Contrôle 2 groupe E3, corrigé

Ex. 1. i) R équivalence :

R réflexive : $x = 1 \cdot x$, avec $\lambda = 1$ $\Rightarrow$ xRx.

R symétrique : si xRy alors $y = \lambda x$ $\lambda > 0$ $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{\lambda} y$. Avec $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda' > 0$, on a $x = \lambda' y$ donc yRx.

R transitive : si xRy et yRz alors $y = \lambda_1 x$, $z = \lambda_2 y$

$\Rightarrow z = \lambda_2 y = \lambda_2 (\lambda_1 x) = \underset{\underset{0}{\vee}}{(\lambda_2 \lambda_1)} x$ donc xRz. $\Rightarrow$ R équivalence.

ii) $Cl(0) = \{y \in \mathbb{Q} \mid 0 R y\} = \{y \in \mathbb{Q} \mid y = \lambda \cdot 0 = 0\} = \{0\}$. donc $Cl(0) = \{0\}$.

$Cl(1) = \{y \in \mathbb{Q} \mid 1 R y\} = \{y \in \mathbb{Q} \mid y = \lambda \cdot 1,\ \lambda \in \mathbb{Q}_{>0}\} = \mathbb{Q}_{>0}$

$Cl(-1) = \{y \in \mathbb{Q} \mid y = \lambda \cdot (-1),\ \lambda > 0\} = \{y = -\lambda,\ \lambda > 0\} = \mathbb{Q}_{<0}$.

iii) Puisque $\mathbb{Q}_{>0} \cup \mathbb{Q}_{<0} \cup \{0\} = \mathbb{Q}$, il n'y a pas d'autres classes d'équiv.

donc $\mathbb{Q}/R = \{Cl(0), Cl(1), Cl(-1)\}$.

Ex. 2. i) $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. $|A| = 2^3 = 8$

ii) Classique.

iii) maximaux : $\{1,2,3\}$. C'est le max.

iv) minimaux : $\emptyset$. C'est le min.

v) total ? NON, $\{1\}$ et $\{2\}$ ne sont pas comparables.

vi) majorants de $\{1\}$: $\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$.

vii) majorants de $\{2\}$: $\{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

majorants de B = majorants ~~communs~~ de $\{1\}$ et $\{2\}$ donc $C = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}\}$.

C a minimum, nommément $\{1,2\}$, donc $\{1,2\}$ est la borne sup de B.

Ex. 3. i) on choisit 2 personnes parmi $m+n$, donc $\binom{m+n}{2}$.

ii) # bises ~~en~~ choisir 1 garçon et 1 fille, donc $\binom{m}{1}\binom{n}{1} = mn$.

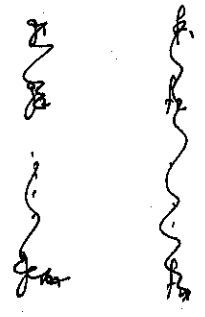
iii) permutations de $m+n$ éléments, donc $(m+n)!$

iv) les m garçon peuvent se disposer en $m!$ façons différentes, les filles $n!$.

$\#$ configurations $= m!\, n!$.

v) je choisis m filles qui dansent parmi n, donc $\binom{n}{m}$ choix.

pour former les couples, j'attribue à chaque garçon une fille



$$g_1 \longmapsto f_1$$
$$\vdots \quad \cdots$$
$$g_m \longmapsto f_m$$

$m!$ permutation des filles donc

$$\binom{n}{m} m! = \frac{n!}{(n-m)!} .$$

(On peut raisonner directement ~~sur~~ les <u>arrangements</u>, et dire que $\#$ couples $= \frac{n!}{(n-m)!}$).

En tout cas, ~~i~~ c'est clair que $n-m$ filles restent sans cavalier.

<u>Ex. 4.</u> $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{n+1}{n-p}$. $p \leq n$.

<u>Initialisation:</u> ~~p~~ $n=0$, donc $p=0$:

$$\sum_{i=0}^{0} \binom{i}{0} = \binom{0}{0} = 1 = \binom{1}{0} = 1 \quad \text{ok.}$$

<u>Hérédité.</u> Soit vrai pour n. On veut montrer: $\displaystyle\sum_{i=p}^{n+1} \binom{i}{p} = \binom{n+2}{n+1-p}$

Soit donc $p \leq n+1$

si $p \leq n$ alors $\displaystyle\sum_{i=p}^{n+1} \binom{i}{p} = \sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} + \binom{n+1}{p} \overset{(\mathcal{R})}{=} \binom{n+1}{n-p} + \binom{n+1}{p} =$

$$= \underbrace{\binom{n+1}{p+1}}_{\text{(symétrie)}} + \binom{n+1}{p} \underset{\text{(Pascal)}}{=} \binom{n+2}{p+1} \underset{\text{(symétrie)}}{=} \binom{n+2}{n+2-(p+1)} = \binom{n+2}{n-p+1} \quad \text{ok.}$$

si $p = n+1$: $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{n+1} \binom{i}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n+2}{n+1-(n+1)} = \binom{n+2}{0} = 1$

et c'est vrai également.

<u>Conclusion</u>: Puisque $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, on peut conclure que P_n est vraie

pour tout $n \geq 0$, $p \leq n$.