Ex. 2.23. il y a $|F|^{|E|} = 3^2 = 9$ applications. facil.

Ex. 2.24. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x+3$ $\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x+5$

1. bijectives : inverse $y \mapsto y-3$ et $y \mapsto -(y-5)$
2. ~~facil.~~ $(f \circ g_{|\mathbb{Z}})(x) = f(-x+5) = -(x+3)+5 = -x+2$. Etc.

Ex. 2.25. injective, non surjective $(1 \notin \mathrm{Im}\, f)$.

Ex. 2.26. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ non injective $(f(-1) = f(1))$

non surj. $(-1 \notin \mathrm{Im}(f))$.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ inj. ($x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0$

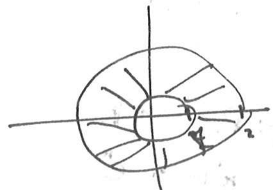
en $\mathbb{R} \Leftrightarrow x_1 = x_2$).

surj : $y = (\sqrt[3]{y})^3$ si $y \geq 0$ ok. donc bijective.

$y = -(\sqrt[3]{-y})^3$ si $y < 0$

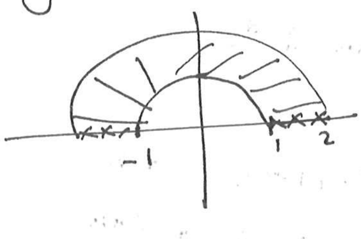
Ex. 2.27. (~~Ucf~~ $]1,2[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$



couronne circulaire)

$f : \underbrace{]1,2[\times]0,\pi[}_{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$



demi-couronne

injective : oui $P = (x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,(\cos\theta, \sin\theta)$

$= r(\cos\theta, \sin\theta)$

surjective : non. $f(U) \subsetneq \mathbb{R}^2$

si on considère $f :]1,2[\times]0,\pi[\longrightarrow f(U)$ inj. surj. et bij.

Ex. 28. tous distincts : $n \geq 26$ (f injective)

tous attribués : $n \leq 26$ (f surjective)

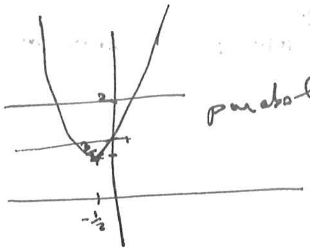
tous distincts $\Leftrightarrow$ tous attribués (cf. principe des tiroirs).

$n = 26$: ~~les~~ tous distincts $\Leftrightarrow$ tous attribués

Pour les ens. finis, $f : A \longrightarrow B$ injective $\Leftrightarrow$ surj $\Leftrightarrow$ bijective.

Ex. 29. dessin. Classique.

Famille 4.



parabole.

Ex. 30. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$k \mapsto k^2+k+1$

injective : non ex. $f(0)=1$
$f(-1)=1$

surjective : $f(k)=2 \iff k^2+k+1=2 \iff k^2+k+1-1=0 \iff k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

$k \notin \mathbb{Z}$. pas de sol. en $\mathbb{Z}$.

donc $2 \notin f(\mathbb{Z})$. NON surjective.

Ex. 31. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto xy$

non inj : $(1,1) \mapsto 1$
$(-1,-1) \mapsto 1$

surj. oui : $\forall x \in \mathbb{R}$ $x = f(x,1)$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$x \mapsto (x, x^2)$

inj. oui : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2$

non surj. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \notin g(\mathbb{R})$

$f\circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f\circ g(x) = f(x, x^2) = x^3$ bijective

~~$g\circ f(x)$~~

$g\circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$g\circ f(x,y) = g(xy) = (xy, x^2y^2)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} xy \\ x^2y^2 \end{pmatrix}$

non inj : $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

non surj : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \notin gf(\mathbb{R}^2)$.

Ex. 32. $f : A \to B$, $X_1, X_2 \subseteq A$.

1. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$ vrai toujours.

2. $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$ toujours, donc il suffit de montrer $(\supseteq)$ si f injective.

soit $y \in f(X_1) \cap f(X_2) \Rightarrow y \in f(X_1) \Rightarrow \exists!\ x_1 \in X_1$ t.q. $f(x_1) = y$
$y \in f(X_2) \Rightarrow \exists!\ x_2 \in X_2$ t.q. $f(x_2) = y$

mais f injective, donc $x_1 = x_2 = x \Rightarrow x \in X_1 \cap X_2$ donc $y \in f(X_1 \cap X_2)$.

3. toujours vrai, f^{-1} respecte $\cup$ et $\cap$.

Ex. 33. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

f, g inj $\Rightarrow g\circ f$ inj. : $x_1, x_2 \in X$, $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\Rightarrow (g$ inj.$)$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (f$ inj.$)$ $x_1 = x_2$ ok.

f, g surj. $\Rightarrow g\circ f$ surj. soit $z \in Z \Rightarrow \exists\ y \in Y$ t.q. $g(y) = z \Rightarrow \exists x \in X$ t.q. $f(x) = y$
$\Rightarrow g(f(x)) = z$

Ex. 3.4. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$: non inj. $\begin{array}{l}(0,1) \longmapsto 1 \\ (1,0) \longmapsto 1\end{array}$

surj : $y = f(0,y)$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

bijection : soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\begin{cases} x+y = a \\ x-y = b \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = a+b \\ -2y = -a+b \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$

appl. inverse : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$

$f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$
$A \longmapsto C_{\mathbb{N}}(A)$

$f^2 = id_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$.
$C_{\mathbb{N}}(C_{\mathbb{N}}(A)) = A$ donc bijection, et
$f^{-1} = f$.

Ex. 3.5. $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto 2n$ $\qquad g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto \left[\frac{n}{2}\right]$

f : injective, non surjective (ex. $3 \notin f(\mathbb{N})$)

g : non injective (ex. $\left[\frac{2}{2}\right] = [1] = 1$, $\left[\frac{3}{2}\right] = [1{,}5] = 1$), surjective. $\left(n = \left[\frac{2n}{2}\right]\right)$.

$g \circ f : n \longmapsto g(f(n)) = g(2n) = \left[\frac{2n}{2}\right] = [n] = n$, bijective.

$f \circ g : n \longmapsto f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) = 2\left[\frac{n}{2}\right]$ non injective $2\left[\frac{1}{2}\right] = 2\cdot 0 = 0 = 2\left[\frac{0}{2}\right]$
non surj : $3 \notin f\circ g(\mathbb{N})$.

Ex. 3.6. $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

i). $g\circ f$ inj $\Rightarrow$ f inj. En effet : soient $x_1, x_2 \in E$ t.q. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$
$\underbrace{g}_{\text{inj.}}(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$.

ii). $g\circ f$ surj. $\Rightarrow$ g surj. En effet : soit ~~$y \in g(e)$~~ $z \in G$, alors $\exists$ $x \in E$ t.q.
$(g\circ f)(x) = z$. donc $g(f(x)) = z$, c-à-d. $y = f(x)$ est un antéc. de z par g.

iii). $g\circ f$, g bijectives.
Alors f est injective par i).
f surjective ? soit $y \in F$, alors $g(y) \in G$ $\Rightarrow$ $\exists!$ $x \in E$ t.q. $(g\circ f)(x) = g(y)$.
alors $g(f(x)) = g(y)$ mais g injective donc $f(x) = y$. $\Rightarrow$ f surjective.
Attention : si l'hypothèse g bijective est supprimée, la thèse est fausse en général.

Ex. 2.37. $f : E \to F$ bijective $\Leftrightarrow$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f(C_E(A)) = C_F f(A)$.

Dém. $(\Rightarrow)$: $(\subseteq)$ Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, soit $y \in f(C_E A)$. alors $y = f(x)$, $x \in C_E A$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = f(x)$, $x \notin A$. Alors $y \notin f(A)$, car si $y \in f(A)$, $y = f(x')$, $x' \in A$, mais f bijective donc un tel x' n'existe pas. $\Rightarrow$ $y \in C_F f(A)$.

$(\supseteq)$: Soit $y \in C_F f(A)$. $\Rightarrow$ $y \notin f(A)$, mais $y \in F = f(E)$ donc $y = f(x)$, $x \in E$. Si $x \in A$, on aurait $y \in f(A)$. Donc $x \notin A$, c-à-d $x \in C_E A$, et alors $y \in f(C_E A)$.

$(\subseteq)$ et $(\supseteq)$ impliquent $(=)$, et puisque A est arbitraire, on a $(\Rightarrow)$.

$(\Leftarrow)$: f injective : si f pas injective soient $x_1 \neq x_2 \in E$, t.q. $f(x_1) = f(x_2)$. Alors on considère $A = \{x_1\}$.

$$f(C_E(A)) \neq C_F f(A) = F \setminus \{f(x_1)\}$$
$$\| $$
$$f(A \setminus \{x_1\})$$

car $f(x_1) = f(x_2)$ donc $f(x_1) \in f(A \setminus \{x_1\})$ mais $f(x_1) \notin F \setminus \{f(x_1)\}$.

On a prouvé la contraposée, donc f injective.

f surjective : soit $A = E$. Alors $f(C_E E) = \emptyset = C_F(f(E))$ donc $C_F(f(E)) = \emptyset$, qui implique $f(E) = F$, donc f surjective.

Ex. 2.38. $n \geq 3$ impair $0 \leq a \leq n-1$.

$f : \{0, 1, \ldots, n-1\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (bien définie)

$k \longmapsto f(k) =$ reste de $a+k$ par n.

a) ~~les~~ $n = 7$, $a = 4$

$f : \{0, 1, \ldots, 6\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, 6\}$

$k \longmapsto f(k) =$ reste de $k + 4$ par 7.

$0 \longmapsto 4$
$1 \longmapsto 5$
$2 \longmapsto 6$
$3 \longmapsto 0$
$4 \longmapsto 1$
$5 \longmapsto 2$
$6 \longmapsto 3$

b) $f(k_1) = f(k_2)$:
reste de $a+k_1$ = reste de $a+k_2$:

$a + k_1 = f(k_1) + q_1 n$ et $f(k_1) = f(k_2) = r$

$a + k_2 = f(k_2) + q_2 n$

$a + k_1 = r + q_1 n$ $a + k_2 = r + q_2 n$

$k_1 - k_2 = (q_1 - q_2) n$ $\Rightarrow$ $n \mid k_1 - k_2$ mais $k_1 - k_2 \in \{-(n-1), \ldots, (n-1)\}$, donc l'unique possibilité est $k_1 - k_2 = 0$ donc $k_1 = k_2$.

$\Rightarrow$ f surjective.

c) f injective, entre deux ensembles égaux

Ex. 40. $g : \{0,1,\dots,n-1\} \longrightarrow \{0,1,\dots,n-1\}$
$k \longmapsto$ reste de k^2 par n.

ex. $n=5$
$0 \longmapsto 0$
$1 \longmapsto 1$
$2 \longmapsto 4$
$3 \longmapsto 9-5=4$
$4 \longmapsto 16-15=1$

n impair $\Rightarrow$ $n = 2k+1 = k+(k+1)$

alors $k \longmapsto f(k)$ = reste de k^2 :

$k^2 = qn + f(k)$.

et $(k+1)^2 = k^2 + 2k+1 = qn + f(k) + \underbrace{(2k+1)}_{n}$

$= (q+1)\,n + \underbrace{f(k)}_{\text{reste}}$ $\Rightarrow$ $f(k) = f(k+1)$ $\rightarrow$ f non injective.

Ex. 43. $E \xrightarrow{f} F$

1) $A \subset f^{-1}(f(A))$: soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ donc x est un antécédent de $f(x)$.
$\Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$.

f injective : soit $x \in f^{-1}(f(A))$ alors $f(x) \in f(A) \Rightarrow f(x) = f(x')$, $x' \in A \Rightarrow$ (f inj.)
$x = x' \Rightarrow x \in A$, d'où l'égalité.

ex. $f : \{0,1,2\} \longrightarrow \{3\}$. $A = \{0,1\}$. $\neq f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{3\}) = \{0,1,2\}$
$0,1,2 \longmapsto 3$

2) $f(f^{-1}(B)) \subset B$: soit $y \in f(f^{-1}(B))$: $y = f(x)$, $\exists x \in f^{-1}(B)$, donc $y = f(x)$
pour x t.q. $f(x) \in B$. Donc $y \in B$.

f surjective : soit $y \in B$: $y = f(x)$ $\exists x \in E$ donc. Soit x un tel antécédent, alors
$x \in f^{-1}(B)$, e $\underset{\substack{\| \\ y}}{f(x)} \in f(f^{-1}(B))$.

ex. $f : \{0,1,2\} \longrightarrow \{0,1\}$ alors $f(f^{-1}(\{1\})) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{1\}$.
$0 \longmapsto 0$
$1 \longmapsto 0$
$2 \longmapsto 0$

Ex. 45. $n \neq 0$
$n = 2^q(2k+1)$. On utilise la décomposition en produit de nombres premiers :
$n = 2^q \cdot \underbrace{(p_1^{t_1} \cdots p_r^{t_r})}_{\text{impair}} = 2^q(2k+1)$. Ou directement :

soit ~~telle~~ q le plus grand exposant t.q. $2^q \mid n$. alors $n = 2^q$ (impair).

donc $n = 2^q(2k+1)$ de façon unique.

donc $g : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bijection
$(q,k) \longmapsto 2^q(2k+1)$

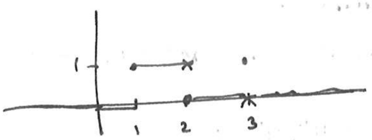
$h : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijection
$n \longmapsto n-1$

donc $f = h \circ g : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ bijection.
$(q,k) \longmapsto 2^q(2k+1) - 1$

Ex. 2.4.6. Fonctions caractéristiques : Feuille 6.

E, $X \subseteq E$, $f_X : E \longrightarrow \{0,1\}$ (ou 1_X) $\quad x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{si } x \notin X. \end{cases}$ $\quad$ (ou $A \subseteq E$, χ_A)

$X = [1;2[\cup \{3\}$



$A = B \iff f_A = f_B$:

$(\Rightarrow)$: soit $x \in E$:
- si $x \in A \Rightarrow f_A(x) = 1$, mais $x \in B$ donc $f_B(x) = 1$
- si $x \notin A \Rightarrow f_A(x) = 0$, mais $x \notin B$ donc $f_B(x) = 0$.

en tout cas $f_A(x) = f_B(x)$ $\forall x \in E$.

$(\Leftarrow)$: $(\subseteq)$ soit $x \in A$: alors $f_A(x) = 1 = f_B(x)$ donc $x \in B$.
en échangeant A et B on obtient $(\supseteq)$.

$f_{A \cap B}(x) = \left\lfloor \frac{f_A(x) + f_B(x)}{2} \right\rfloor =$
- 1 si $f_A(x) = 1$ $f_B(x) = 1$ donc $x \in A \cap B$
- 0 si $f_A(x) = 0$ et $f_B(x) = 1$ ou vice-versa
- 0 si $x \notin A$, $x \notin B$.

$f_{A \cup B} = \left\lceil \frac{f_A + f_B}{2} \right\rceil$ $\qquad f_{C_E A} = 1 - f_A$

$f_{A \Delta B} = |f_A - f_B|$
- $x \in A \cap B$: $1 - 1 = 0$ ok.
- $x \in A \setminus B$: $1 - 0 = 1$ ok.
- $x \in B - A$: $|0 - 1| = 1$ ok.
- $x \notin B$, $x \notin A$: $0 - 0 = 0$ ok.

$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C \iff f_{A \Delta (B \Delta C)} = f_{(A \Delta B) \Delta C} \iff$

$|f_A - f_{B \Delta C}| = |f_{A \Delta B} - f_C| \iff |f_A - |f_B - f_C|| = ||f_A - f_B| - f_C|$

f_A	f_B	f_C	$\lvert f_A - \lvert f_B - f_C \rvert \rvert$	$\lvert \lvert f_A - f_B \rvert - f_C \rvert$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

$=$ ok.