

**Devoir à la maison**  
à rendre la première semaine de novembre 2014 (semaine 45)

## 1 Équations à inconnues entières

1. L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe un unique triplet  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $(\mathbb{N}^*)^3$  tel que :

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad \text{et} \quad 1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

- (a) Prouver que  $x_1 < 3$  et en déduire la valeur de  $x_1$ .  
(b) Prouver que  $x_2 < 4$  et en déduire la valeur de  $x_2$ .  
(c) Conclure.
2. Montrer que pour tout entier  $n \geq 3$ , il existe  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$  tel que

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n \quad \text{et} \quad 1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$$

Indication : on pourra montrer que  $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n + 1} + \frac{1}{x_n(x_n + 1)}$ .

## 2 Indicatrices d'ensembles

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ . Si  $f$  et  $g$  sont des applications de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , L'application  $f - g$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  est définie par  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$  et l'application  $f \cdot g$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  est définie par  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ . On dit que  $f = g$  si, pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) = g(x)$ . Enfin, l'indicatrice de  $A$  est l'application  $\mathbb{1}_A : E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $\mathbb{1}_A(x) = 1$  si  $x \in A$  et  $\mathbb{1}_A(x) = 0$  si  $x \in \complement_E A$ .

1. Montrer que  $\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{\complement_E A}$ .
2. Montrer que  $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$ .
3. Calculer  $(\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_A)(\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_B)$  de deux manières différentes.  
En déduire que  $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$ .
4. Si  $C$  est une autre partie de  $E$ , donner une formule analogue pour  $\mathbb{1}_{A \cup B \cup C}$  et la démontrer.

### 3 Numérotations

Numéroter les éléments d'un ensemble infini  $E$ , c'est associer à chaque élément de  $E$  un entier naturel (son numéro) de façon que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il y ait un et un seul élément de  $E$  de numéro  $n$  : une *numérotation* de  $E$  est ainsi une bijection de  $E$  sur  $\mathbb{N}$ .

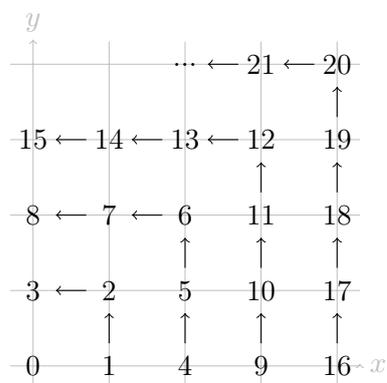
1. Soit  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer  $f(x)$  pour tous les entiers de  $[-4; 4]$ .

Montrer que  $f$  est une numérotation de  $\mathbb{Z}$ .

2. On numérote les éléments de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  comme sur la figure suivante :



On note  $g(x, y)$  le numéro du couple  $(x, y)$ .

- a) Montrer que  $g(x, 0) = x^2$ . En déduire une expression du numéro  $g(x, y)$  de  $(x, y)$  en fonction de  $x$  et  $y$  lorsque  $x \geq y$ .
  - b) Montrer que  $g(0, y) = (y + 1)^2 - 1$ . En déduire une expression du numéro  $g(x, y)$  de  $(x, y)$  en fonction de  $x$  et  $y$  lorsque  $x < y$ .
  - c) Quelles sont les coordonnées du point de numéro 1789 ? du point de numéro 1830 ? (Expliquer comment vous avez trouvé la réponse.)
3. Imaginer une numérotation des éléments de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  (on pourra se contenter d'une figure analogue à celle de la question précédente).