

Contrôle 1 Groupe D4, corrigé

$$i) \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & n \text{ impair} \end{cases}$$

pour $n=1$: $(-1)^1 \cdot 1 = -1 = -\frac{1+1}{2} = -1$ OK.

verif pour n . Démontrons-le pour $n+1$:
 n pair $\Rightarrow n+1$ impair alors $\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \sum_{k=1}^n (-1)^k k + (-1)^{n+1} (n+1) =$ → pair

Réc. $\frac{n}{2} - (n+1) = \frac{n-2n-2}{2} = \frac{-n-2}{2} = -\frac{(n+1)+1}{2} = -\frac{(n+1)+1}{2}$ OK.

n impair $\Rightarrow n+1$ pair, alors $\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \sum_{k=1}^n (-1)^k k + (-1)^{n+1} (n+1) =$

Réc. $-\frac{n+1}{2} + (n+1) = \frac{n+1}{2}$ OK.

$$ii) \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & n \text{ pair} \\ -\frac{n(n+1)}{2} & n \text{ impair} \end{cases}$$

pour $n=1$: $(-1)^1 \cdot 1^2 = -1 = -\frac{1 \cdot 2}{2} = -1$ OK.

verif pour n . $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

n pair $\Rightarrow n+1$ impair alors $\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1} (n+1)^2 =$

Réc. $\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)^2 = (n+1) \left(\frac{n}{2} - (n+1) \right) = (n+1) \frac{n-2n-2}{2} = -\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ OK.

n impair $\Rightarrow n+1$ pair $\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 =$ Réc. $-\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 =$

$= (n+1) \frac{-n-2n-2}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ OK.

$$iii) \sigma(n) = 2 \sum_{k=1}^n 1 + 3 \sum_{k=1}^n (-1)^k k + 5 \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2$$

$$= 2n + 3 \begin{cases} \frac{n}{2} + 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} & n \text{ pair} \\ -\frac{(n+1)}{2} - 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} & n \text{ impair} \end{cases}$$

donc $\sigma(10) = 2 \cdot 10 + 3 \cdot \frac{10}{2} + 5 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 20 + 15 + 110 = 145$.

Ex. 2.

P	Q	$(P \wedge \neg Q)$	$(Q \wedge \neg P)$	$(P \vee \neg Q)$	$(Q \vee \neg P)$	$\mathcal{F}$
V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V	F

donc $\mathcal{F}$ prend toujours la valeur F.