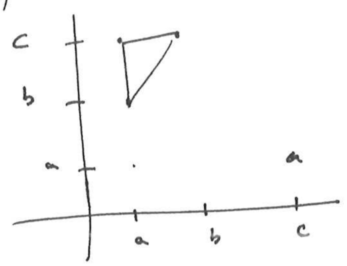
Relations binaires, équivalences, ordres 09/10/2014

Def. triple (A, B, R) où A, B ensembles, $R \subseteq A \times B$.
$(a,b) \in R$ on écrit $a R b$ (a en relation avec b).
Si $A = B$, $R \subseteq A \times A$, on dit:
(R) R réflexive si $\forall a \in A$, aRa.
($(a,a) \in R$, R contient la diag. de $A \times A$)

(S) symétrique si $\forall a, b \in A$, $\{ aRb \Rightarrow bRa$
($(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \}$, R sym. par rapp. à la diag. de $A \times A$).

(A) antisym. si $\forall a, b \in A$ aRb et $bRA \Rightarrow a = b$
($(a,b) \in R$, $(b,a) \in R \Rightarrow (a,a)$).

(TR) Transitive : aRb, $bRc \Rightarrow aRc$
($(a,b) \in R$, $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$).



(TOT) : totale : $\forall a, b \in A$, aRb ou bRa sont vrais.
($(a,b) \in R$ ou $(b,a) \in R$).
(TOT) $\Rightarrow$ (R). Non totale : partielle.

· Ex. Relations fonctionnelles, applications.

Équivalences

Déf. équiv. (R), (S), (TR). $\sim$, $\simeq$, $\cong$, $\approx$.
Classe d'équivalence : $Cl(a) = \bar{a} = [a]_R = \{ b \in A \mid aRb \}$.

Ex. $\sim$ minimale : la diagonale, $aRb \Leftrightarrow a = b$.
$\sim$ maximale : $A \times A$, aRb $\forall a, b \in R$.
Th. $\sim \Rightarrow$ Cl. d'éq. forment une partition de A (non vides, $\bigcup = A$ et $Cl_1 \cap Cl_2 = \varnothing$) dite partition associée.
Viceversa, partition de P A $\Rightarrow \exists!$ $\sim$ sur A t.q. la partition associée soit P. Donc bijection entre ($\sim$ sur A) et (partitions de A).
Dém.

Déf. Ens. quotient. $A/\sim = \{[a]_R \mid a \in A\}$ ensemble des classes d'équivalence.

$[a]_R = [b]_R \iff aRb$. A/R

Projection : $\pi^A_R : A \longrightarrow A/R$, $a \longmapsto [a]_R$ surjective.

Th. d'homomorphisme pour ensembles : Soit $f : A \to B$, et soit $\sim$ ~~défin~~ sur A définie par $a \sim a' \iff f(a) = f(a')$. Alors $\sim$ équiv. sur A, et

$\exists!\ \bar{f} : A/\sim \longrightarrow B$ t.q. $f = \bar{f} \circ \pi^A_\sim$; en outre, $\bar{f}$ est injective.

Dém. $\sim$ équiv. facil.

On pose $\bar{f} : A/\sim \longrightarrow B$, $[a] \longmapsto f(a)$.

Bien définie : si $[a] = [b]$ alors $a \sim b$ donc $f(a) = f(b)$ et $f([a]) = f(a)$, $f([b]) = f(b)$.

la valeur de $\bar{f}([a])$ ne dépend pas du choix du représentant a de $[a]$.

alors on a $\bar{f} \circ \pi^A_\sim = f$ car $\bar{f}([a]) = f(a)$ et $\bar{f}$ ~~est~~ unique car $\pi^A_\sim$ surjective (effacement à dte). $\boxtimes$.

Ordres : Ordre = (R), (A), (TR).

Ordre total, s'il est total en tant que rel. partiel sinon.

(c-à-d. $\forall x, y \in A$, $x \leq y$ ou $y \leq x$).

Notation : $<, \leq, \prec, \preceq$

$(A, \preceq)$ ensemble ordonné, x et y comparables si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

Maximal / minimal, maximum / minimum, majorant / minorant, borne supérieure / borne inférieure.

$(A, \preceq)$ ens. ordonné. $B \subseteq A$.

- $b \in B$ elmt. maximal de B si pour $b' \in B$, $b \preceq b' \Rightarrow b = b'$.
- $b \in B$ elmt. minimal de B si pour $b' \in B$, $b' \preceq b \Rightarrow b = b'$

(un ensemble peut avoir plusieurs maximaux (minimaux), distincts, néc. non comparables).

- $b \in B$ maximum de B si $b' \preceq b$ $\forall b' \in B$.
- $b \in B$ minimum de B si $b \preceq b'$ $\forall b' \in B$.

(si b max, alors unique maximal) (si b min, alors unique minimal).

- $a \in A$ majorant de B si $\forall b \in B$, $b \preceq a$.
- $a \in A$ minorant de B si $\forall b \in B$, $a \preceq b$.
- si $B \subseteq A$, ~~sup A~~ $\sup B$, borne sup. de B, est le min (s'il existe) des majorants de B.
- $\inf B$, borne inf. de B, est le max (s'il existe) des minorants de B.

Def. Ens. bien ordonné : tout s.-ens. non vide de A admet min.

Rem. Un bon ordre est toujours total. Ex. $\mathbb{N}$.