DS 1 novembre 2014

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, écrire l'énoncé sous la forme d'une proposition avec quantificateurs, dire s'il est vrai ou faux et le justifier.

a) Entre deux entiers relatifs consécutifs, il se trouve toujours un réel.

b) Il existe un entier naturel qui divise tous les entiers naturels.

Exercice 2. Soit E un ensemble, et A, B et C trois parties de E.

1) Montrer que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$.

2) Trouver un ensemble E et trois parties A, B et C de E telles que $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$.

Exercice 3. Démontrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété P_n suivante est vraie

$$P_n \ : \qquad \sum_{k=1}^{n} k\, 2^k \ = 2 + 2^{n+1}(n-1)$$

Exercice 4.

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (x^2, y - x^2)$$

a) f est-elle injective ?

b) f est-elle surjective ?

c) En montrant les deux inclusions voulues, prouver l'égalité $f(\mathbb{R}^2) = [0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

2) On note $E = [0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et on désigne par g l'application de E dans E donnée par

$$g \ : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2, y - x^2) \end{array} \right.$$

Montrer que cette application est bijective.

3) On considère la fonction h de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h(x,y) = \sqrt{x+y}$$

et f désigne la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie plus haut.

Expliciter la fonction $g \circ f$ et donner son domaine de définition.