## 1.5. Raisonnement par récurrence

**Ex. 1.24.** $\forall n \geq 15, \quad \dfrac{3^n}{n!} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{6^n}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6^n \leq n!$$

pour $n = 15$ : avec un calculateur.

par hp. de réc.

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ : $\quad 6^{n+1} = 6^n \cdot 6 \leq n! \cdot 6 \leq n! \cdot (n+1) = (n+1)!$

$\Rightarrow$ ok.

**Ex. 1.25.** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$ :

pour $n = 1$ : $\quad 2^0 = 1 \leq 1! = 1 \leq 1^1$ ok.

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ : $\quad 2^n = 2^{n-1} \cdot 2 \underset{\text{réc.}}{\leq} n! \cdot 2 \leq n!\,(n+1) = (n+1)!$ ok.

$n \geq 2$

et $(n+1)! = (n+1)\, n! \leq (n+1)\, n^n \leq (n+1)\,(n+1)^n = (n+1)^{n+1}$ ok.

$\Rightarrow$ Ok.

**Ex. 1.26.** $P(n)$ : $2^n > n^2$

$n = 0$ : $1 > 0$ ok

$n = 1$ : $2 > 1$ ok

$n = 2$ : $4 > 2$ FAUX

$n = 3$ : $8 > 9$ FAUX $\quad n = 4$ : $16 > 16$ FAUX

Pourtant, $\quad n = 5 \quad 32 > 25$ ok.

pour $n \geq 3$ : $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie :

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \underset{\text{réc.}}{>} \underbrace{n^2 \cdot 2 > (n+1)^2}$$

$$2n^2 > n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 > 2n+1 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 > 0$$

$n = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$ donc pour $\underbrace{n > 1+\sqrt{2}}_{2.41\ldots}$ (ou $n < 1-\sqrt{2}$)

en particulier pour $n \geq 3$ ok.

Mais il faut que le pas de base soit vrai, donc à partir de 5.

donc $P(n)$ vraie pour $n \geq 5$ et pour $n = 0, 1$.

Ex. 1.27. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$

$n=1$ : $2! \geq 1! + 2! = 1 + \cancel{\ldots}$ ok.

Réc. : $(n+2)! = (n+2)(n+1)! \overset{(R)}{\geq} (n+2) \sum_{k=1}^{n} k! \overset{?}{\geq} \sum_{k=1}^{n+1} k! = \left( \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)! \right)$

$= \sum_{k=1}^{n+1} k\,(k-1)!$ $\qquad k-1 = j$

$= \sum_{j=0}^{n} (j+1)\, j!$ donc il faut prouver $(n+2) \sum_{k=1}^{n} k! \geq \sum_{j=0}^{n} (j+1)\, j!$

$\qquad\qquad \parallel$

$(n+1+1) \sum_{k=1}^{n} k!$

$\qquad\qquad \parallel$

$(n+1) \sum_{k=1}^{n} k! + \sum_{k=1}^{n} k!$

$\sum_{k=1}^{n} (n+1) k! + \sum_{k=1}^{n} k! \geq \sum_{j=0}^{n} (j+1)\, j! = \sum_{j=1}^{n} (j+1)\, j! + 1$ ok. terme à terme.

$(1+x)^n \geq 1 + nx$ :

$n=0$ : $1 \geq 1$ ok $\qquad n=1$ : $1+x \geq 1+x$ ok.

Réc. $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \overset{R}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + nx^2$

$= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$.

Ex. 1.28. $a_n = \frac{(n+1)n}{2}$. $\quad a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k + n+1 \overset{R}{=} \frac{(n+1)n}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} =$

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ ok.

$b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{R}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$

$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\left[2n^2+n+6n+6\right]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} =$

$= \frac{\cancel{(n+1)(n+2)}\,(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$ ok.

$c_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ : $\quad c_1 = 1 = a_1^2 \qquad c_2 = 1+8=9 = (1+2)^2 = a_2^2$ ok.

$c_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{R}{=} a_n^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} =$

$= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4(n+1)\right)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = a_{n+1}^2$ ok.

Ex. 1.29. mardi 12 h

$$x^n - y^n = (x-y)\left(y^{n-1} + xy^{n-2} + \dots + x^{n-2}y + x^{n-1}\right)$$

calcul direct

$$= (x-y)\,x^{n-1} + (x-y)\,x^{n-2}y + \dots + (x-y)\,xy^{n-2} + (x-y)(y^{n-1})$$

$$= x^n \cancel{- yx^{n-1}} \cancel{+ yx^{n-1}} \cancel{- y^2x^{n-2}} + \dots \cancel{+ x^2y^{n-2}} \cancel{- xy^{n-1}} \cancel{+ xy^{n-1}} - y^n \quad \text{ok.}$$

par réc. $n=1$ : $x-y = (x-y)(x^0y^0) = x-y$ ok.

Rec. $x^{n+1} - y^{n+1} = (x^n - y^n)\,y + (x-y)\,x^n$

$$\overset{R}{=} (x-y)\sum_{k=0}^{n-1}\left(x^k y^{n-1-k}\right)\cdot y + (x-y)\,x^n$$

$$= (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} + x^n\right)$$

$$= (x-y)\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \quad \text{ok.}$$

Ex. 1.30. $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$$

$-1 + 2 - 3 + 4 - \dots + (-1)^n n$

$n=1$ : $-1 = \dfrac{(-1)\cdot(3)-1}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1$ ok.

Réc. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1)$

$$\overset{R}{=} \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}(-2n-1) - 1 + 4(-1)^{n+1}(n+1)}{4} = \frac{(-1)^{n+1}\overbrace{(2n+3)}^{2(n+1)+1} - 1}{4} \quad \text{ok.}$$

Ex. 1.31. i) $1 = 1$ ok. $\quad 1 + 3 = 4 = 2^2$ ok.

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \qquad \text{Rec.} \quad \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2(n+1) - 1 =$$

$\overset{R}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ ok.

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (4k^2 - 4k + 1) = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 =$ (sans réc.)

$$= \frac{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}\,3} - \frac{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{n(n+1)}{\cancel{2}\,1} + n = \frac{2n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + 3n}{3} = \dots = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 2n^4 - n^2 . \qquad n=1 \quad 1 = 2-1 \quad \text{ok}.$$

<u>Réc.</u> $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 + \left(2(n+1)-1\right)^3 \overset{R}{=} 2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 =$

$= 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 .$

de l'autre côté,

$2(n+1)^4 - (n+1)^2 = (n+1)^2\left(2(n+1)^2 - 1\right) = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1) = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1) =$

$= 2n^4 + 4n^3 + n^2 + 4n^3 + 8n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 1 = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 .$ ok.

<u>Ex. 1.32.</u> $u_0 = 1 \qquad u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & n \text{ pair} \\ u_{n+1} & \text{sinon.} \end{cases} \qquad u_n = \begin{cases} \frac{2^{k+1}-1}{2^k} & k = \frac{n}{2}, \ n \text{ pair} \\ \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} & k = \frac{n-1}{2} \quad n \text{ impair} \end{cases}$

$n = 0 : \quad u_0 = 1 = \frac{2^1 - 1}{2^0} = \frac{2-1}{1} = 1$ ok.

$n = 1 : \quad u_1 = u_0 + 1 = \frac{u_0}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2^1 - 1}{2} = \frac{1}{2}$ ok.

<u>Réc.</u> $n$ pair $\Rightarrow$ $n+1$ impair :

$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \overset{R}{=} \frac{2^{\frac{n}{2}+1} - 1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot 2} = \frac{2^{\frac{n}{2}+1} - 1}{2^{\frac{n+2}{2}}}$ ok, car ici $k = \frac{(n+1)-1}{2} = \frac{n}{2}$

$n$ impair $\Rightarrow$ $n+1$ pair :

$u_{n+1} = u_n + 1 \overset{R}{=} \frac{2^{\frac{n-1}{2}+1} - 1}{2^{\frac{n-1}{2}+1}} + 1 = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} - 1 + 2^{\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}+1}} = \frac{2^{\frac{n+3}{2}} - 1}{2^{\frac{n+1}{2}}}$ ok, car ici $k = \frac{n+1}{2}$

<u>Ex. 1.33.</u> $u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$

$n=1 : \quad u_1 = u_0 = 1 = 2^{1-1}$ ok.

$n=2 \quad u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 1 = 2 = 2^{2-1}$ ok.

<u>Réc.</u> $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n \overset{R}{=} u_n + u_n \overset{R}{=} 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ ok.

<u>Ex. 1.34.</u> quand on fait rentrer P et sortir F, il y a n personnes qui sont toutes des filles, sauf au plus P. Or, si $n=2$, et $\boxed{F \mid G}$, si on fait sortir F on a $\boxed{G}$, et on ne peut appliquer la récurrence. C'est pourquoi la thèse est fausse (évidemment) déjà pour $n=2$.

Ex. 1.35.

$P_n \Rightarrow P_{n+1}$ : ~~9~~ $10^{n+1} - 1 = 10^n(9+1) - 1 = \underset{9}{\underline{9 \cdot 10^n}} + \underset{9}{\underline{10^n - 1}} \Rightarrow 9 \mid \cdots$ ok.

$Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$ : $10^{n+1} + 1 = 10^n(9+1) + 1 = \underset{9}{\underline{9 \cdot 10^n}} + \underset{\cancel{9}}{\underline{10^n + 1}} \Rightarrow 9 \mid \cdots$ ok.

Mais ~~Qn~~ $P_n$ vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $n = 0 \Rightarrow 10^n - 1 = 0$ $\quad 9 \mid 0$

$$10^n - 1 = \underbrace{99\cdots9}_{n} = (11\cdots1)\cdot 9$$

$Q_n$ fausse ex. $10^1 + 1 = 11$ $\quad 9 \nmid 11$. (en gén. $9 \nmid 10^n + 1 = (10^n - 1) + 2$).