

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, écrire l'énoncé sous la forme d'une proposition avec quantificateurs, dire s'il est vrai ou faux et le justifier.

a) Entre deux entiers relatifs consécutifs, il se trouve toujours un réel.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{R}, n < x < n + 1$$

C'est vrai. Si n désigne un entier relatif arbitraire, $x = n + 1/2$ est un réel strictement compris entre n et $n + 1$.

b) Il existe un entier naturel qui divise tous les entiers naturels.

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \mid m$$

C'est vrai, car $n = 1$ est un entier naturel qui divise tous les entiers naturels.

Exercice 2. Soit E un ensemble, et A , B et C trois parties de E .

1) Montrer que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$.

Soit x un élément de $A \cap (B \cup C)$. Il appartient à la fois à A et à $B \cup C$.

S'il appartient à B , il appartient à $A \cap B$, et donc aussi à $(A \cap B) \cup C$.

Sinon, comme il appartient à $B \cup C$, il appartient à C , donc à $(A \cap B) \cup C$.

Autre preuve : Par distributivité on a $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

De plus, $A \cap C \subset C$. Donc $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset (A \cap B) \cup C$.

Ainsi, $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$.

2) Trouver un ensemble E et trois parties A , B et C de E telles que $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$.

N'importe quel exemple où C contient au moins un élément qui n'est pas dans A convient. On peut proposer par exemple, $E = C = \{c\}$, $A = B = \emptyset$.

Exercice 3. Démontrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété P_n suivante est vraie

$$P_n : \sum_{k=1}^n k 2^k = 2 + 2^{n+1}(n-1)$$

- *Initialisation.* Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^n k 2^k = \sum_{k=1}^1 k 2^k = 1 \times 2^1 = 2$ et $2 + 2^{n+1}(n-1) = 2$. La propriété P_1 est donc vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété P_n est vraie. On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} k 2^k = \left(\sum_{k=1}^n k 2^k \right) + (n+1) 2^{n+1}.$$

Comme P_n est vraie, on en déduit

$$\sum_{k=1}^{n+1} k 2^k = 2 + 2^{n+1}(n-1) + (n+1) 2^{n+1},$$

puis, en simplifiant, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k 2^k = 2 + 2^{n+1} \times 2n = 2 + 2^{(n+1)+1}((n+1)-1).$$

Ainsi, on a montré que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

- *Conclusion.* D'après le théorème de la récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4.

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x^2, y - x^2)$$

a) f est-elle injective ? Justifier la réponse.

Non. En effet, $f(-1, 0) = (1, -1)$ et $f(1, 0) = (1, -1)$, donc $f(-1, 0) = f(1, 0)$.

b) f est-elle surjective ? Justifier la réponse.

Non. En effet, $(-1, 0)$ n'a pas d'antécédent par f .

c) En montrant les deux inclusions voulues, prouver l'égalité $f(\mathbb{R}^2) = [0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

- On a $f(\mathbb{R}^2) = \{(x^2, y - x^2) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, donc $f(\mathbb{R}^2) \subset \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / a \geq 0\}$. Ainsi, $f(\mathbb{R}^2) \subset [0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

- Inversement, soit $(a, b) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences

$$f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= a \\ y - x^2 &= b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= a \\ y &= b + a \end{cases}$$

Comme $a \geq 0$, sa racine carrée existe. Ainsi $f(\pm\sqrt{a}, b + a) = (a, b)$, et par conséquent $(a, b) \in f(\mathbb{R}^2)$.

On a donc prouvé l'inclusion $[0, +\infty[\times \mathbb{R} \subset f(\mathbb{R}^2)$.

- On conclut finalement $f(\mathbb{R}^2) = [0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

2) On note $E = [0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et on désigne par g l'application de E dans E donnée par

$$g : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ (x, y) & \longmapsto (x^2, y - x^2) \end{cases}$$

Montrer que cette application est bijective.

Soit $(a, b) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$, et $(x, y) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$. On a

$$g(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= a \\ y - x^2 &= b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= a \\ y &= b + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= +\sqrt{a} \\ y &= b + a \end{cases},$$

la dernière équivalence étant due à la positivité de x .

Ainsi, tout élément (a, b) de $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ a un et un seul antécédent dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Ceci prouve la bijectivité de g .

3) On considère la fonction h de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h(x, y) = \sqrt{x + y}$$

et f désigne l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie plus haut.

Expliciter la fonction $h \circ f$ et donner son domaine de définition.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors, $f(x, y)$ est bien défini et $f(x, y) = (x^2, y - x^2)$. De plus,

$$(h \circ f)(x, y) = h(f(x, y)) = h(x^2, y - x^2) = \sqrt{x^2 + (y - x^2)} = \sqrt{y} \text{ est défini si et seulement si } y \geq 0.$$

Ainsi, le domaine de définition de $h \circ f$ est $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et, pour (x, y) dans cet ensemble, $(h \circ f)(x, y) = \sqrt{y}$.