

Contrôle 1 groupe E3, corrigé

i) $\sigma_n = k + k^2 + \dots + k^{n+1} = k \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$

Pour $n=1$: $\sigma_1 = k + k^2 = k \cdot \frac{k^2 - 1}{k - 1} = k \cdot (k+1) = k + k^2$ ok.

Soit vrai pour n . $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + k^{n+2} \stackrel{\text{Rec}}{=} k \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} + k^{n+2} = k \frac{k^{n+1} - 1 + k^{n+1}(k-1)}{k-1} = k \frac{k^{n+2} - 1}{k-1} \text{ ok.}$$

ii) Directement: $k S_n + \sigma_n = k(1k + 2k^2 + \dots + nk^n) + k + k^2 + \dots + k^{n+1} =$

$$= k + (2k^2 + k^2) + (2k^3 + k^3) + \dots + (nk^{n+1} + k^{n+1})$$

$$= k + 2k^2 + 3k^3 + \dots + (n+1)k^{n+1}$$

iii) $S_{n+1} = \underbrace{1k + 2k^2 + \dots + nk^n}_{S_n} + (n+1)k^{n+1} = S_n + (n+1)k^{n+1}$ donc

$$k S_n + \sigma_n = S_{n+1} = S_n + (n+1)k^{n+1} \text{ implique}$$

$$k S_n + \sigma_n = S_n + (n+1)k^{n+1} \quad \text{c-a-d}$$

$$\begin{aligned} (k-1) S_n &= -\sigma_n + (n+1)k^{n+1} = -k \frac{k^{n+1} - 1}{k-1} + (n+1)k^{n+1} \\ &= \frac{-k^{n+2} + k + (k-1)(n+1)k^{n+1}}{k-1} \\ &= \frac{-k^{n+2} + k + (n+1)k^{n+2} - (n+1)k^{n+1}}{k-1} \\ &= \frac{n k^{n+2} - (n+1)k^{n+1} + k}{k-1} \end{aligned}$$

donc $S_n = \frac{n k^{n+2} - (n+1)k^{n+1} + k}{(k-1)^2}$

Pour récurrence:

$n=1$: $S_1 = 1k = \frac{1 \cdot k^3 - (2)k^2 + k}{(k-1)^2} = \frac{k^3 - 2k^2 + k}{(k-1)^2} = \frac{k(k-1)^2}{(k-1)^2} = k$ ok.

Soit vrai pour n . $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)k^{n+1} \stackrel{\text{Rec.}}{=} \frac{n k^{n+2} - (n+1)k^{n+1} + k}{(k-1)^2} + (n+1)k^{n+1} =$$

$$= \frac{n k^{n+2} - (n+1)k^{n+1} + k + (n+1)k^{n+1}(k^2 - 2k + 1)}{(k-1)^2} = \frac{n k^{n+2} - (n+1)k^{n+1} + k + (n+1)k^{n+3} - 2(n+1)k^{n+2} + (n+1)k^{n+1}}{(k-1)^2} =$$

$$= \frac{n \kappa^{n+2} - (n+1) \kappa^{n+1} + \kappa + (n+1) \kappa^{n+3} - 2(n+1) \kappa^{n+2} + (n+1) \kappa^{n+1}}{(n-1)^2}$$

$$= \frac{(n+1) \kappa^{n+3} - (n+2) \kappa^{n+2} + \kappa}{(n-1)^2} \quad \text{ok.}$$

$$\left((P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (Q \wedge \neg P) \right) \vee \left((P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P) \right)$$

P	Q	$P \wedge \neg Q$	$Q \wedge \neg P$	$P \vee \neg Q$	$Q \vee \neg P$	$\mathcal{F}$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V	V