Université de Bordeaux
Licence de Sciences et Technologie 2014-215
Fondamentaux pour les Mathématiques et l'Informatique **M1MI1003**

Devoir à la maison
à rendre **la première semaine de novembre 2014** (semaine 45)

1 Équations à inconnues entières

1. L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe un unique triplet (x_1, x_2, x_3) de $(\mathbb{N}^*)^3$ tel que :
$$x_1 < x_2 < x_3 \quad \text{et} \quad 1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$
   (a) Prouver que $x_1 < 3$ et en déduire la valeur de x_1.
   (b) Prouver que $x_2 < 4$ et en déduire la valeur de x_2.
   (c) Conclure.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, il existe $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tel que
$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n \quad \text{et} \quad 1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$$
Indication : on pourra montrer que $\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x_n + 1} + \dfrac{1}{x_n(x_n + 1)}$.

2 Indicatrices d'ensembles

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Si f et g sont des applications de E dans $\mathbb{R}$, L'application $f - g$ de E dans $\mathbb{R}$ est définie par $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ et l'application $f \cdot g$ de E dans $\mathbb{R}$ est définie par $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. On dit que $f = g$ si, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. Enfin, l'indicatrice de A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \mathbb{R}$ vérifiant $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \in \complement_E A$.

1. Montrer que $\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{\complement_E A}$.
2. Montrer que $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$.
3. Calculer $(\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_A)(\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_B)$ de deux manières différentes.
   En déduire que $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$.
4. Si C est une autre partie de E, donner une formule analogue pour $\mathbb{1}_{A \cup B \cup C}$ et la démontrer.

3 Numérotations

Numéroter les éléments d'un ensemble infini E, c'est associer à chaque élément de E un entier naturel (son numéro) de façon que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il y ait un et un seul élément de E de numéro n : une *numérotation* de E est ainsi une bijection de E sur $\mathbb{N}$.

1. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Déterminer $f(x)$ pour tous les entiers de $[-4; 4]$.
   Montrer que f est une numérotation de $\mathbb{Z}$.

2. On numérote les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ comme sur la figure suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc}
y & & & & & & & & \\
 & & & & \cdots & \longleftarrow & 21 & \longleftarrow & 20 \\
 & & & & & & & & \uparrow \\
15 & \longleftarrow & 14 & \longleftarrow & 13 & \longleftarrow & 12 & & 19 \\
 & & & & & & \uparrow & & \uparrow \\
8 & \longleftarrow & 7 & \longleftarrow & 6 & & 11 & & 18 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
3 & \longleftarrow & 2 & & 5 & & 10 & & 17 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & & 1 & & 4 & & 9 & & 16 \quad x
\end{array}$$

   On note $g(x, y)$ le numéro du couple (x, y).

   a) Montrer que $g(x, 0) = x^2$. En déduire une expression du numéro $g(x, y)$ de (x, y) en fonction de x et y lorsque $x \geq y$.

   b) Montrer que $g(0, y) = (y + 1)^2 - 1$. En déduire une expression du numéro $g(x, y)$ de (x, y) en fonction de x et y lorsque $x < y$.

   c) Quelles sont les coordonnées du point de numéro 1789 ? du point de numéro 1830 ? (Expliquer comment vous avez trouvé la réponse.)

3. Imaginer une numérotation des éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (on pourra se contenter d'une figure analogue à celle de la question précédente).