

Relations binaires

Ex. 2.47. $x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

équiv: (R): $x^2 - x^2 = 0 = x - x$ ✓

(S): $x^2 - y^2 = x - y \Rightarrow y^2 - x^2 = -(x^2 - y^2) = -(x - y) = y - x \Rightarrow y R x$

(TR): $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z \Rightarrow x^2 - z^2 = x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z = x - z$ ✓

$\mathcal{C}_R(0) = \{x \mid x^2 - 0 = x - 0\} = \{x \mid x^2 = x\} = \{x \mid x^2 - x = 0\} = \{0, 1\}$

$\mathcal{C}_R(1) = \{x \mid x^2 - 1 = x - 1\} = \{x \mid (x-1)(x+1-1) = 0\} = \{x \mid (x-1)(x) = 0\} = \{1, 0\}$

$\mathcal{C}_R(\frac{1}{2}) = \{x \mid x^2 - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{2}\} = \{x \mid x^2 - x + \frac{1}{4} = 0\} = \{x \mid 4x^2 - 4x + 1 = 0\} = \{\frac{1}{2}\}$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{4} = \frac{1}{2}$

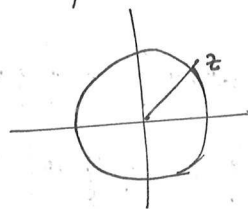
Req: $z R z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$

1. (R) $|z| = |z|$ (S) $|z| = |z'| \Rightarrow |z'| = |z|$ (TR) $|z| = |z'|$ et $|z'| = |z''| \Rightarrow |z| = |z''|$

cela découle du fait que $=$ est une rel. d'équivalence.

2. $\mathcal{C}_R(z) = \{z' \mid |z'| = |z|\}$

(et si $z=0$, $\mathcal{C}_R(0) = \{0\}$).



le cercle qui passe par z .

Ex. 2.48. $(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow y - 2x = y' - 2x'$

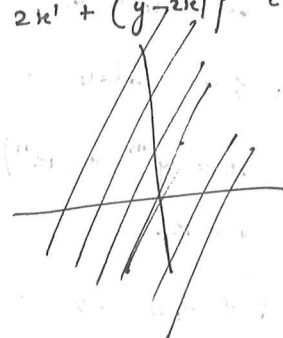
(R): $y - 2x = y - 2x$ ok.

(S): si $y - 2x = y' - 2x'$ alors $y' - 2x' = y - 2x$ ✓

(TR): si $y - 2x = y' - 2x'$ et $y' - 2x' = y'' - 2x''$ alors $y - 2x = y'' - 2x'' \Rightarrow (x, y) R (x'', y'')$

$\mathcal{C}_R(x, y) = \{(x', y') \mid y' - 2x' = y - 2x\} = \{(x', y') \mid y' = 2x' + (y - 2x)\}$ c'est une droite.

donc $\frac{\mathbb{R}^2}{R} \cong \{ \text{faisceau de droites } y = 2x + k, k \in \mathbb{R} \}$



Ex. 2.49. $\mathbb{N}^2: (a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

(R): $(a, b) R (a, b) \Leftrightarrow a + b = b + a$ ok.

(S): si $a + d = b + c$ alors $c + b = d + a \Rightarrow (c, d) R (a, b)$

(TR): Si $(a, b) R (c, d)$ alors $a + d = b + c$ et $(c, d) R (e, f)$ alors $c + f = d + e$

$\begin{cases} a + d = b + c \\ c + f = d + e \end{cases} \Rightarrow a + d + c + f = b + c + d + e \Rightarrow a + f = b + e$ ✓

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_R(0,0) &= \{(x,y) \mid x+0 = y+0\} = \{(x,y) \mid x=y\} \quad (\text{droite } y=x \cap \mathbb{N}^2) \\ \mathcal{C}_R(2,2) &= \{(x,y) \mid x+2 = y+2\} = \{(x,y) \mid y=x\} \\ \mathcal{C}_R(3,1) &= \{(x,y) \mid x+1 = y+3\} = \{(x,y) \mid y=x-2\} \quad (\text{droite } y=x-2 \cap \mathbb{N}^2) \\ \mathcal{C}_R(1,3) &= \{(x,y) \mid x+3 = y+1\} = \{(x,y) \mid y=x+2\} \\ \mathcal{C}_R(7,5) &= \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x+5 = y+7\} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid y=x-2\} \end{aligned}$$

$\frac{\mathbb{N}^2}{R}$ est défini si (a,b) est un élément de $\mathbb{N}^2$, alors
 $(x,y) R (a,b)$ si $x+b = y+a \Leftrightarrow y = x + \underbrace{(b-a)}_Z$.

vice-versa, si $k \in \mathbb{Z}$, $y = x + k$ définit une classe de $(0,k)$ si k est positif,
 et de $(-k,0)$ si k est négatif.

donc classes de $R \iff$ ensembles $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x + k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ex. 2.50. Équivalence: facile.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x) &= \{y \in \mathbb{R} \mid x(y^2+1) = y(x^2+1)\} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{x^2+1} = \frac{y}{y^2+1}\right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid xy^2 + x = yx^2 + y\} = \{y \in \mathbb{R} \mid x-y = yx^2 - xy^2\} = \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid x-y = yx(x-y)\} = \{y \mid x \neq y\} \cup \{y \mid xy=1\} = \{x\} \cup \{y \mid y = \frac{1}{x}\} \quad \text{si } x \neq 0 \\ &= \{x, \frac{1}{x}\} \end{aligned}$$

en conclusion, $\mathcal{C}(x) = \{x, \frac{1}{x}\}$ si $x \neq 0$,

$$\mathcal{C}(0) = \{0\}.$$

Ex. 2.51. en $\mathbb{N}^*$, $x \leq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \mid y = x^n$

(R): $x \leq x$ car $x = x^1$.

(AS): si $x \leq y$ (alors $y = x^n$), $y \leq z$ (alors $z = y^m = x^{nm}$)

ou a $x = y^m = (x^n)^m = x^{nm}$ donc $nm=1$ qui en $\mathbb{N}^*$ signifie $n=m=1$
 donc $y = x$.

(TR): $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow y = x^n, z = y^m \Rightarrow z = y^m = (x^n)^m = x^{nm} \Rightarrow x \leq z$.

les majorants de 2 par $\leq$ sont de la forme $2^n, n \in \mathbb{N}^*$
 " " 3 " " " $3^m, m \in \mathbb{N}^*$.

~~on a pas~~ il n'existe aucun élément qui soit à la fois 2^n et 3^m
 (d'après l'unicité de la factorisation si l'on veut), donc $\{2,3\}$ n'a pas de
 majorant, et elle n'est pas majorée.

Relations binaires

Ex. 2.52. (Ordre lexicographique):

$\ll$ ordre total: reflex: $(n,y) \ll (n,y)$: $n=n$ et $y \leq y$ ok.

antisym: $(n,y) \ll (n',y')$ et $(n',y') \ll (n,y)$:

on ne peut avoir $n < n'$ sinon $\rightarrow$ fausse. donc $n = n'$ et $y \leq y'$, de l'autre côté $n' = n$ et $y' \leq y \Rightarrow n = n'$ et $y' = y \Rightarrow (n,y) = (n',y')$.

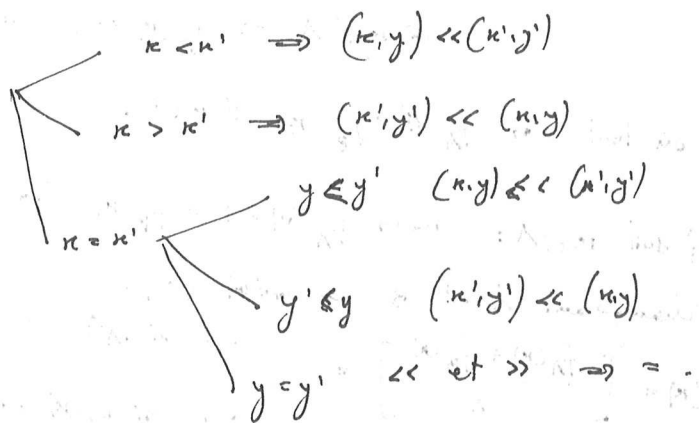
trans. $(n,y) \ll (n',y')$ et $(n',y') \ll (n'',y'')$:

si $n < n'$ ou $n' < n'' \Rightarrow n' < n''$ ok.

si $n = n'$ et $n' = n''$ on doit avoir $y \leq y'$ et $y' \leq y'' \Rightarrow y \leq y''$ ok.

En tout cas on a $(n,y) \ll (n'',y'')$.

Total: on sait (n,y) et (n',y') :

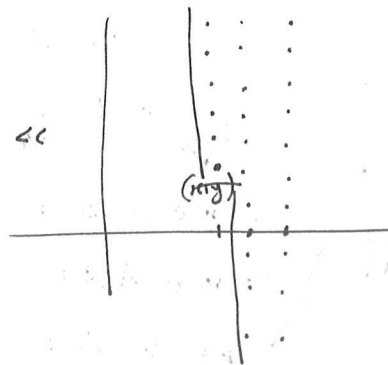


$(n,y) \in \mathbb{N}^2$

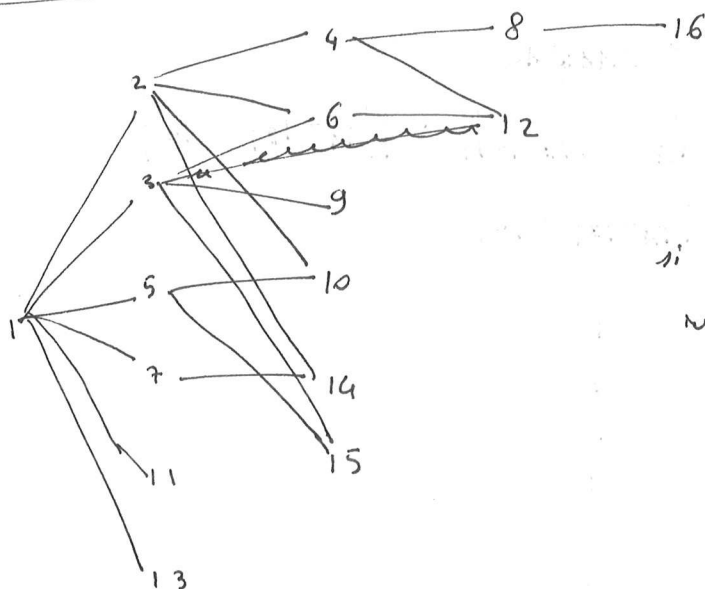
majorants de (n,y) :

(n',y') avec $n' > n$, et (n',y') avec $y' \geq y$:

$(1,1) \ll (1,2) \ll (1,3) \ll (2,1) \ll (2,2) \ll (2,3) \ll (3,1) \ll (3,2) \ll (3,3)$.



Ex. 2.53. (Diag. de Hasse)



entiers minimaux de $\mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$: nombres premiers

si un nombre a un seul prédécesseur

immédiat, il est puissance d'un (seul) premier,

$n = p^k$, p premier.

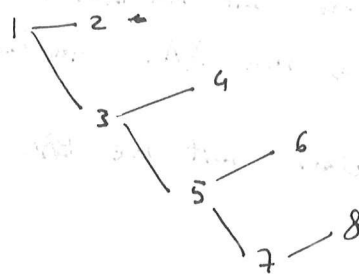
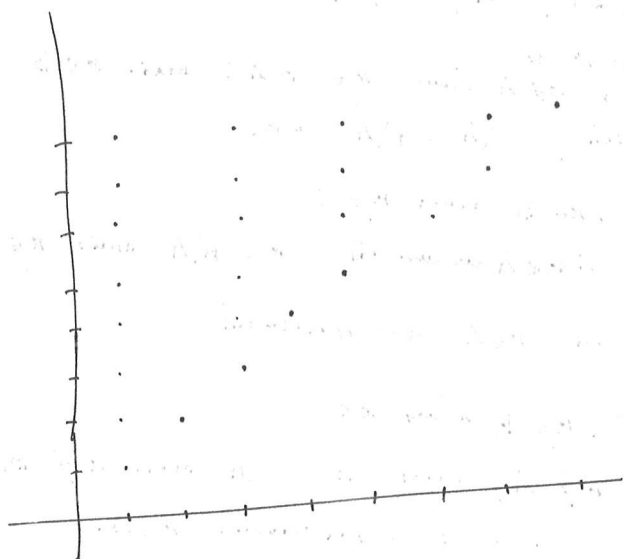
Ex. 2.53. (suite)

$x R y$ soit $x=y$
 soit x impair, $x < y$

R ordre: $x R x$: $x=x$ ok.

$x R y$ et $y R x$: soit $x=y$ ok ~~$x < y$~~
 soit x impair, $x < y$ Non car on n'aurait pas $y R x$

$x R y, y R z$
 $x=y, y$ impair et $y < z$ alors x impair et $x < z \Rightarrow x R z$
 $x < y, y=z \Rightarrow x < z \Rightarrow x R z$
 x impair, $x < y, y=z \Rightarrow x$ impair, $x < z \Rightarrow x R z$
 x impair, $x < y, y$ impair, $y < z \Rightarrow x$ impair, $x < z$. $x R z$ ✓.



éléments minimaux: 1

maximaux: les pairs.

plus petit élément: 1

plus grand élément? non, aucun.

Ex. 2.54. $\mathbb{R}$ ARA ok. ARB et BRA :

$x A = (x, y)$ en $\mathbb{N}^2$, $ARB \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases}$
 (x, y) (x', y')

$(x, y) R (x', y')$ et $(x', y') R (x'', y'')$

$\begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases} \quad \begin{cases} x' \leq x'' \\ y' \leq y'' \end{cases} \Rightarrow x \leq x'' \text{ et } y \leq y''$ ok.

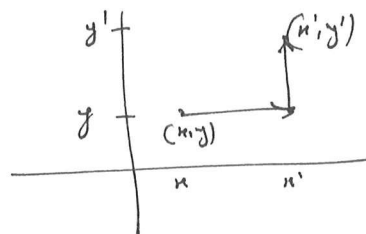
ARB et $BRC \Rightarrow ARC$

$\begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x' \leq x'' \\ y' \leq y'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq x'' \\ y \leq y'' \end{cases}$ ok.

ordre non total: ex. (2, 3) et (4, 1)
 ne sont pas comparables.



2. Mêmes réponses: c'est un ordre, non total.



Ex. 55. 1. Soit $x \in B \setminus D$:

$x \in C$: alors $x \in B, x \notin D, x \in C$, donc $x \in C \setminus D \subset A$ donc $x \in A$.
 $x \notin C$: alors $x \in B \setminus C \subset A$ donc $x \in A$.

2. $B \cap A \subset C \Leftrightarrow (B \setminus A) \subset A$.

refl. $B \cap A \subset B$: $B \setminus B = \emptyset \subset A$ ok.

$B \cap A \subset C \Leftrightarrow (B \setminus A) \subset A \Leftrightarrow (C \setminus B) \subset A \Leftrightarrow C \cap A \subset B$.

$B \cap A \subset C$ et $C \cap A \subset B$: $B \cap C \subset A$ et $C \cap D \subset A \xrightarrow{?} B \cap D \subset A$

$B \setminus C \subset A$ et $C \setminus D \subset A \Rightarrow$ par G/ $B \setminus D \subset A$.

$\Rightarrow B \cap D \subset A$ ok.

en échangeant l'ordre, $C \setminus B \subset A$ et $D \setminus C \subset A \Rightarrow$ par G/ $D \setminus B \subset A$

donc R_A Equivalence.

$\mathcal{C}_A[B] = \{x \mid B \cap x \subset A\} = \{x \mid (B \cup C) \setminus (B \cap C) \subset A\} = \{x \mid (B \setminus A) \subset C \setminus A\}$: en effet :

$\cdot$ si $B \cap C \subset A$ alors soit $x \in B \setminus A$: ~~alors $x \notin A$~~ donc $x \notin B \cap C$ mais $x \in B$

donc $x \in C \Rightarrow x \in C \setminus A$. Analogiquement, $C \setminus A \subset B \setminus A$ ok.

$\cdot$ si $(B \setminus A) = C \setminus A$ alors soit $x \in B \cap C$:

- $x \in B$ alors $x \notin C$
- si $x \notin A$ on aurait $x \in B \setminus A$ mais $x \notin C \setminus A$
- donc $x \in A$ nécessairement
- $x \notin B$ alors $x \in C$
- si $x \notin A$, alors $x \in C \setminus A$ mais $x \notin B \setminus A$
- donc nécessairement $x \in A$.