Ex. 3.13. (Combinaisons avec répétition)

Feuille 5

1). $n$ boules, $p$ tiroirs $\rightsquigarrow$ $n$ boules, $p-1$ bâtons   1 0 0 1 0   1 1 0 0 0 $\longrightarrow$ $\dfrac{(n+p-1)!}{n!\,(p-1)!} = \binom{n+p-1}{n} = \binom{n+p-1}{p-1}$.

2). C'est le même problème, en pensant "combien de fois je donne une boule unité à $x_1$, ~~exercice~~ et je dois distribuer $n$ boules unité") $\longrightarrow$ $\binom{n+p-1}{n} = \binom{n+p-1}{p-1}$

Ex. 3.14. $E \neq \emptyset$ fini. $a_0 \in E$.

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$
$$A \longmapsto \begin{cases} A \cup \{a_0\} & \text{si } a_0 \notin A \\ A \setminus \{a_0\} & \text{si } a_0 \in A \end{cases}$$

1. Si Card $A$ pair alors Card $f(A)$ = Card $A \pm 1$ (j'ajoute ou j'enlève $a_0$) donc Card $f(A)$ impair, et impair $\Rightarrow$ pair.

2. Si $a_0 \in A$ $\Rightarrow$ $f \circ f(A) = f\circ(A \cup \{a_0\}) = A$ etc.

3. $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ inversible, $f^{-1} = f$ $\Rightarrow$ $f$ bijective.

4. Soient $B_1 = \{A \in \mathcal{P}(E) : |A| \text{ pair}\}$ $B_2 = \{A \in \mathcal{P}(E) : |A| \text{ impair}\}$.

$B_1 \mathring{\cup} B_2 = \mathcal{P}(E)$, ~~$B_0$~~. $f_{|B_1} : B_1 \longrightarrow f(B_1)$ est une bijection

or, $f(B_1) \subseteq B_2$ par le pt. 1, et si $A \in B_2$, ~~$f(f(A))$~~ $A = f(f(A))$, $f(A) \in B_1$ en particulier $A \in f(B_1)$. Donc $f(B_1) = B_2$.

$f_{|B_1} : B_1 \longrightarrow B_2$ bijection, donc Card $(B_1)$ = Card $(B_2)$, qui est la thèse.

Ex. 3.15. $E$, $|E| = n$.

1) $0 \leq p \leq n$. # parties de $E$ : $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.

$X \subseteq E$, $|X| = p$. ~~Sh~~ # parties de $E$ disjointes de $X$ : $= \#$ parties de $E \setminus X$. $E\setminus X$ a $n-p$ élmts. $|\mathcal{P}(E \setminus X)| = 2^{n-p}$.

2) ~~[illegible]~~ Soit $p$, $0 \leq p \leq n$ $\underset{\text{disjoints}}{(X, Y)} \longleftrightarrow$

je choisis une partie $X$ à $p$ elements de $E$ : $\binom{n}{p}$ choix.

je choisis une partie $Y$ disjointe de $X$ : $2^{n-p}$

si $p$ varie entre $0$ et $n$, on a $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{n-p} 1^p = (2+1)^n = 3^n$.

Ex. 3.15. suite

$\forall$ $X, Y$ avec $X \subset Y$ :

pour $Y$ : je fixe $p$, $0 \leq p \leq n$, je choisis une partie de $E$ à $p$ élmts : $\binom{n}{p}$ choix pour $Y$.

pour $X$ : nombre de parties de $Y$ : $2^p$

donc total : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p \, 1^{n-p} = (2+1)^n = 3^n$.

Ex. 3.16. 1) $A \subset E$, $|E| = n$, $|A| = p$.

parties $X$ de $E$ contenant $A$ : je ~~fixe choisis~~ fixe $k$, $0 \leq k \leq n-p$.

partie $X$ $\longleftrightarrow$ je choisis $k$ élmts en $E \setminus A$, $\binom{n-p}{k}$ choix, et je les ajoute à $A$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} = (1+1)^{n-p} = 2^{n-p}$ = sous-ensembles de $E \setminus A$.

2) $p \leq m \leq n$ parties de $E$ à $m$ élmts contenant $A$ : déjà fait, $\binom{n-p}{m-p}$

je choisis $m-p$ élmts en $E \setminus A$ et je les ajoute à $A$.

3) $(X, Y)$ t.q. $X \cap Y = A$. $\Longleftrightarrow$ $(X \setminus A) \cap (Y \setminus A) = \emptyset$

je cherche ~~deux~~ les couples d'ensembles de $E \setminus A$ disjoints, et je leur ajoute $A$, j'obtiens un couple $(X, Y)$ demandé.

fait en ex. 3.15 : $3^{n-p}$

Ex. 3.17