2.1. Ensembles

Feuille 1.

Ex 2.1. $A = \{2, 3, 4, 5\}$ $\quad B = \{4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{4, 5\}$ $\quad A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad C_{\mathbb{N}} A = \{0, 1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 6\}$

$C_{\mathbb{N}} B = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 7\}$ $\quad C_{\mathbb{R}} A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2, 3, 4, 5\}$

$\quad =]-\infty, 2[\cup]2, 3[\cup]3, 4[\cup]4, 5[\cup]5, +\infty[$

$C_{A \cup B} A = \{6\}$.

$I = [1, 3]$ $\quad J = [2, 4]$ $\quad I \cap J = [2, 3]$ $\quad I \cup J = [1, 4]$ $\quad C_{\mathbb{R}} I =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$

$C_{\mathbb{R}} J =]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$. $\quad C_{\mathbb{R}}(I \cup J) =]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$.

Ex. 2.2. $A = \{0, 1, 2, 3\}$

$(F \setminus G) \cup G = F$: p. ex. $F = \{0, 1, 2, 3\}$, $G = \{0\}$.

$(F' \setminus G') \cup G' \neq F'$: p. ex. $F' = \{0, 1\}$ $\quad G' = \{2\}$

$(F \setminus G) \cup G = F \iff G \subseteq F$. En effet :

$(\Rightarrow)$: si $G \not\subseteq F \Rightarrow \exists x \in G, x \notin F$. Alors $x \in (F \setminus G) \cup G$ donc $(F \setminus G) \cup G \neq F$.

$(\Leftarrow)$: si $G \subseteq F \Rightarrow ((F \setminus G) \cup G) \subseteq F$ et si $x \in F$, soit $x \in G$, soit $x \in F \setminus G$

donc $x \in (F \setminus G) \cup G \supseteq F$, d'où $=$.

Ex. 2.3. $A \subset B \Rightarrow C_E B \subset C_E A$. En effet : si $x \in E$,

soit $x \in C_E B \Rightarrow x \in E, x \notin B$. Alors $x \notin A$ (car si $x \in A \Rightarrow x \in B$), et

donc $x \in C_E A$.

Ex. 2.4. $(A \cup B) \subset (A \cup C)$ et $(A \cap B) \subset (A \cap C) \Rightarrow B \subset C$. En effet :

soit $x \in B$: si $x \in A$, alors $x \in A \cap B \subset A \cap C \Rightarrow x \in C$ ok ;

si $x \notin A$, alors $x \in (A \cup B) \subset (A \cup C)$, donc $x \in A \cup C$ mais $x \notin A$ donc $x \in C$.

En tout cas, $x \in C$.

Ex. 2.5. $F \subset G \iff F \cup G = G \iff (C_E F) \cup G = E$. En effet :

$(i) \iff (ii)$, $\quad i) \Rightarrow ii)$ ok. $\quad ii) \Rightarrow i)$ si $F \not\subset G$ il existe $x \in F, x \notin G$ donc $\underbrace{F \cup G}_{\ni x} \neq G$.

$(i) \iff (iii)$ ~~Soit~~ : $i) \Rightarrow iii)$: $G \supset F \Rightarrow (C_E F) \cup G \supset (C_E F) \cup F = E$.

$iii) \Rightarrow$ ~~ii)~~ $i)$: si $F \not\subset G$, soit $x \in F \setminus G$. Alors $x \in E$, $x \notin G$, $x \notin (C_E F)$ donc

$(C_E F) \cup G \subsetneq E$.

Ex. 2.6. $A\cup B\cup C = (A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)\cup(A\cap B\cap C)$.

($\supseteq$) : trivial.

($\subseteq$) : soit $x\in A\cup B\cup C$.

- $x\in A$
  - $x\in A\setminus B$ ok.
  - $x\in A\cap B$
    - $x\in B\setminus C$ ok.
    - $x\in A\cap B\cap C$ ok.
- $x\notin A$
  - $x\in B$
    - $x\in B\setminus C$ ok.
    - $x\in B,\ x\in C,\ x\notin A \Rightarrow x\in C\setminus A$ ok.
  - $x\notin B$ — $x\in C,\ x\notin A \Rightarrow x\in C\setminus A$.

Ex. 2.7. $C_E\big((C_E A_1)\cup(C_E A_2\cap C_E A_3)\big) = \cancel{A}\,(A_1)\cap C_E(C_E A_2\cap C_E A_3)$

$= A_1\cap(A_2\cup A_3)$.

$(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap C_E A_2) = \big((A_1\cap A_2)\cup A_1\big)\cap\big((A_1\cap A_2)\cup C_E A_2\big)$

$= A_1\cap\big((A_1\cap A_2)\cup C_E A_2\big) = A_1\cap\big((A_1\cup C_E A_2)\cap\underbrace{(A_2\cup C_E A_2)}_{=E}\big)$

$= (A_1\cap A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap C_E A_2)$

$= (A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap C_E A_2)$ ~~ok~~.

$= A_1\cap\big((A_1\cup C_E A_2)\cap E\big)$

$= A_1\cap(A_1\cup C_E A_2)$

$= (A_1\cap A_1)\cup(A_1\cap C_E A_2)$

$= A_1\cup(A_1\cap C_E A_2)$

$= A_1$.

plus bref

$= A_1\cap(A_2\cup C_E A_2) = A_1\cap E = A$.

Ex. 2.8 (dessiner)

Ex. 2.9. Différence symétrique : $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

$A\subset E$: $E\Delta A = (E\setminus A)\cup(A\setminus E) = E\setminus A\cup\emptyset = E\setminus A = C_E A$.

$A\Delta A = (A\setminus A)\cup(A\setminus A) = \emptyset$

$A\Delta C_E A = (A\setminus(C_E A))\cup(C_E A\setminus A) = \{x\in A,\ x\notin C_E A\}\cup\{x\notin A,\ x\notin A\}$

$= \{x\in A,\ x\in A\}\cup\{x\notin A\} = E$.

$\emptyset\Delta A = (\emptyset\setminus A)\cup(A\setminus\emptyset) = \emptyset\cup A = A$.

$A\cup B = (A\setminus B)\,\dot\cup\,(A\cap B)\,\dot\cup\,(B\setminus A)$ donc $(A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\setminus B)\,\dot\cup\,(B\setminus A) = A\Delta B$.

$A\Delta B = A\Delta C \iff B = C$. ($\Leftarrow$) trivial.

($\Rightarrow$) : soit $x\in B$. Si $x\in A$ alors $x\notin A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ donc $x\notin A\Delta C$ mais $x\in A$ donc néc. $x\in C$. Si $x\notin A$ alors $x\in A\Delta B$ donc $x\in A\Delta C$ et puisque $x\notin A$, on a $x\in C$. En échangeant B et C on a $C\subseteq B$, d'où $B\subseteq C$.