Exercices sur les dénombrements

Ex. 3.1. $\text{Card}(E\cup F\cup G) = \text{Card}((E\cup F)\cup G) =$

$= \text{Card}((E\cup F)) + \text{Card}\, G - \text{Card}((E\cup F)\cap G)$

$= \text{Card}(E) + \text{Card}\, F - \text{Card}(E\cap F) + \text{Card}\, G - \text{Card}((E\cap G)\cup(F\cap G))$

$= \text{Card}\, E + \text{Card}\, F + \text{Card}\, G - \text{Card}(E\cap F) - \text{Card}(E\cap G) - \text{Card}(F\cap G) + \text{Card}(E\cap F\cap G).$

Ex. 3.3. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \{1,2,\dots,n\}$.

$\mathcal{P}(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\}$, card $= 2 = 2^1$

$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ Card $= 4 = 2^2$

etc. $\text{Card}(\mathcal{P}(E_n)) = 2^n$. Par récurrence : pour $n=1$ ok.

Soit vrai pour n: $E_{n+1} = \{1,2,\dots,n+1\}$.

$\mathcal{P}(E_{n+1}) = \{A \in E_{n+1} \mid n+1 \in A\} \mathbin{\mathring{\cup}} \{A\subseteq E_{n+1} \mid n+1\notin A\}$

$= \{\{n+1\}\cup B,\ B\subseteq E_n\} \mathbin{\mathring{\cup}} \{A\subseteq E_n\}$

donc $|\mathcal{P}(E_{n+1})| = |\mathcal{P}(E_n)| + |\mathcal{P}(E_n)| \overset{\text{Réc.}}{=} 2^n + 2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$ ok.

Ex. 3.4. . $\forall A$ $|B|, |A| \neq 0$. Alors $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Par réc. sur le nombre d'éléments de A:

$|A| = 1$: $A = \{a\}$: $f: A \to B$, $a \mapsto f(a)$. f est déterminée par le choix de $f(a)$. pour $f(a)$ ~~peut~~ on a $|B|$ choix possibles

donc $|B^A| = |B| = |B|^1$ ok.

Soit vrai pour n, et supposons $|A| = n+1$. Alors $A = \{a_1,\dots,a_n,a_{n+1}\} = \underbrace{\{a_1,\dots,a_n\}}_{A_1} \cup \underbrace{\{a_{n+1}\}}_{A_2}$.

$f: A\to B$ déterminée si on connait $f_{|A_1}$ et $f_{|A_2}$. Pour $f_{|}$

$|B^{A_1}| = |B|^n$ donc pour $f_{|A_1}$ j'ai ~~ne pas~~ $|B|^n$ possibilités. (par récurrence).

~~pour~~ $|B^{A_2}| = |B|$ car $|A_2| = 1$.

Donc pour f on a $|B|^n \cdot |B|$ possibilités, donc $|B^A| = |B|^{n+1}$ ok.

2. $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. (Classique : $B \subseteq A$ ~~Ass~~ $1_B : A \to \{0,1\}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\notin B \\ 1 & \text{si } x\in B\end{cases}$)

donc $|\mathcal{P}(A)| = |\{0,1\}^A| = |\{0,1\}|^{|A|} = 2^{|A|}$.

Ex. 3.2.

Soit $P=\{p_1,\dots,p_n\}$ l'ensemble des n pays.

Soit $v : P \longrightarrow \mathbb{N}$

$p \longmapsto (\#\{\text{voisins de } p\})$.

On sait que : $v(p)\geq 1$ (au moins un voisin), $v(p)\leq n-1$ (au plus tous les pays différents de p sont voisins de p).

donc en ~~eff~~ fait on a : $v : P \longrightarrow \{1,2,\dots,n-1\}$

P : n elmts ; $\{1,2,\dots,n-1\}$: $n-1$ elmts.

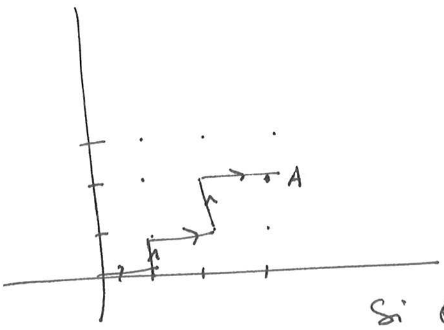
$\Rightarrow$ (principe des tiroirs) v non injective $\Rightarrow$ $\exists\, p_1\neq p_2$ t. q. $v(p_1)=v(p_2)$.

Ex. 3.5. POIRE : lettres distinctes $\Rightarrow$ $5!$ anag.

ANANAS : $\dfrac{6!}{2!\;3!} = \dfrac{6\cdot5\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 60.$

ANAGRAMME : $\dfrac{9!}{3!\;2!}$

Ex. 3.6.



on appelle D un déplacement (d'un pas) à droite et H un déplacement en haut.

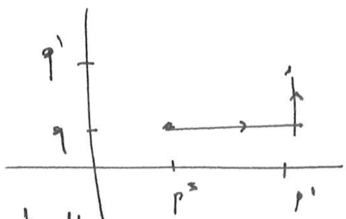
p. ex. le chemin en figure est DHDHD

pour aller ~~de~~ de $(0,0)$ à $(3,2)$ il faut faire 3 pas à dte et 2 en haut, donc 3 D et un H.

Si on identifie un chemin à un mot avec 3 D et 2 H, le nombre total de chemins est le nombre d'anagrammes de DDDHH, qui est

$\dfrac{(3+2)!}{3!\cdot 2!} = 10$, en effet on a

DDDHH	HDDDH
DHDHD	DDHHD
HDDHD	DHHDD
HHDDD	HDHDD
DDHDH	DHDDH



de (p,q) à (p',q'), $p\leq p'$ et $q\leq q'$

on doit faire $p'-p$ D et $q'-q$ déplacements H,

donc $\#$ chemins $= \dfrac{[(p'-p)+(q'-q)]!}{(p'-p)!\cdot(q'-q)!}$

~~# chemins de O à N~~

$\#$ chemins de O à N en passant par M :

$= (\#\text{ chemins de } O \text{ à } M)\cdot(\#\text{ chemins de } M \text{ à } N)$.

Ex. 3.7. 16 rouges + 16 noires = 32 cartes

nombre total de mains $\binom{32}{8}$.

une rouge et sept noires: $16 \cdot \binom{16}{7}$

deux rouges et six noires $\binom{16}{2} \cdot \binom{16}{6}$ etc.

Ex. 3.8. total mains : $\binom{32}{5}$

cinq trèfles: $\binom{8}{5}$

même couleur : $\underbrace{\binom{8}{5}}_{\text{cinq trèfles}} + \underbrace{\binom{8}{5}}_{\text{cinq coeurs}} + \binom{8}{5} + \binom{8}{5} = 4 \cdot \binom{8}{5}$.

...

pas ttes la même couleur : $\binom{32}{5} - 4 \cdot \binom{8}{5}$

trois trèfle deux piques $\binom{8}{3} \cdot \binom{8}{2}$

trois d'une même couleur, deux d'une autre : $\binom{4}{2}\binom{8}{3}\binom{8}{2} + \binom{4}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{3}$

je choisis 2 couleurs

3 d'une couleur

2 de l'autre

2 des premier

3 de l'autre

$= 2\binom{4}{2}\binom{8}{3}\binom{8}{2} = 2 \cdot \frac{\cancel{4}^{2} \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}}\binom{8}{3}\binom{8}{2} = 12\binom{8}{3}\binom{8}{2}$.

façons de classer une main donnée : soit on entend:

5 cartes
- 5 d'une même couleur
- 4 d'une couleur, une d'une autre etc
- ...

et on peut avoir

$5+0+0+0$ = 5 de même couleur

$4+1+0+0$

$3+2+0+0$

6 possibilités.

$3+1+1+0$

$2+2+1+0$

$2+1+1+1$ = 2 d'une couleur, et les autres to de 3 couleurs distinctes

soit on entend:

5 cartes
- 5 ♣
- 4 ♣ 1 ♠

etc.

alors c'est comme 5 boules en 4 tiroirs ♣ ♠ ♦ ♥

$\Rightarrow \binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$ possibilités.

Ex. 3.9. N_1 femmes, N_2 hommes

a) $N = N_1 + N_2$

b) échantillons de taille n: $\binom{N}{n}$

4 si E est un échantillon de P de card n, alors $P \setminus E$ a card $N-n$.

$$\binom{N}{n} = \binom{N}{N-n}.$$

d) femmes seulement $\binom{N_1}{n}$ hommes seulement $\binom{N_2}{n}$

même sexe $\binom{N_1}{n} + \binom{N_2}{n}$.

d) total : $\binom{N_1+N_2}{n}$; seulement femmes $\binom{N_1}{n}$ $\Rightarrow$ au moins un homme

$$\binom{N_1+N_2}{n} - \binom{N_1}{n}.$$

e) $\binom{N_1}{k} \cdot \binom{N_2}{n-k}$ $\longrightarrow$ je choisis $n-k$ hommes.
$\hookrightarrow$ je choisis k femmes

f) $n!$ ordonnements.

Ex. 3.10. combien de choix pour la première initiale ? 26
" " 2ème initiale ? 26.

Combien de couples possibles ? $26 \cdot 26 = 676$.

Donc si on a au moins 677 personnes, deux au moins ont les mêmes initiales (principe des tiroirs).

Ex. 3.11. simplement $\binom{15}{5} = \cancel{15C14} \cdot \binom{15}{10} = \dfrac{\overset{3}{\cancel{15}} \cdot \overset{7}{\cancel{14}} \cdot 13 \cdot \overset{3}{\cancel{12}} \cdot 11}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = \ldots$

Ex. 3.12. $E = \{a, b, \ldots, l\}$

a) A contient a, b et A a 5 élmts : il faut choisir 3 élmts parmi $\{c, \ldots, l\}$, donc $\binom{10}{3}$

b) A contient a, donc il faut choisir 4 élmts, parmi $\{c, \ldots, l\}$ car $A \not\ni b$, donc $\binom{10}{4}$

c) comme b), $\binom{10}{4}$.

d) il faut choisir 5 élmts parmi $\{c, d, \ldots, l\}$, donc $\binom{10}{5}$

2.) Comme a), b), c), d) sont toutes et seules les possibilités pour A, on a (total) $\binom{12}{5} = \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5}$. généralisation facile.