4 - 4X^2 + 4X - 1 \in \mathbb{R}[X]$. Calculer $P'(1)$, puis décomposer P en produit de facteurs de degré 1.

Exercice 87. Soit n un entier ≥ 1 . Déterminer les nombres a, b tels que le polynôme $P = aX^{2(n+1)} + bX^{2n} + 1$ admette une racine double $X = -1$. Quel est alors le quotient de P par $(X + 1)^2$?

Exercice 88. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$.

- Supposons que $nP = XP'$. Montrer que qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda X^n$.
- Supposons que P' divise P . Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $nP = (X - a)P'$. En déduire qu'il existe λ tel que $P = \lambda(X - a)^n$.

Exercice 89. Soient A, B dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que B divise A dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si B divise A dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 90.

- Calculer le pgcd de $2X^4 - 3X^2 + 1$ et $X^3 + X^2 - X - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$.
- Calculer le pgcd de $10X^3 + 7X^2 - X - 1$ et $6X^3 + 5X^2 - X - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 91. Trouver toutes les racines réelles du polynôme $X^4 + \iota X^3 - 3X^2 - 2\iota X + 1 - \iota$.

Exercice 92. On donne le polynôme $P = X^5 - 6\iota X^4 - 11X^3 + 2\iota X^2 - 12X + 8\iota$. Montrer que 2ι est une racine de P , déterminer sa multiplicité, puis factoriser P dans le domaine complexe.

Exercice 93. Montrer que le polynôme $P = (X + 1)^5 - X^5 - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 94. On pose $P = X^3 - 2X^2 + 3X + 1$. Soient α, β, γ les racines complexes de P . Calculer $Q = (X - \alpha^2)(X - \beta^2)(X - \gamma^2)$.

Indication : On pourra d'abord calculer $Q(X^2)$.

Exercice 95. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, quel est leur noyau ? Leur image ?

- f_1 la fonction de $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui à P associe $(P(3), P'(7), P(1) - P(2))$.
- f_2 la fonction de $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ qui à P associe $P - (X + 2)P'$.
- f_3 la fonction de $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ qui à P associe P' .
- Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixés, f_4 la fonction de $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ qui à P associe l'unique polynôme Q tel que $Q' = P$ et $Q(a) = b$.

Exercice 96. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ un polynôme. Est-il possible d'écrire P comme combinaison linéaire des polynômes $1, (1 + X)^2$ et $(1 - X)^2$? L'écriture est-elle unique ?

Exercice 97. Notons V l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P''(1) = P(0) - 2P(1) + P(2)$.

- Vérifier que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- Calculer $d \in \mathbb{N}$ maximal tel que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]_d$ des polynômes de degré inférieur ou égal à d soit inclus dans V .
- A-t-on $V = \mathbb{R}[X]_d$?

Exercice 98. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus n .

- Soit $\mathcal{B} = (P_0; \dots; P_n)$ une famille de polynômes non nuls. On suppose que pour tout k , on a $\deg P_k = k$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- On pose pour tout $k = 0, \dots, n$ $E_k = X^k(1 - X)^{n-k}$. Montrer que la famille $(E_0; \dots; E_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Fixons $a_0, \dots, a_n$, $n + 1$ éléments de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts. On pose pour tout $k = 0, \dots, n$:

$$H_k(X) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (a_k - a_i)^{-1} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (X - a_i).$$

Montrer que la famille $\mathcal{H} := (H_0; \dots; H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{H}$.

Exercice 99. Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ trois polynômes complexes non nuls.

- A-t-on $\text{pgcd}(A, B) = 1 \Leftrightarrow \text{pgcd}(A + B, AB) = 1$?
- A-t-on $\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(A + B, AB)$?

3. A-t-on $\text{pgcd}(AC, BC) = C \cdot \text{pgcd}(A, B)$?
4. A-t-on $\text{ppcm}(AC, BC) = C \cdot \text{ppcm}(A, B)$?
5. Quelle est la relation entre $\text{pgcd}(A, B)$, $\text{ppcm}(A, B)$ et le produit AB ?

Exercice 100. Soient $P = X^6 + X^4$ et $Q = X^{25} - X + 1$ deux éléments de $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer sans calcul que les racines communes de P et Q sont exactement les racines de leur pgcd .
2. Quelles sont les racines de P dans $\mathbb{C}$?
3. Montrer (presque) sans calcul que P et Q sont premiers entre eux.

Exercice 101. Soit $P(X) = 2X^5 + 5X^4 + 8X^3 + 7X^2 + 4X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Calculer le pgcd de P et P' .
2. Quelles sont les racines communes à P et P' ? En déduire les racines multiples de P dans $\mathbb{C}$, et donner leurs multiplicités.
3. Montrer que $(X^2 + X + 1)^2$ divise P .
4. Décomposer P dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de trois facteurs de degré > 0 .

Exercice 102. Factoriser les polynômes $P = X^3 - 12X + 16$ et $Q = X^4 - 6X^2 + 8X - 3$ dans $\mathbb{Q}[X]$, puis calculer $\text{pgcd}(P, Q)$ et $\text{ppcm}(P, Q)$ (*indication* : chacun d'eux a une racine multiple).

Exercice 103.

1. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $X^2 + X + 1$ divise-t-il $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$?
2. Déterminer tous les polynômes de la forme $X^2 + aX + 1$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ qui divisent le polynôme $X^4 + 3X^2 + 1$.

Exercice 104.

1. Déterminer λ pour que $P = X^3 - 3X + \lambda$ ait une racine double.
2. Trouver une condition sur p, q pour que $A = X^3 + pX + q$ ait une racine multiple, et discuter les multiplicités des racines de A .
3. Soit n un entier ≥ 1 . Montrer que le polynôme

$$f(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{C}[X]$$

n'a pas de racines de multiplicité ≥ 2 .

Exercice 105. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme quelconque.

1. Montrer que les racines complexes de $P(X) - X$ sont aussi racines de $P(P(X)) - X$.
2. En supposant que $P(X) - X$ n'a que des racines simples, en déduire que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.
3. Montrer que le polynôme $Q_1 = X^4 + 6X^2 - X + 12$ est de la forme $P(P(X)) - X$ avec $P = X^2 + a$ et a un réel à déterminer. En déduire une factorisation de Q_1 dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Montrer que le résultat de la question 2. est valable sans hypothèse sur l'ordre des racines de $P(X) - X$.

5. Décomposer $Q_2 = X^4 + X^2/2 - X + 5/16$ en produit de trois facteurs non triviaux dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 106. Pour chacun des couples de polynômes $A, B \in \mathbb{Q}[X]$ indiqués ci-dessous, trouver des polynômes U et V tels que $UA + VB$ soit un pgcd de A et B .

- a) $A = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$, $B = X^4 + 2X^3 + X + 2$
- b) $A = 3X^5 + 5X^4 - 16X^3 - 6X^2 - 5X - 6$, $B = 3X^4 - 4X^3 - X^2 - X - 6$
- c) $A = X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$, $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$
- d) $A = X^4$, $B = (1 - X)^4$

Exercice 107. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (on pourra prendre par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soient A, B, C des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ tels qu'il existe $(P_1, Q_1) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ une solution particulière de l'équation $P_1A + Q_1B = C$. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $PA + QB = C$?

Exercice 108. Soient $A = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ et $B = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$ deux polynômes dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Trouver $U \in \mathbb{R}[X]$ et $V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = \text{pgcd}(A, B)$.
2. Trouver un polynôme de degré aussi petit que possible dont le reste de la division par $X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ soit égal à $X^2 + 3X + 5$ et dont le reste de la division par $X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$ soit égal à $2X^2 - 3$.

Exercice 109. Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients réels, possédant n racines réelles distinctes. Montrer que son polynôme dérivé P' possède exactement $n - 1$ racines réelles distinctes, puis en déduire que les racines du polynôme $P^2 + 1$ sont toutes simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 110. Soit $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1. Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 111. Factoriser les deux polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, puis trouver leurs racines (*indication* : chacun d'entre eux a une racine évidente)

$$X^3 - X^2 + 2X + 4, \quad X^3 - 7X^2 + 19X - 13$$

Exercice 112. On considère le polynôme $X^3 - 7X + \lambda$. Déterminer λ pour que l'une des racines de ce polynôme soit le double d'une autre.

10 Fractions rationnelles

Exercice 113. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)}, \quad \frac{1}{X(X^2+1)^2}, \quad \frac{X}{X^4+X^2+1}$$

Exercice 114. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{(x^2-1)(x+1)^2}, \quad \frac{x^7+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}, \quad \frac{x^3+x}{(x^2+x+1)^2}.$$

Exercice 115. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle :

$$\frac{x^7+4x^6+10x^5+16x^4+18x^3+14x^2+8x+2}{(x+1)(x^3+2x^2+2x+1)^2}.$$

Devoirs surveillés des années précédentes

	ANNEE UNIVERSITAIRE 2011/2012 UE M1MI 2012 (Algèbre 1) Devoir surveillé 1 Date : 05/03/2012 Heure : 14 h Durée : 1h30 Documents non autorisés. La calculatrice homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.	
---	---	---

Exercice 1 Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels (justifier) :

1. $A = \{f \in E, f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$;
2. $B = \{f \in E, f \text{ est paire}\}$;
3. $C = \{f \in E, f(1) = f(0)\}$.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^4$, on se donne les vecteurs suivants

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.
2. Donner la dimension et une base de
 - a) $F = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$;
 - b) $G = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$.
3. Donner les coordonnées de u_1, u_2 et u_3 dans la base obtenue au 2.a).
4. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
5. En déduire la dimension et une base de $F + G$.

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On se donne cinq vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 de E . On suppose que les familles (v_1, v_2, v_3, v_4) et (v_4, v_5) sont libres. Enfin, on suppose que

$$(\star) \quad 5v_1 + 4v_2 + 3v_3 + 2v_4 + v_5 = 0.$$

Seules seront notées les réponses justifiées.

1. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
2. Donner la dimension et une base de
 - a) $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$;
 - b) $G = \text{Vect}\{v_4, v_5\}$;
 - c) $F + G$.
3.
 - a) Quelle est la dimension de $F \cap G$?
 - b) A partir de la relation $(\star)$, trouver un vecteur non nul qui appartient à $F \cap G$.
 - c) En déduire une base de $F \cap G$.

	ANNEE UNIVERSITAIRE 2011/2012 UE M1MI 2012 (Algèbre 1) Devoir surveillé 2 Date : 12/04/2012 Heure : 8h30 Durée : 1h30 Documents non autorisés. La calculatrice homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.	
---	---	---

Exercice 1 Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

et $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est A .

1. Déterminer la dimension et une base de $\text{Ker } f$.
2. Déterminer la dimension et une base de $\text{Im } f$.

On pourra répondre aux questions dans l'ordre de son choix.

Exercice 2

1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E (c'est-à-dire une application linéaire de E dans E).
 - a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E_\lambda = \{x \in E, f(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de E .
 - b) Soient λ et μ deux réels *distincts*. Montrer que $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$.
2. On se place maintenant dans la situation où $E = \mathbb{R}^3$ et f est donnée par

$$f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 \end{pmatrix}.$$

- a) Vérifier que f est linéaire.
- b) Écrire la matrice A de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
- c) Vérifier la relation $A^2 + A - 2I_3 = 0$ (où I_3 est la matrice identité d'ordre 3). En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
- d)
 - i. Montrer que $x = (x_1, x_2, x_3)$ appartient à $E_1 = \{x \in E, f(x) = x\}$ si et seulement si x vérifie le système

$$(S) \quad \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

- ii. Résoudre (S) . En déduire la dimension et une base de E_1 .
- iii. Déterminer la dimension et une base de $E_{-2} = \{x \in E, f(x) = -2x\}$.
- iv. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_{-2}$ (on pourra utiliser la question 1.b).

Tournez S.V.P.

v. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

vi. En utilisant la question précédente, donner une matrice P carrée d'ordre 3, inversible, telle que $D = P^{-1}AP$ (on ne cherchera pas à calculer P^{-1}).

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (non réduit à $\{0\}$) et $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire de E dans E . On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \text{Id}_E$.

[Indication : on pourra fixer $x \in E$ non nul. Soit $y \in E$: commencer par traiter le cas où la famille (x, y) est liée. Puis, si (x, y) est libre, comparer $f(x)$, $f(y)$ et $f(x + y)$]

	ANNEE UNIVERSITAIRE 2011/2012 UE M1MI 2012 (Algèbre 1) Devoir Surveillé Terminal Date : 12/06/2012 Heure : 14 h Durée : 3 h Documents non autorisés. La calculatrice homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.	
---	---	---

Exercice 1 1. Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si A et B ont une racine commune α , alors α est aussi racine de $\text{pgcd}(A, B)$.

Soient maintenant $A, B \in \mathbb{R}[X]$ les deux polynômes définis par

$$A(X) = X^5 - 4X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 8X - 16$$

et

$$B(X) = X^4 + X^3 - 2X^2 - 6X - 4.$$

2. Sachant que A admet une racine triple (i.e. de multiplicité 3) $\alpha \in \mathbb{R}$, que peut-on dire de $A'(\alpha)$? de $A''(\alpha)$? de $A'''(\alpha)$? En déduire en particulier que $P(X) = 5X^3 - 12X^2 + 3X + 2$ admet α pour racine.
3. Calculer $\text{pgcd}(A, B)$.
4. Sachant que α est aussi racine de B , utiliser la question 1 pour montrer à partir des polynômes trouvés en 2 et 3 que α est aussi racine de $Q(X) = 12X^2 - 13X - 22$.
5. Calculer les racines de Q (remarque : $1225 = 35^2$). En déduire la racine commune à A et B .
6. A partir des questions précédentes, déterminer les factorisations dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ de A et B .

Exercice 2 1. Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit R le reste de la division euclidienne de A par $(X - \alpha)^2$.

- a) Que peut-on dire du degré de R ?
- b) Quelle relation y a-t-il entre $A(\alpha)$ et $R(\alpha)$?
- c) Quelle relation y a-t-il entre $A'(\alpha)$ et $R'(\alpha)$ (où A' , respectivement R' , désigne le polynôme dérivé de A , respectivement R)?
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par $P(X) = X^2 - 2X + 1$.
 - a) Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
 - b) A l'aide de la question 1, calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ le reste de la division euclidienne de X^n par P (sans effectuer la division).
3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calculer A^2 .
- b) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 + aA + bI_2 = 0$ (où I_2 est la matrice identité d'ordre 2).

Tournez S.V.P.

4. a) En utilisant les questions précédentes, montrer qu'il existe deux fonctions u et v de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ que l'on explicitera, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = u(n)A + v(n)I_2.$$

- b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & 4n \\ -n & 1-2n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

1. Donner (sans démonstration) la dimension et une base $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe

$$\Phi(P) = \begin{pmatrix} P''(1) \\ 2P(1) - P(0) \\ P(2) \end{pmatrix}.$$

- a) Montrer que Φ est linéaire.
- b) Calculer l'image par Φ des éléments de la base $\mathcal{B}_3$ donnée à la question 1 (pour $n = 3$).
- c) En déduire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- d) Déterminer la dimension et une base de
 - i. $\text{Ker } \Phi$.
 - ii. $\text{Im } \Phi$.
 (on procédera dans l'ordre de son choix pour i et ii).

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (non réduit à $\{0\}$). Soit f un endomorphisme de E (i.e. une application linéaire de E dans E). On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f = \lambda \text{Id}_E$.

1. Si $\lambda \neq 0$, montrer que f est injectif.
2. Si $\lambda < 0$, montrer que pour tout $x \neq 0$, la famille $(x, f(x))$ est libre.
3. Si $\lambda = 0$, montrer que f n'est pas injectif.
4. Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $f \circ f = 0$ mais $f \neq 0$.

	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2012-2013 Devoir surveillé numéro 1 Parcours : MI201 UE : MI2012 Épreuve : Algèbre 1 Date : 18 Mars 2013 Heure : 11h00 Durée : 1h30 Documents : Aucun document autorisé. Épreuve de M. Robert	
---	---	---

Les quatre exercices sont indépendants.

Toute réponse doit être justifiée.

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice I

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les deux vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, 2, 4)$.

1. Montrer que le vecteur $(x, 0, 1)$ appartient à $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ pour une seule valeur de x à déterminer et calculer λ et μ tels que $(x, 0, 1) = \lambda v_1 + \mu v_2$.
2. Notant $e_3 = (0, 0, 1)$, montrer que (v_1, v_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et déterminer les coordonnées dans cette base de $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.
3. Déterminer trois réels (a, b, c) non tous nuls tels que $v = (x, y, z)$ appartient à F si et seulement si $ax + by + cz = 0$.

Exercice II

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel et en déterminer une base.
2. Soit $v = (1, 1, 1)$; montrer que la droite $\mathbf{R}v$ est un supplémentaire de F .
3. Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^3$. Montrer qu'il existe un unique réel t tel que $u + tv$ appartienne à F .

Exercice III

Dans $\mathbf{R}^4$ on se donne les vecteurs suivants

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 2, 3, 4), \quad v_3 = (1, 3, 5, 7).$$

1. On note $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Déterminer sa dimension et en donner une base.
2. On pose $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + t = y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$; déterminer sa dimension et en donner une base.
3. Déterminer les dimensions ainsi que des bases de $F \cap G$ et de $F + G$.

Suite au verso

Exercice IV

Question de cours

Donner les définitions de familles libres et de familles génératrices.

A

Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et (u_1, u_2, u_3) une famille de trois vecteurs de E . On note $F_1 = \mathbf{R}u_1$, $F_2 = \mathbf{R}u_2$ et $F_3 = \mathbf{R}u_3$ les droites vectorielles engendrées par ces trois vecteurs.

1. On suppose que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre. Montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et que $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0\}$.
2. Réciproquement, on suppose que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0\}$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.
3. Donner un exemple de trois vecteurs u_1 , u_2 et u_3 deux à deux non colinéaires mais ne formant pas une famille libre.

B

Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et F_1, F_2, F_3 trois sous-espaces vectoriels de E .

1. On suppose que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0\}$. Montrer que, quels que soient $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$ et $v_3 \in F_3$ on a $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ si et seulement si $v_1 = v_2 = v_3 = 0$.
2. Réciproquement, on suppose que l'égalité $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ pour $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$ et $v_3 \in F_3$ implique $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. Montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0\}$.
3. Donner un exemple de trois sous-espaces F_1, F_2 et F_3 deux à deux en somme directe et tels que $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ avec $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$ et $v_3 \in F_3$ n'implique pas nécessairement $v_1 = v_2 = v_3 = 0$.

FIN

	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2012-2013 Devoir surveillé numéro 2 Parcours : MI201 UE : MI2012 Épreuve : Algèbre 1 Date : 23 Avril 2013 Heure : 11h00 Durée : 1h30 Documents : Aucun document autorisé Épreuve de M. Cerri	
---	--	---

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ qui à $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ associe $f(X) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ où

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ y_2 &= -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \\ y_3 &= 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 \\ y_4 &= -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 \end{cases}$$

1. Quelle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?
2. Déterminer une base de $\text{Im } f$, l'image de f . Quel est le rang de f ?
3. Soit $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x_1, x_2, x_3, x_4 pour que X appartienne à $\text{Ker } f$, le noyau de f . Quelle est la dimension de $\text{Ker } f$?
4. Montrer que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^4$.

Exercice 2

On considère dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de N ?
2. On définit les puissances successives d'une matrice carrée A par : $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, et plus généralement, si $k \geq 1$, $A^{k+1} = A \cdot A^k$. Calculer N^2 et N^k , pour $k \geq 3$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On pose $M = \lambda I_3 + N$. Écrire la matrice M et montrer que $M \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$.
4. Montrer par récurrence sur $k \geq 0$ que

$$M^k = \lambda^k I_3 + k\lambda^{k-1}N + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}N^2.$$

Calculer explicitement M^k .

5. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Trouver deux réels α et β tels que

$$(I_3 + \mu N)(I_3 + \alpha N + \beta N^2) = I_3.$$

En déduire M^{-1} .

Exercice 3

Soit un entier $n \geq 2$. On note $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $B' = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\begin{cases} f_i &= e_i + e_{i+1} & \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ f_n &= e_1 + e_n \end{cases}$$

1. Montrer que si $n = 3$ et $n = 5$, B' est une base de $\mathbb{R}^n$. Est-ce encore le cas si $n = 4$?
2. On suppose que $n = 3$. Quelle est la matrice de passage de B à B' ?
3. Toujours sous l'hypothèse $n = 3$, déterminer la matrice de passage de B' à B .
4. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 4 & -4 \\ 1 & 5 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $(e_i)_{1 \leq i \leq 5}$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et on définit comme précédemment la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq 5}$ de $\mathbb{R}^5$. Calculer $g(f_i)$ pour $1 \leq i \leq 5$.

5. En déduire qu'il existe deux matrices $P \in \text{GL}_5(\mathbb{R})$ et $Q \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$QAP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expliciter les matrices P et Q .

	ANNEE UNIVERSITAIRE 2012/2013 UE M1MI 2012 (Algèbre 1) Devoir Surveillé Terminal Date : 13/06/2013 Heure : 14 h Durée : 3 h Documents non autorisés. La calculatrice homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.	
---	---	---

Exercice 1 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E .
2. Calculer $f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)$ et en déduire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f .
4. Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1} .
5. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
6. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

1. Donner (sans démonstration) la dimension et une base $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
On considère les ensembles

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P(-1) = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P'(0) = 0\}.$$

2. Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Montrer que $P \in \mathbb{R}_3[X]$ est un élément de E si et seulement si c'est un multiple de $X^2 - 1$.
4. Trouver une base et la dimension de E (on pourra utiliser la question précédente).
5. Donner une base et la dimension de F .
6. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus F$ (somme directe).
7. En déduire que la famille $\mathcal{B}'_3 = (X^2 - 1, X^3 - X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
8. Calculer la matrice de passage P de la base $(1, X, X^2, X^3)$ à la base $\mathcal{B}'_3$.
9. Vérifier que $P^2 = I_4$ (la matrice identité d'ordre 4).
10. En déduire les coordonnées du polynôme $Q(X) = X^3 + 1$ dans la base $\mathcal{B}'_3$.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère le polynôme $P_\lambda(X) = X^4 + 6X^2 + \lambda X - 3$.

On cherche les valeurs de λ pour lesquelles P_λ admet une racine de multiplicité *au moins* 2.

1. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de multiplicité au moins 2 de P_λ , il est également racine de $4X^3 + 12X + \lambda$ et de $X^4 + 2X^2 + 1$.
2. En déduire les deux valeurs possibles de α , puis de λ , pour que α soit racine de multiplicité au moins 2 de P_λ .
3. Montrer ensuite que si P_λ admet une racine de multiplicité au moins 2, cette multiplicité est 3.
4. Pour les deux valeurs de λ trouvées à la question 2, factoriser P_λ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme *unitaire* à coefficients complexes, de degré $n \geq 1$. On suppose que P n'a que des racines simples que l'on note $x_1, x_2, \dots, x_n$.

1. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, comparer

$$P'(x_k) \quad \text{et} \quad \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{j=n} (x_k - x_j) = (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n).$$

2. En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{P}$ (exprimer les coefficients de la décomposition en fonction des $P'(x_k)$).
3. On suppose que $P(0) \neq 0$. Déduire de ce qui précède que

$$\frac{1}{P(0)} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)}.$$