Ex. 1.13. Si 0 racine, ~~alors~~ $0^4 + 12 \cdot 0 - 1 = 0$ donc $-1 = 0$ absurde.

Ex. 1.14. si $m \in \mathbb{Z}$ est racine $m^4 - 3m^3 + m^2 - m + \sqrt{2} = 0$ ~~donc~~

$\sqrt{2} = -(m^4 - 3m^3 + m^2 - m)$ donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ $\lightning$.

Ex. 1.15. si n était pair ~~car~~ on aurait $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

donc $n^2 = 4k^2 \in 2\mathbb{Z}$ pair. (Contraposée.)

(Par absurde : Si n était pair $\Rightarrow$ $n+1$ impair $\Rightarrow$ $(n+1)^2$ impair $\Rightarrow$ $n+1$ pair $\lightning$.

on suppose démontré n impair $\Rightarrow n^2$ impair)

Ex. 1.16. Principe des tiroirs : si c'était faux, pour chaque paire de chaussettes ~~tiroirs~~ j'aurais un tiroir à disposition, donc $n°$ de tiroirs $\geq n+1$. (Contraposée).

Ex. 1.17. $n \geq 1$ $\quad 0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$

$\exists\, i,\ 1 \leq i \leq n$ t.q. $x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}$ $\quad$ (si $\exists\, i < j$ t.q. $x_j - x_i \leq \frac{1}{n}$ alors $x_j - x_{j-1} \leq \frac{1}{n}$)

négation : $\forall\, i,\ 1 \leq i \leq n,\ x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}$

on aurait $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) > n \cdot \frac{1}{n} = 1$ mais $\sum (x_i - x_{i-1}) = 1$. $\lightning$.

Ex. 1.18. 1. Si A menteuse $\Rightarrow$ sa phrase est vraie $\Rightarrow$ A a dit la vérité donc A n'est pas menteuse $\lightning$. Donc A sincère.

A n'est pas menteuse, et A est sincère.

B est menteur car la phrase de A est vraie, et A est sincère.

2. C menteuse $\Rightarrow$ sa phrase est vraie $\Rightarrow$ C pas menteuse $\lightning$.

Donc elle est sincère. Donc pour que sa phrase soit vraie, D doit être sincère.

3. si G était sincère $\Rightarrow$ son affirmation est vraie $\Rightarrow$ en particulier G menteur $\lightning$.

Donc G menteur.

si Π menteur ~~sincère~~ $\Rightarrow$ son affirmation est fausse

- soit aucun sincère $\Rightarrow$ 3 menteurs $\Rightarrow$ G dit la vérité $\Rightarrow$ G sincère $\lightning$
- soit 2 sincères $\Rightarrow$ ils sont forcément Π et B car G menteur $\Rightarrow$ Π sincère $\lightning$
- soit 3 sincères NON car G menteur.

donc Π sincère. Par exclusion, B est menteur car il y a un seul sincère et c'est Π.

<u>Ex. 1.19.</u> si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad p,q \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad q\sqrt{2} = p \quad \Rightarrow \quad 2q^2 = p^2$

si $(q,p) > 1$, soit $(q,p) = d$ alors $q = dq'$, $p = dp'$

$2d^2 q'^2 = d^2 p'^2 \quad \Rightarrow \quad 2(q')^2 = (p')^2$ et $(q',p') = 1$.

$p^2 = 2q^2$ pair $\Rightarrow$ p pair. (déjà vu : si $p = 2k+1 \Rightarrow p^2 = 4k^2+4k+1$ impair)

Alors $p = 2r$

$\Rightarrow \quad 4r^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 2r^2 = q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2$ pair $\Rightarrow$ q pair (même raison).

$\Rightarrow \quad 2 | p \,,\; 2 | q$ mais on a supposé $(p,q) = 1$. $\lightning$.