1.4. Raisonnement par la contraposée

Ex. 1.20.

1) et 2) : pour les ~~cas~~ réciproques, il suffit d'écrire $\Leftarrow$ à la place de $\Rightarrow$ et d'échanger l'ordre des proposition.

contraposées : $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$

$f(x) \neq 0 \Rightarrow \exists\, \epsilon > 0, \quad |f(x)| \geq \epsilon$

Ex. 1.21.

n pair $\Rightarrow n^2$ pair. En effet :

n pair $\Rightarrow n = 2k, \; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow n^2$ pair.

Ex. 1.22.

$8 \nmid (n^2-1) \Rightarrow n \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ $\qquad \underline{n \in \mathbb{N}^*}$

contraposée : $n \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}+1 \Rightarrow 8 \mid (n^2-1)$

n impair $\Rightarrow n = 4k + r$ $\quad k$ quotient, r reste $\Rightarrow r \in \{1, 3\}$.

$$n^2 - 1 = 16k^2 + 8kr + r^2 - 1 = \begin{cases} 16k^2 + 8k \cdot 1 + 1 - 1 = \dfrac{16k^2 + 8k}{8} & \text{si } r = 1 \\[2ex] 16k^2 + 24k + 9 - 1 = \dfrac{16k^2 + 24k + 8}{8} & \text{si } r = 3 \end{cases}$$

dans les deux cas, $8 \mid n^2 - 1$.

Donc la contraposée est vraie, et l'implic. directe aussi.

Ex. 1.23.

$x \in \mathbb{R}$.

$(x < 0 \Rightarrow x < x^2)$ contraposée : $x \geq x^2 \Rightarrow x \geq 0$.

$P(x)$ vraie car $x < 0 \Rightarrow x^2 \geq 0$ donc $x < 0 \leq x^2 \Rightarrow x \leq x^2$.

Par conséquent $Q(x)$, qui est la contrap. de $P(x)$, est aussi vraie.