Applications. Feuille 1.

1. Règle fonctionnelle, application, fonction

Déf. Règle fonctionnelle : (A, B, f) t.q. à tout $x \in A$ correspond au plus un élément de B, noté $f(x)$.

correspondance

Application : si $\forall x \in A$, $\exists\, y = f(x) \in B$.

Domaine : $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in A \text{ t.q. } \exists\, y = f(x) \in B\} \subseteq A$

Notation, Remarque :
- fonction = règle fonctionnelle, application
- application = fonction, domaine de déf. de la fonction.
- application, et fonction si $B = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Ex. $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ application, $\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}, x \overset{f}{\longmapsto} \frac{1}{x}\right)$ règle fonctionnelle. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$y = f(x)$ image de x, x antécédent (ou préimage) de y.

A = ens. de départ = Domaine si f application

B = ens. d'arrivée = codomaine.

Notation : $f : A \longrightarrow B$, $x \longmapsto f(x)$ pour les applications, ou $A \xrightarrow{f} B$, $x \longmapsto f(x)$.

(B^A ens. des appl. de $A \to B$)

Graphe. $\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$.

P.P. $\forall a \in A$, $\exists!\,(a,b) \in A \times B$ t.q. $(a,b) \in \Gamma_f$. C'est $(a, f(a))$.
(unicité de l'image).

Vice-versa, si $\Gamma \subseteq A \times B$ a cette propriété, alors $\Gamma = \Gamma_f$, $\exists!\, f : A \to B$
($f(a) = b$ avec l'unique b t.q. $(a,b) \in \Gamma$).

Rem. 1. $f : A \to B$ pas un algo. de calcul $x \mapsto \sqrt{x}$

2. f est la donnée de (f, A, B). donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

$f \neq g$.

3 : $f : A \times B \longrightarrow C$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ fonction de deux variables

$f : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \longrightarrow C$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$ fonct. de n. variab.

4. **Restrictions** : $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$ (A, B, f)

$C \subseteq A$ $\quad f_{|C} : C \to B$, $x \mapsto f(x)$ $\quad (C, B, f_{|C})$.

ex. $g = f_{|\mathbb{R}_{\geq 0}}$.

Rem. (f, A, B) règle fonctionnelle $\Rightarrow$ $(f_{|\mathrm{Dom} f}, \mathrm{Dom}(f), B)$ application. ~~Recalle~~

$$\left(\frac{1}{x}, \mathbb{R}, \mathbb{R}\right) \longrightarrow \left(\frac{1}{x}, \mathbb{R}\setminus\{0\}, \mathbb{R}\right).$$

Identité : $\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$, $x \longmapsto x$, 1_A.

inclusion $A \subseteq B$ $\iota : A \longrightarrow B$, $x \longmapsto x$.

Image directe, image ~~inverse~~ réciproque

$f : A \longrightarrow B$

A $X \subseteq A \longmapsto$ ens. des images des élmts. de X.

(dessin)

f_* : $\mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$

$X \longmapsto f_*(X) = f_*(X) = \{ f(a) \mid a \in X \}$

P.P.

- $f_*(X_1 \cup X_2) = f_*(X_1) \cup f_*(X_2)$
- $f_*(X_1 \cap X_2) \subseteq f_*(X_1) \cap f_*(X_2)$ en gén. $\subsetneq$.
- $f_*(C_A X)$ n'a en gén. aucune rél. avec $C_B f_*(X)$.

$f_*(A) = f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \}$ image de A. $f(A) \subseteq B$, en gén $\subsetneq$.

$= \mathrm{Im} f$.

Rem. Notation

$f_*(X) = f(X)$.

$f^*(X) = f^{-1}(X)$ mais f^{-1} aussi l'appl. réciproque si elle existe.

$f^* = f^{-1} : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$

$Y \longmapsto \{ a \in A \mid f(a) \in Y \}$ $\longrightarrow$ tous les élmts. de A dont l'image est en Y.

P.P.

- $f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$.
- $f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$
- $f^{-1}(C_B(Y)) = C_A(f^{-1}(Y))$.
- $f^{-1}(B) = A$.

Exercices.

Composition des applications.

$f : A \longrightarrow B \quad g : C \longrightarrow D$ t.q. $\operatorname{Im} f \subseteq C$

$$g \circ f : A \longrightarrow D$$
$$x \longmapsto g(f(x)).$$

P.P. . $f \circ g \neq g \circ f$ (même si les compositions ont sens toutes deux). $\circ$ non comm.

. $\exists\, h : C \longrightarrow D$: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. associative $= h \circ g \circ f$.

. $f \circ id_A = f$, $id_B \circ f = f$.

$\circ$ et f_*, f^* : $f : A \longrightarrow B$

. $f^* \circ f_*(X) \supseteq X$ $\qquad \neq$ en gén.

. $f_* \circ f^*(Y) \subseteq Y$

Apl. injectives, surjectives, bijectives

$f : A \longrightarrow B$ injective si :

$\forall\, x, y \in E, (f(x) = f(y)) \Rightarrow x = y.$

P.P.

- si $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ ou $\{x\}$ (au plus un élmt.)
- si $(x \neq x') \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Th. f injective :

. si $\exists\, g : B \longrightarrow A$ t.g. $g \circ f = id_A$ (inverse gauche).

. si $\forall\, g_1, g_2 : B \longrightarrow A$, $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 \circ g_2$.

Exemples.

l'inclusion $\iota : B \longrightarrow C$ est injective.

$f : A \longrightarrow B$ surjective si :

$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A$ t.q. $f(x) = y$.

P.P.

si $\forall\, y \in B$, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.

si $f(A) = B$.

Th. f surjective :

. si $\exists\, h : B \longrightarrow A$ t.q. $f \circ h = id_B$. (inverse gauche).

. si $\forall\, g_1, g_2 : B \longrightarrow C$, $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$.

$f: A \to B$ bijective si inj et surj., c-à-d.

$\forall y \in B, \exists!\, x \in A$ t.q. $f(x) = y$.

P.P.

· si $\forall y \in B$, $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$ un singleton.

App. inverse : si $f : A \to B$ bij. on déf. $f^{-1} : B \to A$

$y \mapsto x$ t.q. $x \in f^{-1}(\{y\})$.

Th. f bijective si f inversible, c-à-d. si $\exists\, g : B \to A$ t.q. $g \circ f = id_A$,

$f \circ g = id_B$. $g = f^{-1}$.

P.P. f^{-1} unique : si g autre inverse, on a

$g = g \circ id_B = g \circ f \circ f^{-1} = id_A \circ f^{-1} = f^{-1}$.

Moralité : f bijective (inj + surj) $\Leftrightarrow$ f inversible ($\exists\, f^{-1}$).

P.P. $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(x)$.

$(f^{-1})^{-1} = f$.

Injectivité et composition.

$f : A \to B$ $g : B \to C$

f, g inj. / surj. / bij. alors $g \circ f : A \to C$ est inj. / surj. / bij., $\longrightarrow$ $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$.

Viceversa, si $g \circ f$ injective, alors f injective

($f(x) = f(y) \Rightarrow gf(x) = gf(y) \Rightarrow x = y$ ok).

$g \circ f$ surj. $\Rightarrow$ g surj.

$g \circ f$ biject. $\Rightarrow$ f inj. et g surj.

Exercice.