

Exercice 1 Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3x - y \text{ est un nombre pair.}$$

- i) Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- ii) Décrivez les classes d'équivalence des éléments 1 et 2.
- iii) Déterminez l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

Exercice 2 Sur l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ on définit la relation binaire $\preceq$ suivante :

$$x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N}_p$$

où $\mathbb{N}_p = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ est l'ensemble des nombres naturels pairs.

- i) Montrez que $\preceq$ est une relation d'ordre.
- ii) Déterminez, s'ils existent, les éléments maximaux de A . A admet-il un maximum ?
- iii) Déterminez, s'ils existent, les éléments minimaux de A . A admet-il un minimum ?
- iv) L'ordre $\preceq$ est-il total ?
- v) Déterminez, s'ils existent, les majorants du sous-ensemble $B = \{3, 8\}$. B a-t-il une borne supérieure ?
- vi) Déterminez, s'ils existent, les majorants du sous-ensemble $C = \{3, 5\}$. C a-t-il une borne supérieure ?

Exercice 3 On a un jeu de cartes composé de 32 cartes. Une *main* est composée de 5 cartes.

- i) Quel est le nombre total de mains ?
- ii) Combien y a-t-il de mains constituées de 5 piques ?
- iii) Combien y a-t-il de mains constituées de 2 piques et 3 carreaux ?
- iv) Combien y a-t-il de mains contenant exactement un roi ?
- v) Combien y a-t-il de mains contenant au moins un roi ?
- vi) Combien y a-t-il de mains contenant au plus un roi ?
- vii) Combien y a-t-il de mains contenant deux roi et trois piques ? (Attention, un des rois pourrait être le roi de pique).

Exercice 4 Soient n, p des nombres naturels, avec $p \leq n$. Démontrez que

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

par récurrence sur n :

- i) Prouvez le résultat pour $n = 0$.
- ii) Maintenant on suppose le résultat vrai pour n . Prouvez-le pour $n + 1$ (il faut d'abord considérer le cas $p \leq n$ et ensuite le cas $p = n + 1$). (*Indication* : formule de Pascal).
- iii) Concluez.