Exercice 1 Sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists\lambda \in \mathbb{Q}, \lambda > 0, \text{ t.q. } y = \lambda x)$$

i) Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
ii) Décrivez les classes d'équivalence des éléments 0 et 1 et -1.
iii) Déterminez l'ensemble quotient $\mathbb{Q}/\mathcal{R}$.

Exercice 2 Soit $\Omega = \{1, 2, 3\}$, et soit A l'ensemble des parties de Ω. On définit sur A la relation binaire $\preceq$ suivante :

$$X \preceq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y.$$

i) Écrivez explicitement A. Quel est le cardinal de A ?
ii) Montrez que $\preceq$ est une relation d'ordre.
iii) Déterminez, s'ils existent, les éléments maximaux de A. A admet-il un maximum ?
iv) Déterminez, s'ils existent, les éléments minimaux de A. A admet-il un minimum ?
v) L'ordre $\preceq$ est-il total ?
vi) Déterminez, s'ils existent, les majorants de l'élément $X = \{1\}$.
vii) Déterminez, s'ils existent, les majorants de $B = \{\{1\}, \{2\}\}$. B a-t-il une borne supérieure ?

Exercice 3 À une soirée entre amis il y a m garçons et n filles.

i) Si chaque personne (indépendamment du sexe) serre la main une et une seule fois à toute autre personne, combien de poignées de main se produisent ?
ii) Si par contre chaque personne fait la bise une et une fois à toute autre personne du sexe opposé seulement, combien de bises se produisent ?
iii) Si à la fête il y a exactement $m+n$ chaises, en combien de configurations différentes les participants à la fête peuvent-ils s'asseoir ?
iv) Si à la fête il y a exactement m chaises noires et n chaises blanches, en combien de configurations différentes les participants à la fête peuvent-ils s'asseoir, sachant que les garçons peuvent s'asseoir seulement sur les chaises noires et les filles seulement sur les chaises blanches ?
v) On organise un bal : seuls peuvent danser des couples (garçon, fille). On suppose $m \leq n$, donc on forme exactement m couples de danseurs. Combien y a-t-il de façons différentes de former ces m couples ? Combien de filles restent sans cavalier ?

Exercice 4 Soient n, p des nombres naturels, avec $p \leq n$. On veut montrer que

$$\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{n+1}{n-p}$$

par récurrence sur n.

i) Prouvez le résultat pour $n = 0$.
ii) Maitenant on suppose le résultat vrai pour n. Prouvez-le pour $n + 1$ (il faut d'abord considérer le cas $p \leq n$ et ensuite le cas $p = n + 1$). (*Indication :* formule de Pascal).
iii) Concluez.