

Contrôle 2 groupe D4, corrigé

Ex. 3. $n = 32$ cartes, $k = 5$ cartes = 1 main.

i) # mains : choisir 5 cartes parmi 32, donc $\binom{32}{5}$

ii) choisir 5 cartes parmi 8 piques, donc $\binom{8}{5}$

iii) choisir 2 cartes parmi 8 piques et les autres 3 cartes parmi 8 carreaux,
donc $\binom{8}{2} \binom{8}{3}$

iv) je choisis 1 roi parmi 4, et les autres 4 cartes parmi les cartes qui ne sont pas des rois, donc $\binom{4}{1} \binom{28}{4}$

v) # mains qui ne contiennent pas de rois : je choisis 5 cartes non roi, donc $\binom{28}{5}$

mains qui contiennent au moins un roi : le complémentaire, donc $\binom{32}{5} - \binom{28}{5}$

vi) # mains sans rois : $\binom{28}{5}$

mains avec exactement un roi : $\binom{4}{1} \binom{28}{4}$

mains avec au plus un roi : $\binom{28}{5} + \binom{4}{1} \binom{28}{4}$

vii) # mains avec deux rois différents du roi de piques, et 3 piques :

je choisis 2 rois $\neq R \heartsuit$: $\binom{3}{2}$

$$\Rightarrow \# = \binom{3}{2} \binom{7}{3}$$

je choisis 3 piques $\neq$ roi de piques : $\binom{7}{3}$

mains avec : le roi de piques + un autre roi + 2 piques différentes du roi + une carte libre $\neq$ roi et $\neq$ pique.

roi de piques : fixé

un autre roi : $\binom{3}{1}$

$$\Rightarrow \binom{3}{1} \binom{7}{2} \binom{21}{1}$$

2 piques $\neq$ roi : $\binom{7}{2}$

1 carte libre $\neq$ roi $\neq$ pique $\binom{21}{1}$

total : $\binom{3}{2} \binom{7}{3} + \binom{3}{1} \binom{7}{2} \binom{21}{1}$

$21 = 32 - 8 - 3$
 $\nearrow$ piques (avec roi)
 $\searrow$ les autres rois

Ex. 1. $xRy \Leftrightarrow 3x-y$ pair.

i) R équivalence:

R réflexive: $xRx \Leftrightarrow 3x-x$ pair $\Leftrightarrow 2x$ pair vrai OK

R symétrique: si xRy alors $3x-y = 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 3x-2k$

Alors $3y-x = 3(3x-2k)-x = 9x-6k-x = 8x-6k = 2(4x-3k)$,

ce qui montre que $3y-x$ est pair, donc yRx . Ok.

R transitive: si xRy et $yRz \Rightarrow$

$$3x-z = \underbrace{3x-y}_{2k} + y-z = 2k + y-z = 2k + y + \underbrace{2y-z-2y}_{2l} = 2k + 2l - 2y$$

pair

$$= 2(k+l-y)$$

ce qui montre que $3x-z$ est pair, et xRz .

$\Rightarrow$ R équivalence.

ii) $\mathcal{C}(1) = \{y \in \mathbb{Z} \mid 1Ry\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid 3-y \text{ pair}\} =$

$= \{y \in \mathbb{Z} \mid 3-y = 2k, k \in \mathbb{Z}\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = -2k+3, k \in \mathbb{Z}\}$ ce sont tous les entiers impairs. (pourquoi?)

$\mathcal{C}(2) = \{y \in \mathbb{Z} \mid 2Ry\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid 6-y \text{ pair}\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid 6-y = 2k\} =$

$= \{y \in \mathbb{Z} \mid y = -2k+6\}$ ce sont tous les entiers pairs. (pourquoi?)

iii) Puisque $\mathcal{C}(1) = \{\text{impairs}\}$, $\mathcal{C}(2) = \{\text{pairs}\}$, On a $\mathcal{C}(1) \cup \mathcal{C}(2) = \mathbb{Z}$,

donc $\frac{\mathbb{Z}}{R} = \{\mathcal{C}(1), \mathcal{C}(2)\}$.

Ex. 2. $A = \{0, \dots, 10\}$, $x \leq y \Leftrightarrow y-x \in \mathbb{N}_p$.

i) $\leq$ ordre:

$\leq$ réflexive: soit $x \in A$, $x-x = 0 \in \mathbb{N}_p$ donc $x \leq x$.

$\leq$ antisymétrique: si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $y-x$ et $x-y \in \mathbb{N}_p$.

On $x-y = -(y-x)$. Pour que tous les deux soient naturels (positifs) il faut que $x-y = 0$, donc $x = y$.

$\leq$ transitive: si $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow y-x = p_1$ pair et positif,

$z-y = p_2$ pair et positif, alors

$z-x = \underbrace{z-y}_{p_2} + \underbrace{y-x}_{p_1} = p_2 + p_1$ pair (somme de pairs) et positif,
donc $x \leq z \Rightarrow \leq$ ordre.

Ex. 2 (suite) ii) On a

$$1 \leq 3 \leq 5 \leq 7 \leq 9 \quad \text{et} \quad 0 \leq 2 \leq 4 \leq 6 \leq 8 \leq 10$$

les pairs et les impairs ne sont pas comparables, car la différence d'un pair et d'un impair est impaire. Donc:

maximums: 9 et 10, non comparables $\Rightarrow$ A n'a pas de max.

iii) minimums: 1 et 0, non comparables $\Rightarrow$ pas de minimum.

iv) Si il y a des éléments non comparables $\Rightarrow$ $\leq$ non total.

v) majorants de 3: $\{3, 5, 7, 9\}$. majorants de 8: $\{8, 10\}$.

les majorants de B sont les majorants ^{communs} de 3 et 8 $\Rightarrow$ B n'est pas majoré, et il n'a pas de borne sup.

vi) maj de 3: $\{3, 5, 7, 9\}$. Maj de 5: $\{5, 7, 9\}$.

Majors de C = Majors communs = $\{5, 7, 9\}$. $\rightarrow$ cet ensemble a un minimum, nommé 5.

Borne sup = minimum des majorants = 5.

Ex. 4.
$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \quad \forall p \leq n.$$

. Initialisation, si $n=0$ alors $p=0$, donc

$$\sum_{k=0}^0 \binom{k}{p} = \binom{0}{0} = 1 = \binom{0+1}{0+1} = \binom{1}{1} \quad \text{vrai.}$$

. Hérédité: Soit vrai pour n , on le montre pour $n+1$.

Soit $p \leq n+1$, on veut montrer
$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$$

si $p \leq n$ alors on a

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \stackrel{(*)}{=} \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \stackrel{\text{(Pascal)}}{=} \binom{n+2}{p+1}$$

si $p = n+1$ on a

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n+2}{p+1} = \binom{n+2}{n+2} = 1 \quad \text{et c'est vrai dans ce cas aussi.}$$

. Conclusion: donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et P_n est vrai par récurrence pour tout n .